JEAN PRADINES

Pseudo-groupes infinis continus et applications analytiques formelles

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. nº 3, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
Séminaire de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Mai 1961

PSEUDO-GROUPES INFINIS CONTINUS ET APPLICATIONS ANALYTIQUES FORMELLES D'APRES KURANISHI [3]

par Jean PRADINES

Introduction. L'étude des pseudo-groupes continus est celle des transformations locales d'une variété qui sont les solutions d'un système différentiel d'un certain type; en fait, on a seulement en vue ici une étude *locale*, et on se restreint au cas *analytique.*

La composition, non partout définie, de ces transformations introduit dans leur ensemble une structure algébrique de pseudo-groupe, qui est en même temps reliée d'une certaine façon à la structure analytique du problème.

Dans le " cas fini ", les transformations se laissent paramétrer, au moins localement, par un groupe de Lie local, qui caractérise la structure en question.

Dans le " cas infini ", E. Cartan a introduit une notion d'équivalence, dite " isomorphisme holoédrique ", entre deux pseudo-groupes qui admettent un prolongement commun, notion qui, dans le cas fini, équivaut à l'isomorphisme des groupes locaux de paramétres.

Kuranishi, dans [3], cherche à étendre au cas infini la notion de groupe local de paramètres. Il utilise le fait que la recherche des solutions générales se ramène à la résolution successive de plusieurs systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec paramètres, ce qui fait dépendre ces solutions d'un certain nombre de fonctions arbitraires.

Il prend donc, en gros, pour espaces de paramètres, des espaces de fonctions analytiques et définit une notion de morphismes, appelés " germes d'application analytique infinie ", qui servent à exprimer aussi bien la correspondance entre paramètres et transformations que la loi de composition entre transformations et l'inversion d'une transformation. Il obtient ainsi une notion de groupe de paramètres local infini attaché à un pseudogroupe, et une notion d'isomorphisme entre ces groupes infinis de paramètres qu'il montre être équivalente à l'isomorphisme holoédrique des pseudogroupes, du moins dans le cas transitif.

Dans son travail, Kuranishi fait jouer un rôle important à une notion sous-jacente plus faible de morphismes, appelés " applications analytiques infinies formelles". Il développe dans ce cadre une théorie des groupes de Lie formels infinis qui généralise celle des groupes de Lie formels à un nombre fini d'indéterminées.

Ces morphismes, qui s'introduisent naturellement quand on fait abstrattion de la topologie du corps de base, sont définis à l'aide de familles de séries formelles. Il soumet en réalité celles-ci à certaines conditions, d'aspect algébrique, que nous inter-prétons ici comme étant, en fait, des conditions de convergence naturelles dans des espaces normés, mais à condition de prendre pour corps de base, non le corps des complexes, mais un corps valué de séries formelles.

Ce point de vue nous permet de dégager clairement quelles sont la structure que l'on considère et la catégorie où l'on se place, ce qui n'apparaissait pas très nettement dans [3], certaines données surabondantes étant introduites à titre auxiliaire.

En outre, l'étude des " applications formelles" est ramenée à celle de véritables applications (ou plutôt germes d'applications) analytiques entre espaces normés, ce qui permet d'éclairer les démonstrations en les ramenant à des schémas classiques et d'en éliminer des calculs parfois lourds.

Ces considérations font l'objet du présent exposé.

En fait, nous allons introduire d'abord une catégorie plus large que celle qui est considérée dans [3], que nous appellerons catégorie des "*espaces formels*". Puis nous indiquerons aux paragraphes 3 et 4 comment la catégorie des (F)-espaces de Kuranishi peut être obtenue comme sous-catégorie de la précédente, mais nous aurons peu dans la suite à utiliser les propriétés particulières à cette sous-catégorie (1).

Dans les paragraphes suivants, la considération des espaces formels aura rame-né l'étude des (F)-espaces et des " applications analytiques infinies formelles" à celle des germes d'application analytique (convergente) entre espaces normés (plus précisément normables) complets sur un corps valué complet non discret quelconque, en abrégé *(B)-espaces*, notion qui a son intérêt propre et qui généralise en même temps celle des espaces de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'outil essentiel demeure la méthode des majorantes, convenablement adaptée.

Une fois les definitions posées, la plupart des démonstrations seront de simples vérifications ou suivront de près les démonstrations classiques, et seront seulement esquissées.

1. La catégorie des espaces formels.

Soit K un corps commutatif de caractéristique 0, *fixé une fois pour toutes,* muni de la topologie discrète.

(1) En fait, la seule particularité importante des *(F)*-espaces par rapport aux espaces formels tient dans la proposition 6.1.

Sur le corps $K((t))$ des séries formelles généralisées par rapport à l'indéterminée t : $x = \sum x_n t^n$ ($x_n \in K$, $n \in \mathbf{Z}$, $x_n = 0$ au-dessous d'un certain rang), l'application $x \to |x| = 2^{-w(x)}$, où $w(x)$ est l'ordre de la série x, définit une *valeur absolue*, qui en fait un corps topologique valué complet non discret.

DEFINITION 1.1. *On appellera espace formel (sur K) un couple $(V, \mathfrak{V})$, où $\mathfrak{V}$ est un $K((t))$-espace vectoriel topologique normable complet, et V un K-sous-espace vectoriel de $\mathfrak{V}$ fermé tel que le $K((t))$-sous espace de $\mathfrak{V}$ qu'il engendre soit partout dense dans $\mathfrak{V}$.*

REMARQUE. La donnée d'un $K((t))$-espace vectoriel topologique normable complet $\mathfrak{W}$ et d'un K-sous-espace fermé V définit un espace formel $(V, \mathfrak{V})$ en prenant pour $\mathfrak{V}$ la fermeture dans $\mathfrak{W}$ du $K((t))$-sous-espace engendré par V.

Ce procédé sera utilisé plusieurs fois dans la suite.

DEFINITION 1.2. *Un morphisme (linéaire formel) d'un espace formel $(V, \mathfrak{V})$ dans un espace formel $(V', \mathfrak{V}')$ est un couple $(F, \mathfrak{F})$, où F est une application K-linéaire de V dans V' et $\mathfrak{F}$ une application $K((t))$-linéaire continue de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'$ prolongeant F.*

La notion d'*isomorphisme* (linéaire formel) en découle.

Les espaces formels et les morphismes formels forment évidemment une *catégorie* dite catégorie des espaces formels.

REMARQUES:

1) Si $(F, \mathfrak{F})$ est un morphisme, il est facile de voir que la connaissance de F détermine $\mathfrak{F}$.

2) Par contre, ni la seule connaissance de l'espace vectoriel topologique $\mathfrak{V}$, ni la seule connaissance de l'espace vectoriel V muni de la topologie induite par $\mathfrak{V}$, ne suffit à déterminer l'espace formel $(V, \mathfrak{V})$ à un isomorphisme près.

2. Opérations sur les espaces formels.

a) *SOUS-ESPACE ET QUOTIENT*. Un espace formel $H' = (V', \mathfrak{V}')$ est appelé un *sous-espace formel* de l'espace formel $H = (V, \mathfrak{V})$ si V' est un K-sous-espace de V et $\mathfrak{V}'$ un $K((t))$-sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{V}$.

Nécessairement V' (resp. $\mathfrak{V}'$) est fermé (puisque complet) dans V (rssp. $\mathfrak{V}$).

Tout K-sous-espace fermé V' *de* V détermine un et un seul sous-espace formel de H, obtenu par le procédé de la remarque qui suit la définition 1.1.

Si $H' = (V', \mathfrak{V}')$, est un sous-espace formel de $H = (V, \mathfrak{V})$, on vérifie que $H/H' = (V/V', \mathfrak{V}/\mathfrak{V}')$, où $\mathfrak{V}/\mathfrak{V}'$ est muni de la topologie quotient (qui est définie par une norme bien déterminée quand on a choisi la norme de $\mathfrak{V}$ et pris sur $\mathfrak{V}'$ la norme induite), est un espace formel appelé *espace formel quotient* de H par le sous-espace formel H'.

b) *PRODUIT*. Si $H_1 = (V_1, \mathfrak{V}_1)$, $H_2 = (V_2, \mathfrak{V}_2)$ sont deux espaces formels, on vérifie aisément que $(V_1 \times V_2, \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2)$ où $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ est muni de la topologie produit, est un espace formel, noté $H_1 \times H_2$ et appelé *produit* de H_1 et H_2.

Si on a choisi une norme définissant la topologie de $\mathfrak{V}_1$ et de $\mathfrak{V}_2$, on prendra sur $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ la norme définie par:

$$\|(x_1, x_2)\| = \sup(\|x_1\|, \|x_2\|).$$

c) *PRODUIT TENSORIEL*. On vérifie également qu'on obtient encore un espace formel, noté $H_1 \otimes H_2$, et appelé *produit tensoriel* de H_1 et H_2, en formant $(V_1 \bar{\otimes} V_2, \mathfrak{V}_1 \hat{\otimes} \mathfrak{V}_2)$, où $\mathfrak{V}_1 \hat{\otimes} \mathfrak{V}_2$ est le produit tensoriel topologique (projectif) complété (cf. Grothendieck [1]) de $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ sur le corps $K((t))$, qui est muni d'une norme naturelle pour chaque choix de la norme de $\mathfrak{V}_1$ et de $\mathfrak{V}_2$, et où $V_1 \bar{\otimes} V_2$ dési-gne, par abus de notation, le K-sous-espace du précédent, fermeture du produit tensoriel de V_1 et V_2 (sur le corps K) considéré comme plongé dans $\mathfrak{V}_1 \hat{\otimes} \mathfrak{V}_2$.

Ceci s'étend à un *nombre fini* d'espaces formels, avec les propriétés habituelles d'associativité.

d) *ESPACE FORMEL* $\mathfrak{L}(H_1, H_2)$. L'ensemble des morphismes de H_1 dans H_2 s'identifie à l'espace des applications $K((t))$-linéaires continues $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{V}_1$ dans $\mathfrak{V}_2$ telles que : $\mathfrak{F}(V_1) \subset V_2$, espace que l'on convient de noter abusivement $L(V_1, V_2)$

$L(V_1, V_2)$ est un K-sous-espace fermé du $K((t))$-espace $\mathfrak{L}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ formé de *toutes* les applications $K((t))$-linéaires continues de $\mathfrak{V}_1$ dans $\mathfrak{V}_2$, lequel est muni d'une *norme* naturelle pour chaque choix des normes de $\mathfrak{V}_1$ et de $\mathfrak{V}_2$, et est complet pour cette norme.

Conformément à la remarque qui suit la définition 1.1, ceci définit canonique-ment un espace formel, noté $\mathfrak{L}(H_1, H_2)$ et appelé *espace des morphismes (linéaires formels) de* H_1 *dans* H_2.

e) *MORPHISMES MULTILINEAIRES*. Soit $H_3 = (V_3, \mathfrak{V}_3)$ un nouvel espace formel. Un *morphisme bilinéaire (formel)* de $H_1 \times H_2$ dans H_3 est un couple $(F, \mathfrak{F})$, où F est une application K-bilinéaire de $V_1 \times V_2$ dans V_3, et $\mathfrak{F}$ une application $K((t))$-bilinéaire continue de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ dans $\mathfrak{V}_3$ prolongeant F.

De façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe *d)*, on peut identifierles morphismes bilinéaires aux applications $K((t))$-bilinéaires continues $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ dans $\mathfrak{V}_3$ telles que $\mathfrak{F}(V_1 \times V_2) \subset V_3$, lesquelles forment un K-sous-espace fermé, noté abusivement $L(V_1, V_2; V_3)$ de l'espace $\mathfrak{L}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2; \mathfrak{V}_3)$ de toutes les applica-tions bilinéaires continues de $\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$ dans $\mathfrak{V}_3$; celui-ci est normable complet et la remarque qui suit la définition 1.1 permet de définir un espace formel noté $\mathfrak{L}(H_1, H_2; H_3)$

et appelé *espace formel des morphismes bilinéaires de* $H_1 \times H_2$ *dans* H_3.

En particulier, prenant $H_1 = H_2$, on définit $\mathfrak{L}_2(H_1, H_3) = \mathfrak{L}(H_1, H_1 ; H_3)$.

Si $(F, \mathfrak{F})$ est un morphisme bilinéaire de $H_1 \times H_1$ dans H_3 et si $\mathfrak{F}$ est une application bilinéaire continue symétrique, on dira que $(F, \mathfrak{F})$ est un *morphisme bi-linéaire symétrique*, L'ensemble de ceux-ci s'identifie à un sous-espace fermé, noté abusivement $SL_2(V_1, V_3)$, de $L_2(V_1, V_3) = L(V_1, V_2 ; V_3)$ défini ci-dessus, ce qui, conformément au paragraphe a), définit un *sous-espace formel de* $\mathfrak{L}_2(H_1 ; H_3)$, qu'on notera $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_2(H_1, H_3)$ et qu'on appellera *espace formel des morphismes bilinéaires symétriques de* H_1 *dans* H_3.

Il résulte facilement des définitions et de [1] que $\mathfrak{L}(H_1, H_2 ; \hat{H_3})$ est *canoniquement isomorphe à* $\mathfrak{L}(H_1 \otimes H_2, H_3)$. (Il y a même conservation des normes naturelles quand les normes de H_1, H_2, H_3 sont choisies).

Ce qui précède s'étend à un *nombre fini* d'espaces formels avec les propriétés habituelles d'associativité.

Avant d'introduire les notions de morphismes polynomiaux et analytiques, nous allons, comme il a été annoncé, introduire la sous-catégorie dite des (F)-espaces en considérant d'abord un exemple fondamental d'espaces formels:

3. Les espaces formels $\mathbf{H}_p^s$.

Posons $K_o = K$ et, pour $p \geq 1$, soit $K_p = K[[X_1, \ldots, X_p]]$ l'espace des séries formelles à p indéterminées à coefficients dans K.

Tout élément du $K((t))$-espace vectoriel $K((t)) \underset{K}{\otimes} K_p$ (obtenu par extension du corps de base) peut être canoniquement identifié à une certaine série formelle en $X_1, \ldots, X_p, t$ (des exposants négatifs en nombre fini étant admis pour t).

On définit sur cet espace une *norme* en posant $\|x\| = 2^{-w(x)}$, où $w(x)$ est l'ordre *total* en $X_1, \ldots, X_p, t$ de la série qui représente x.

Soit $\mathfrak{K}_p$ le *complété* de l'espace précédent. En identifiant K_p à $1 \otimes K_p$ dans $K((t)) \otimes K_p$, on obtient un espace formel noté $H_p = (K_p, \mathfrak{K}_p)$.

Pour s entier ≥ 1, H_p^s sera le produit de s espaces formels identiques à H_p : $H_p^s = (K_p^s, \mathfrak{K}_p^s)$. Notons que $\mathfrak{K}_p^s$ possède une norme bien définie.

On convient de poser $H_o^o = (0, 0)$. H_p^s n'est pas défini pour $s = 0$ et $p > 0$.

On vérifie aisément les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 3.1. $\mathfrak{K}_p$ *s'identifie à l'espace des séries formelles en* t *de la forme* $x = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} t^q a_q$, *avec* $a_q \in K_p$ *et (en notant* $w(a_q)$ *l'ordre total de la série* a_q) $\inf_q (w(a_q) + q) = N > -\infty$; *on a alors* $\|x\| = 2^{-N}$

En particulier $H_o = (K, K((t)))$ et $H_o^s = (K^s, K^s((t)))$; K^s est muni de la topologie discrète.

PROPOSITION 3.2. *Notons* $\mathfrak{B}_p^s(r)$ *la boule de rayon* 2^{-r} *dans* $\mathfrak{K}_p^s$ *et* $B_p^s(r)$ *sa trace dans* K_p^s. *Celle-ci est un* K*-sous-espace de co-dimension finie* $\varphi_p^s(r)$, *égale à* 0 *pour* $r \leq 0$ *et, pour* r *entier* >0, *à:* $s\,(p!)^{-1}\, r\,(r+1)\ldots(r+p-1)$.

On a en outre le critère suivant:

PROPOSITION 3.3. *Si* $(F, \mathfrak{F})$ *est un morphisme de* H_p^s *dans* $H_{p'}^{s'}$ *il existe* k *tel que:*

$$F(B_p^s(r)) \subset B_{p'}^{s'}(r-k) \text{ pour tout } r$$

Inversement, si une application K*-linéaire* F *de* K_p^s *dans* $K_{p'}^{s'}$ *vérifie la condi-tion précédente, il existe une application* $\mathfrak{F}$ *de* $\mathfrak{K}_p^s$ *dans* $\mathfrak{K}_{p'}^{s'}$ *et une seule telle que* $(F, \mathfrak{F})$ *soit un morphisme.*

La première partie découle de la condition de continuité des applications linéai-res d'espaces normés.

Pour la deuxième partie, on vérifie, grâce à la proposition 1, que l'unique prolongement $\overline{F}$ de F au $K((t))$-sous-espace Z engendré par K_p^s remplit la condition $\overline{F}(\mathfrak{B}_p^s(r) \cap Z) \subset \mathfrak{B}_{p'}^{s'}(r-k)$, donc est continu et par suite admet un prolongement continu unique à $\mathfrak{B}_p^s$.

Des propositions 2 et 3 résulte facilement le:

THEOREME 3.1. *Pour que* H_p^s *et* $H_{p'}^{s'}$ *soient isomorphes, il faut (et il suffit) que* $s = s'$, $p = p'$.

D'autre part:

THEOREME 3.2. *Pour* $p' < p$ *(et donc* $s > 0$*),* H_p^s *et* $H_p^s \times H_{p'}^{s'}$ *sont (non canonique-ment) isomorphes.*

En effet tout élément d'un des espaces K_p^s, $K_p^s \times K_{p'}^{s'}$ s'écrit d'une seule façon comme une combinaison linéaire formelle (infinie) de termes dont les composantes sont des monomes $X_i^{n_i}$. On range ces termes en une suite de façon que le degré de la compo-sante de plus haut degré prenne successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots$ Alors il y a une bijection K-linéaire et une seule F de K_p^s sur $K_p^s \times K_{p'}^{s'}$ qui fasse correspondre les termes de même rang. On montre, grâce aux propositions 1, 2 et 3, qu'elle se prolonge en une application bicontinue de $\mathfrak{K}_p^s$ sur $\mathfrak{K}_p^s \times \mathfrak{K}_{p'}^{s'}$.

Signalons, sans expliciter la vérification, le:

THEOREME 3.3. $H_p^s \otimes H_{p'}^{s'}$ *est canoniquement isomorphe à* $H_{p+p'}^{ss'}$

(Il y a même conservation des normes naturelles).

Nous sommes maintenant à même de définir:

4. La catégorie des (F)-espaces.

DEFINITION 4.1. *Un espace formel H est dit un (F)-espace s'il existe un couple d'entiers ≥ 0 (s, p) $(p = 0$ si $s = 0)$ et un isomorphisme de H sur l'espace formel H^s_p.*

Un morphisme d'un (F)-espace dans un (F)-espace sera dit un *(F)-morphisme*.

Le couple (s, p), *unique* d'après le théorème 3.2, est appelé *dimension* de H. Il détermine H à un isomorphisme près.

Les (F)-espaces et les (F)-morphismes forment une *sous-catégorie* de la catégorie des espaces formels.

Les résultats du paragraphe précédent fournissent le critère suivant:

PROPOSITION 4.1. *Un espace formel $(V, \mathfrak{V})$ est un (F)-espace si et seulement si on peut choisir la norme définissant la topologie de $\mathfrak{V}$ de façon que les conditions suivantes soient remplies:*

a) la norme d'une somme finie $\sum t^n a_n$, avec $a_n \in V$, est égale à $\sup_n 2^{-n} \| a_n \|$;

b) la trace B_r sur V de la boule de rayon 2^{-r} est un K-sous-espace de co-di--mension finie $\varphi(r)$;

c) on a $\varphi(r) = 0$ pour r suffisamment petit, et, pour r suffisamment grand, il existe un nombre k et des entiers ≥ 0 s et p tels que:

$$s(p!)^{-1}(r-k)^p \leq \varphi(r) \leq s(p!)^{-1}(r+k)^p;$$

la dimension de l'espace est alors (s, p).

On observera que, grâce à *a)*, la norme sur $\mathfrak{V}$ est connue quand on connaît sa restriction à V.

REMARQUE. La définition donnée par Kuranishi ne suppose pas s et p entiers, ce qui reviendrait à considérer une sous-catégorie un peu plus large, mais seul le cas où s et p sont entiers intervient dans les applications.

D'autre part, il inclut dans la structure de (F)-espace certaines données supplé--mentaires, mais celles-ce ne jouent qu'un rôle auxiliaire, et seule la structure d'espace formel, telle que nous l'avons définie, est invariante par les isomorphismes.

De la proposition 3.1, on déduit que $\mathfrak{V}$ *s'identifie canoniquement à l'espace des séries formelles en t de la forme $x = \sum t^q a_q$* avec $a_q \in V$ *et* $\sup_q 2^{-q} \| a_q \| < \infty$ (pour un choix quelconque de la norme). On peut choisir la norme de façon que $\| x \| = \sup_q 2^{-q} \| a_q \|$

En particulier le K-sous-espace formé des séries pour lesquelles $q \geq 1$ est noté ${}^cV$.

DEFINITION 4.2. *${}^cV$ est appelé espace des courbes formelles à valeurs dans V.*

Si $(F, \mathfrak{F})$ est un (F)-morphisme de $(V, \mathfrak{V})$ dans $(V', \mathfrak{V}')$, $\mathfrak{F}$ induit une application K-linéaire notée ${}^cF$ de ${}^cV$ dans ${}^cV'$.

Enfin les théorèmes 3.2 et 3.3 entraînent le:

THEOREME 4.1. *Si H, H' sont deux (F)-espaces de dimensions respectives (s, p), (s', p') leur produit est encore un (F)-espace, de dimension (s, p) si $p' < p$ (et donc $s > 0$) et de dimension $(s + s', p)$ si $p' = p$.*

Leur produit tensoriel $H \otimes H'$ est un (F)-espace, de dimension $(ss', p + p')$.

On notera, par contre, que $\mathfrak{L}(H, H')$, que nous avons défini en tant qu'espace formel, *n'est pas un (F)-espace*. Ceci n'est qu'une des raisons pour lesquelles il est avantageux de considérer la catégorie des espaces formels.

REMARQUE. On peut montrer que, si H et H' sont des (F)- espaces, on a exactement $\mathfrak{L}(H, H') = (L(V, V'), \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'))$ (cf. paragraphe 2.d.).

Le théorème 1 permet de parler de *(F)-morphismes multilinéaires* et de (F)--morphismes multilinéaires *symétriques*.

A partir de maintenant, il va nous suffire la plupart du temps, comme il a été annoncé, de nous placer dans la catégorie des *espaces vectoriels topologiques normables complets sur un corps valué complet non discret L, que nous fixerons une fois pour toutes.*

DEFINITION 4.3. *Un tel espace sera appelé brièvement un (B)-espace.*

Ce qui sera dit s'appliquera aux espaces formels et aux *(F)-espaces* en prenant $L = K((t))$ et en s'assurant de la conservation des K-sous-espaces distingués intervenant dans la définition des espaces formels, ce qui sera dans la plupart des cas immédiat et le plus souvent omis.

Les résultats obtenus rendront compte à la fois des résultats énoncés dans les paragraphes 1, 2, 3 du chapitre I de [3] et des résultats classiques pour les espaces de dimension finie sur le corps des réels ou des complexes.

5. Polynomes.

Dans ce paragraphe et le suivant, il est indispensable de rappeler et préciser quelques notions plus ou moins classiques (voir par exemple Hille and Phillips [2]; nous n'utilisons que des résultats qui ne font pas intervenir les propriétés particulières du corps des complexes).

a) GENERALITES. Soient E, F deux (B)-espaces (voir définition 4.3) et $\bar{P}m$ une application m-linéaire *symétrique* continue (ce dernier mot sera le plus souvent sous-entendu) de E^m dans F.

L'application P_m de E dans F définie par $P_m(x) = \bar{P}_m(x, \dots, x)$ sera dite *polynôme m-homogène* (continu) de E dans F.

On sait (cf. [2]) que la correspondance entre P_m et $\bar{P}_m$ est *biunivoque*, $\bar{P}_m$ étant la *forme polaire* de P_m.

L'espace de ces polynomes est encore un *(B)-espace*, que l'on notera $\Pi_m(E, F)$, qui est *canoniquement isomorphe* à l'espace $\mathfrak{SL}_m(E, F)$ des applications m-linéaires symétriques(continues) de E dans F.

Si l'on a choisi une norme sur E et F, l'espace $\Pi_m(E, F)$ (resp. $\mathfrak{SL}_m(E, F)$) sera muni de la *norme* $\|P_m\|$ (resp. $\|\bar{P}_m\|$) définie comme le plus petit a tel que: $\|P_m(x)\| \leq a \|x\|^m$ (resp. $\|\bar{P}_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| \leq a \|x_1\| \, \|x_2\| \cdots \|x_m\|$).

On peut montrer que l'on a:

$$\|P_m\| \leq \|\bar{P}_m\| \leq (2m)^m (m!)^{-1} \|P_m\|$$

et en déduire qu'il existe une constante k (indépendante de P_m et de m) telle que:

$$(1) \qquad \|P_m\| \leq \|\bar{P}_m\| \leq k^m \|P_m\|.$$

Si l'on définit ensuite un *polynome* (continu) comme une somme finie de polyno-mes homogènes, on sait (cf. [2]) qu'on peut caractériser un polynome par la:

PROPOSITION 5.1. *Une application (continue) P de E dans F est un polynome (continu) si et seulement si, pour tout x et tout y de E, et pour tout scalaire $\lambda \in L$, on a: $P(x + \lambda y) = \sum_{i \geq 0} P_i(x, y) \lambda^i$, où les $P_i(x, y)$ sont des fonctions de x et y seuls, nulles sauf pour un nombre fini d'indices i.*

Pour que P soit un polynome m-homogène, il faut et suffit qu'en outre : $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in L$.

On en déduit que la décomposition d'un polynome en somme de polynomes homogènes est *unique* et que le *composé* de deux polynomes est un polynome.

b) POLYNOMES SUR UN ESPACE PRODUIT. Si $P(x, y)$ est un polynome défini sur un espace produit $E \times E'$, c'est un polynome en x (resp. y) pour chaque valeur fixée de y (resp. x).

En outre P s'écrit d'une manière unique sous forme d'une somme finie $\sum Ppq(x, y)$ où Ppq est un polynome $(p+q)$-homogène en x, y et en outre p (resp. q)-homogène en x (resp. y) pour chaque valeur fixée de y (resp. x). On dira que Ppq est *(p, q)-homogène en (x, x). Ceci s'étend au cas où* E est un produit fini $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$.

c) MORPHISMES POLYNOMIAUX. Conformément au schéma annoncé, ces défi-nitions s'étendent aux espaces formels (resp. (F)-espaces):

Soient $H = (V, \mathfrak{B})$, $H' = (V', \mathfrak{B}')$ deux espaces formels (resp. (F)-espaces), $(\bar{P}_m, \bar{\mathfrak{P}}_m)$ un morphisme m-linéaire symétrique de H^m *dans* H' (cf. paragraphe 2.e)), P_m et $\mathfrak{P}_m$ les polynomes m-homogènes déduits de $\bar{P}_m$ et $\bar{\mathfrak{P}}_m$ (ce dernier continu). On pose la:

DEFINITION 5.1. *On dit que le couple $(P_m, \mathfrak{P}_m)$ est un morphisme polynomial* *(resp. (F)-polynome) m-homogène de H dans H'.*

On a $P_m(V) \subset V'$ et, pour le cas des *(F)-espaces*, $P_m({}^cV) \subset {}^cV'$.

En procédant comme au paragraphe 2, on définit l'espace formel des morphismes polynomiaux m-homogènes de H dans H', noté $\Pi_m(H, H')$; il est *canoniquement isomorphe* à l'espace formel qu'on a appelé $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_m(H, H')$ (mais ce ne sont pas des (F)-espaces)

d) DIFFERENTIELLES. On revient aux (B)-espaces.

Tout polynome m-homogène P_m de E dans F est différentiable au sens des espaces normés. On a :

$$D\,P_m(x,h) = \lim_{\substack{\lambda \in L, \lambda \neq 0 \\ \lambda \to 0}} \lambda^{-1}(P_m(x+\lambda h) - P_m(x))$$

$$= m\,\bar{P}_m(x, \dots, x, h).$$

Pour $m = 1$, on a : $D\,P_1(x,h) = P_1(h)$ et, pour $m \geq 2$ (une norme étant choisie dans E et F) :

$$\|h\|^{-1}\,\|P_m(x+h) - P_m(x) - D\,P_m(x,h)\| \leq 2^m\,\|h\|\,\|\bar{P}_m\|\,\|(x,h)\|^{m-2},$$

quantité qui tend vers 0, uniformément (en x) dans toute boule centrée à l'origine quand $h \to 0$, $h \neq 0$.

$D\,P_m(x,h)$ est un polynome $(m\text{-}1, 1)$-homogène de $E \times E$ dans F (cf. b)) Sa norme vérifie :

$$\|D\,P_m\| \leq m\,\|\bar{P}_m\|$$

L'application $h \to D\,P_m(x,h)$ est une application linéaire continue de E dans F, que l'on notera $\Delta\,P_m(x)$. On a donc :

(1) $$D\,P_m(x,h) = (\Delta\,P_m(x)) \bullet h = m\,\bar{P}_m(x, \dots, x, h).$$

On notera en particulier l'identité :

(2) $$D\,P_m(x,x) = (\Delta\,P_m(x)) \bullet x = m\,P_m(x).$$

L'application $x \to \Delta\,P_m(x)$ de E *dans* $\mathfrak{L}(E,F)$ est un *polynome $(m-1)$-homogène continu*, de norme :

(3) $$\|\Delta\,P_m\| = m\,\|\bar{P}_m\|$$

Pour $m = 1$, $\Delta\,P_1(x) = P_1$ (constante)

On va voir que le polynome $(m\text{-}1)$-homogène $\Delta\,P_m$ de E dans $\mathfrak{L}(E,F)$ *n'est pas quelconque* et le *caractériser*.

Nous aurons besoin de savoir que $\mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}_n(E,F))$ *s'identifie canoniquement* à $\mathfrak{L}_{n+1}(E,F)$ (avec conservation des normes), comme on le vérifie aisément.

e) DIFFERENTIELLES D'ORDRES SUPERIEURS. On définit par récurrence:

$$D^{n+1} P_m (x; h_1, \dots, h_{n+1}) = D(D^n P_m)((x; h_1, \dots, h_n), (h_{n+1}; 0, \dots, 0)),$$

et
$$\Delta^{n+1} P_m = \Delta(\Delta^n P_m).$$

D'après ce qu'on vient de dire, on peut *identifier* $\Delta^n P_m(x)$ *à un élément de* $\mathfrak{L}_n(E, F)$ (pour chaque x) et $\Delta^n P_m$ à un polynome $(m-n)$-homogène *de* E dans $\mathfrak{L}_n(E, F)$.

On peut alors écrire identiquement:

$$(\Delta^n P_m(x)) \bullet (h_1, \dots, h_n) = D^n P_m(x; h_1, \dots, h_n).$$

Or on trouve facilement:

(4) $$D^n P_m(x; h_1, \dots, h_n) = \frac{m!}{(m-n)!} \bar{P}_m(x, \dots, x, h_1, \dots, h_n)$$

pour $n \leq m$ et $D^n P_m = 0$ pour $n > m$. En particulier:

(5) $$D^m P_m(x) = m! \, \bar{P}_m \text{ pour tout } x \text{ (constante)}.$$

Ceci montre que $D^n P_m$ est *symètrique* par rapport aux h_1, autrement dit: la fonction $x \to \Delta^n P_m(x)$ *est à valeurs dans* $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_n(E, F)$.

En particulier $\Delta^2 P(x)$ s'identifie à une application bilinéaire *symétrique* de E dans F pour chaque x.

Ce résultat admet la réciproque suivante:

THEOREME 5.1. *Soit L un polynome $(m-1)$-homogène (continu) de E dans $\mathfrak{L}(E, F)$ tel que, pour tout x, on ait, en identifiant $\Delta L(x)$ à un élément de $\mathfrak{L}_2(E, F)$:*

$$(\Delta L(x)) \bullet (x, h) = (\Delta L(x)) \bullet (h, x)$$

(condition toujours vérifiée si $m = 1$ ou si $\Delta L(x)$ est un élément de $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_2(E, F)$). Alors il existe un polynome m-homogène (continu) unique P_m tel que $L = \Delta P_m$, et l'on a: $P_m(x) = m^{-1}(L(x)) \bullet x$.

En effet: $\Delta P_m(x) \bullet h = D P_m(x, h) = m P_m(x, \dots, x, h)$ et, en posant $\varphi(x) = m^{-1}(L(x)) \bullet x$.

$$\Delta \varphi(x) \bullet h = D \varphi(x, h) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-1}(\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x)) =$$

$$= m^{-1}((\Delta L(x) \bullet h) \bullet x + L(x) \bullet h) = m^{-1}((\Delta L(x) \bullet x) \bullet h + L(x) \bullet h) =$$

$$= m^{-1}((m-1) L(x) \bullet h + L(x) \bullet h) = L(x) \bullet h$$

(on a utilisé l'identité (2) et le fait que L est supposé $(m-1)$-homogène).

Il est immédiat d'adapter ce qui précède aux espaces formels. Si Φ_m est un morphisme polynomial (resp. (F)-polynome) m-homogène de H dans H', $D \Phi_m$ sera un morphisme polynomial (resp. (F)-polynome) $(m-1, 1)$-homogène de $H \times H$ dans H'.

$\Delta \Phi_m$ sera un morphisme polynomial $(m-1)$ homogène de H dans $\mathfrak{L}(H,H')$ (mais non un (F)-polynome puisque $\mathfrak{L}(H,H')$ n'est pas un (F)-espace).

6. Germes analytiques.

Soient de nouveau E, F deux (B)-espaces (en fait, il suffirait que F soit complet et non E), dans lesquels on a *choisi une norme*, qui n'interviendra en réalité qu' *à titre auxiliaire*.

On convient de noter $P = \sum_{m \geq 1} P_m$ une famille $(P_m)_{m \geq 1}$ de polynomes P_m m--homogènes (continus) de E dans F.

On notera P^m *le polynome* $\sum_{i=1}^{m} P_i$.

L'espace de ces familles est muni de façon évidente d'une structure vectorielle.

DEFINITION 6.1. *On appelle série associée à* $P = \sum P_m$ *la série formelle en* t *à coefficients réels positifs* $|P|(t) = \sum_{m \geq 1} \| P_m \| t^m$.

On définit dans l'ensemble des séries formelles en t à coefficients réels une *relation de préordre* filtrante décroissante notée $\prec$ en posant $\sum a_m t^m \prec \sum b_m t^m$ *s'il existe une constante* k *telle que* $|a_m| \leq k^m |b_m|$ $(m \geq 0)$.

La relation $|P| \prec |Q|$ définit une relation de préordre filtrante décroissante entre $P = \sum P_m$ et $Q = \sum Q_m$.

On dira que Q *majore* P.

Cela équivaut à l'existence d'un k tel que $\| \overline{P}_m \| \leq k^m \| \overline{Q}_m \|$, ou d'un k' tel que $\| P_m \| \leq k'^m \| \overline{Q}_m \|$. Cette notion *ne dépend pas du choix des normes* dans E et dans F.

On a facilement:

$$|\lambda P| = |\lambda| \; |P| \prec |P| \text{ pour tout scalaire } \lambda$$

et
$$|P + Q| \prec \sup(|P|, |Q|)$$

Si $|P| \prec |Q|$ et $|Q| \prec |P|$, on écrira $|P| \sim |Q|$

THEOREME 6.1: *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) la famille $P_m(x)$ *est uniformément sommable dans un voisinage de* 0;

b) la famille $\| P_m(x) \|$ *est uniformément sommable dans un voisinage de* 0;

c) les $\| P_m(x) \|$ *sont uniformément (en* m *et* x*) bornés dans un voisinage de* 0

d) la série associée $|P|$ *est convergente;*

e) $\sup_m \| P_m \|^{\frac{1}{m}} < \infty$;

f) $\sup_m \| \overline{P}_m \|^{\frac{1}{m}} < \infty$.

$b \Rightarrow a$ et $a \Rightarrow c$ découlent du critère de Cauchy. $c \Rightarrow b$ n'est autre que le lemme d'Abel, sous une forme généralisée. $c \Leftrightarrow e$ résulte de la définition de la norme. $e \Leftrightarrow f$

résulte de la formule 5.a).(1). $f \Leftrightarrow d$ est classique.

DEFINITION 6.2. *Si la famille* $P = \Sigma P_m$ *vérifie les propriétés équivalentes qui précè--dent, on dit que* P *est un germe analytique de* E *dans* F.

Pour que P *soit un germe analytique, il faut et suffit qu'il existe un germe analytique* Q *tel que* Q *majore* P.

REMARQUES 1) D'après a), la somme de la série $\Sigma P_m(x)$ est une *fonction* continue définie dans un voisinage de 0, nulle à l'origine.

Nous verrons au paragraphe suivant que le *germe* de cette fonction dépend *biunivoquement de* P, ce qui justifie la terminologie. Ceci sera d'ailleurs directement évident pour les (F)-morphismes analytiques, que nous allons définir.

Anticipant sur ce résultat pour éviter des complications inutiles de langage et d'écriture, nous *identifierons* dès maintenant P avec le germe de fonction défini par P. En outre il sera commode d'utiliser des *notations fonctionnelles* telles que $x \to P(x)$, étant sous-entendu que ceci vaut pour un *représentant* du germe de fonction défini par P, et dans un voisinage de 0.

2) Si les P_m sont définis sur un *produit* $E \times E'$, $p_m(x) = P_m(x, o)$ est un polynome m-homogène de E dans F et il est immédiat que Σp_m est un *germe analytique* de E dans F, car $\| p_m \| \leq \| P_m \|$. Conformément à la remarque 1), on le notera $x \to P(x, o)$.

3) Sous la forme a), on voit que la propriété pour P de définir un germe analytique s'exprime à l'aide de la seule structure d'espaces vectoriels *topologiques* de E et F et *ne fait pas intervenir le choix de la norme* qui définit la topologie.

On peut donc poser parallèlement la :

DEFINITION 6.3. *Soient* $H = (V, \mathfrak{V})$, $H' = (V', \mathfrak{V}')$ *deux espaces formels (resp.* (F)*-espaces) et, pour chaque* $m \geq 1$, $(P_m \mathfrak{P}_m)$ *un morphisme polynomial (resp.* (F)*--polynome)* m*-homogène de* H *dans* H'.

On dira que la famille $(P_m, \mathfrak{P}_m)$ est un *morphisme analytique (formel)* (resp. (F)*-morphisme analytique)* de H dans H' si $\Sigma \mathfrak{P}_m$ est un germe analytique de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'$. On le note $(P, \mathfrak{P}) = (\Sigma P_m, \Sigma \mathfrak{P}_m)$.

La notion de (F)-morphisme analytique est équivalente à celle d' "application analytique formelle infinie" de [3].

Si $\mathfrak{P}$ converge dans un voisinage Ω de 0, P converge dans $\Omega \cap V$ et l'on a $P(V) \subset V'$.

Ω dépend bien entendu de $\mathfrak{P}$. Toutefois, dans le cas des (F)-espaces, on a la :

PROPOSITION 6.1. *Si* $(P, \mathfrak{P})$ *est un* (F)*-morphisme analytique de* $(V, \mathfrak{V})$ *dans* $(V', \mathfrak{V}')$, P *converge en tout point de* ${}^cV$ *et définit une application* ${}^cP$ *de* ${}^cV$ *dans* ${}^cV'$

(voir définition 4.2).

Il suffit d'observer que, en notant V_o(resp. V'_o) le K-sous-espace des séries $\Sigma a_n t^n$ avec $n \geq 0$ et $a_n \in V$ (resp. $a_n \in V'$), on a: ${}^cV = t\, V_o$ et, pour tout m, $P_m({}^cV) \subset t^m\, V'_o$, et que V'_o est borné et V' complet.

La considération de ${}^cV$ permet donc d'interpréter un (F)-morphisme à l'aide d'une *application définie dans un ensemble fixe*.

En appliquant ${}^cP$ au K-sous-espace $t \cdot V$, on voit que la connaissance de ${}^cP$ détermine de façon unique les P_m et par suite les $\mathfrak{P}_m$, autrement dit, la correspondance entre ${}^cP$ et $(P, \mathfrak{P})$ est *biunivoque*.

REMARQUE. On a considéré jusqu'ici uniquement des germes analytiques $P = \Sigma\ P_m$ avec $m \geq 1$.

Si l'on rajoute un terme *constant* P_o:

DEFINITION 6.4. *On dira que* $P_o + P = \sum_{m \geq o} P_m$ *est un germe analytique au sens large.*

7. Différentielles.

Des résultats énoncés aux paragraphes 5.d) et e) concernant les polynomes homogènes, on déduit les résultats suivants:

Pour tout germe analytique $P = \Sigma\ P_m$, on posera $D\,P = \Sigma\ D\,P_m$.

$D\,P$ est un germe analytique de $E \times E$ dans F.

Il définit un germe de fonction qui est *caractérisé* par:

$$D\,P(x,h) = \lim_{\substack{\lambda \to o \\ \lambda \neq o}} \lambda^{-1}(P(x+\lambda h) - P(x))$$

En outre, la quantité $\|h\|^{-1}\,\|P(x+\lambda h) - P(x) - D\,P(x,h)\|$ tend vers 0 uniformément dans un voisinage de 0 quand $h \to 0$, $h \neq 0$.

Il en résulte que le germe de fonction défini par $D\,P$ est la différentielle au sens des espaces normés du germe de fonction défini par P.

$\Delta\,P = \sum_{m \geq o} \Delta\,P_{m+1}$ est un germe analytique au sens large (voir définition 6.4) de E dans $\mathfrak{L}(E,F)$ et l'on a $\Delta\,P(x) \bullet h = D\,P(x,h)$ (dans un voisinage de 0). On prendra garde que $\Delta\,P_{m+1}$ est m-homogène; on pourra écrire $\Delta_{(m)}\,P_{m+1}$ pour éviter toute ambiguïté.

Le terme constant de $\Delta\,P$ est $\Delta\,P(0) = P_1$.

On a en particulier l'identité remarquable:

$$D\,P(x,x) = \Delta\,P(x) \bullet x = \Sigma m\,P_m(x). \tag{1}$$

Plus généralement $\Delta^n\,P = \sum_{m \geq o} \Delta^n\,P_{m+n}$ s'identifie à un germe analytique de E dans $\mathfrak{L}_n(E,F)$ et, mieux, à un germe analytique de E dans $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_n(E,F)$, La formule 5. e) (5) fournit le terme constant de $\Delta^n P$:

(2) $$\Delta^n P(0) = n!\ \bar{P}_n \quad (\textit{formule de Taylor}).$$

Comme le germe de fonction défini par $\Delta^n P$ ne dépend que du germe de fonction défini par P, on obtient le résultat précédemment annoncé :

THEOREME 7.1 : *Le germe de fonction défini par un germe analytique dépend biunivo-quement de ce dernier.*

Enfin le théorème 5.1 fournit le :

THEOREME 7.2 : *Soit L un germe analytique au sens large (voir définition 6.4) de E dans $\mathfrak{L}(E, F)$ tel que $(\Delta L(x) \bullet h) \bullet x = (\Delta L(x) \bullet x) \bullet h$ (au voisinage de 0).*

Alors il existe un germe analytique unique $P = \Sigma P_m$ de E dans F tel que $L = \Delta P$.

On a. $$P_m(x) = m^{-1} L_{m-1}(x) \bullet x.$$

Comme toujours, ces résultats ont leur contre-partie qu'il serait immédiat d'énoncer, dans le langage des espaces formels et des (F)-espaces.

8. Composition des germes analytiques.

Soient E, F, G trois (B)-espaces et $P = \Sigma P_m$, $Q = \Sigma Q_m$ $(m \geq 1)$ deux famil-les de polynomes m-homogènes.

DEFINITION 8.1 : *On appelle composé formel des familles P et Q et on note $Q \circ P$ la famille $H = \Sigma H_q$ définie par*

$$H_q = \sum_{n \geq 1,\ \sum_{i=1}^{n} m_i = q} H^n_{m_1 \dots m_n} \quad \textit{et} \quad H^n_{m_1 \dots m_n} = \bar{Q}_n \circ (P_{m_1}, \dots, P_{m_n})$$

(la somme qui définit H_q est finie puisque $m \geq 1$ d'où $n \geq q$).

PROPOSITION 8.1 : *On a :* $|Q \circ P| \prec |Q| \circ |P|$

En effet :

$$\| H_q \| \leq \sum_{\Sigma m_i = q} \| \bar{Q}_n \| \, \| P_{m_1} \| \dots \| P_{m_n} \| \leq \Sigma \| \bar{Q}_n \| \, \| \bar{P}_{m_1} \| \dots \| \bar{P}_{m_n} \| = (|Q| \circ |P|)_q.$$

REMARQUE : *Si* $|P| \prec |P'|$ *et* $|Q| \prec |Q'|$, *on a :* $|Q| \circ |P| \prec |Q'| \circ |P'|$.

Il en résulte la première partie du :

THEOREME 8.1 : *Si P et Q sont des germes analytiques, $Q \circ P$ est un germe analy-tique.*

En outre le germe de fonction défini par $Q \circ P$ est le composé (au sens fonction-nel) des germes de fonction définis par P et Q.

Pour démontrer la deuxième partie, plaçons-nous dans un voisinage V de 0 où le germe de fonction continue $Q \circ P$ soit défini (composé au sens fonctionnel). Pour $x \in V$, on a: $Q(P(x)) = \sum_{n \geq 1} Q_n(\lim_{m\to\infty} P^m(x)) = \sum_{n \geq 1} \lim_m Q_n(P^m(x))$ (car Q_n est continu) $= \sum_{n\geq 1} \lim_m \sum_{1 \leq m_i \leq m} H^n_{m_i \dots m_n}(x)$ avec les notations ci-dessus.

Comme la famille des $H^n_{m_1 \dots m_n}(x)$ est sommable, on peut grouper différem-ment les termes et écrire $\Sigma H_q(x)$.

Notons enfin la:

PROPOSITION 8.2: $$D(Q \circ P)(x,h) = D\,Q(P(x); D\,P(x,h))$$

$$\text{ou } \Delta(Q \circ P)(x) = (\Delta\, Q(P(x))) \circ (\Delta\, P(x))$$

Ici encore tout s'applique aussitôt aux espaces formels et aux (F)-espaces.

9. Germes analytiques dans des espaces produits.

Sopposons que $E = E_1 \times \dots \times E_p$. Nous allons étendre les résultats du paragra-phe 5.b).

Tout germe analytique $P = \Sigma P_m$ de E dans F s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{m_i \geq 0} P_{m_1 \dots m_p}$ où $P_{m_1 \dots m_p}$ est $(m_1, \dots, m_p)$-homogène, avec, bien entendu, $P_m = \sum_{\Sigma m_i = m} P_{m_1 \dots m_p}$.

(1) On a: $\| P_{m_1 \dots m_p} \| \leq \| P_m \| \leq \Sigma \| P_{m_1 \dots m_p} \| \leq m^p \| P_m \|$. (1).

Les $P_{m_1 \dots m_p}$ jouissent de propriétés analogues à celles énoncées dans le théorème 6.1 pour les P_m.

On associera à P la série formelle à p indéterminées à coefficients positifs:

$$|P|_{\times}(t_1, \dots, t_p) = \Sigma \| \bar{P}_{m_1 \dots m_p} \| \, t_1^{m_1} \dots t_p^{m_p},$$

la croix en indice du côté droit signifiant qu'on a tenu compte de la décomposition en produit de l'espace source.

Si $F = F_1 \times \dots \times F_q$, on posera $P_{(i)} = \pi_i \circ P$, où π_i est la $i^{ème}$ projection de F. $P_{(i)}$ est un germe analytique de E dans F:

On posera:

$$_{\times}|P|_{\times} = (|P_{(1)}|_{\times}, \dots, |P_{(q)}|_{\times}),$$

la croix en indice du côté gauche indiquant que l'on a aussi tenu compte de la décompo-position de l'espace but. $A = {}_{\times}|P|_{\times}$ est un germe de fonction analytique de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$, défini par des séries *à coefficients positifs* $A_{(i)} = \Sigma\, a^{(i)}_{m_1 \dots m_p} t_1^{m_1} \dots t_p^{m_p}$.

Dans l'ensemble de ces germes, on définira une *relation de préordre* notée $\prec$ en posant: $A \prec B$ s'il existe une constante k telle que $a^{(i)}_{m_1 \dots m_p} \leq k^{\Sigma m_j} b_{m_1 \dots m_p}$.

Avec ces définitions, les propriétés énoncées dans le théorème 6.1 sont encore équivalentes aux mêmes propriétés énoncées en remplaçant P_m par $P_{m_1 \cdots m_p}$, $|P|$ par $\underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}$ et, dans e) et f), l'exposant m par Σm_j.

REMARQUE : Les formules (1) font voir que:

(2) $$\left|\underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}\right| \sim |P|$$

(Le signe $\sim$ a été défini au paragraphe 6. Dans le premier membre, on a pris la série aosociée à $\underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}$ considéré comme germe analytique de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$).

On notera $\Delta_i P(x)$ la *restriction* à E_i de l'application linéaire $\Delta P(x)$ de E dans F, autrement dit: $\Delta_i P(x) \bullet h_i = D P(x; (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0))$ pour $h_i \in E_i$.

$\Delta_i P(x)$ est un germe analytique de E dans $\mathcal{L}(E_i, F)$.

Si Q est un germe analytique de F dans un (B)-espace $G = G_1 \times \ldots \times G_r$, on aura:

(3) $$\underset{\times}{|}Q \circ P\underset{\times}{|} < \underset{\times}{|}Q\underset{\times}{|} \circ \underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}.$$

Plus précisément, il sera utile d'observer que, si l'on pose $H = Q \circ P$, on a:

(4) $$\|H_{m_1 \cdots m_p}\| \leq (\underset{\times}{|}Q\underset{\times}{|} \circ \underset{\times}{|}P\underset{\times}{|})_{m_1 \cdots m_p}.$$

En outre, il est clair que le deuxième membre est une fonction croissante des coefficients des séries $\underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}$ et $\underset{\times}{|}Q\underset{\times}{|}$.

L'introduction des séries associées $|P|$ et $\underset{\times}{|}P\underset{\times}{|}$ va nous permettre de ramener au cas d'un nombre fini de variables numériques l'étude des fonctions implicites et des équations différentielles.

10. Fonctions implicites.

THEOREME 10.1. *Soit P un germe analytique de E dans E tel que $\Delta P(0) = I$ (identité).*

Alors il existe un germe analytique Q (et un seul) de E dans E tel que $Q \circ P = P \circ Q = I$.

Posons $f' = |P| - i$ (avec $i(t) = t$) (C'est une série à coefficients positifs avec $f'_1 = 0$) et $f = i - f' = \sum_{q \geq 1} f_q t^q$.

Comme $f_1 = 1$, on sait qu'il existe une série $g = \Sigma g_n t_n$ absolument convergen-te telle que $f \circ g = i$, ce qui s'écrit encore: $g = i + f' \circ g$.

Par identification, il vient:

$$g_1 = 1$$

et, pour $m \geq 1$: $g_m = \sum_{q=2}^{m} \sum_{\Sigma m_i = q} f'_q g_{m_1} \cdots g_{m_q}$, ce qui détermine g_m par récurrence puis-qu'au deuxième membre tous les m_i sont $< m$, et montre que g est *à coefficients positifs*.

Posons de même $P = I - P'$ ($P'_1 = 0$) de sorte que l'équation $P \circ Q = I$ devient: $Q = I + P' \circ Q$.

On a nécessairement, par identification :

$$Q_1 = I \text{ et, pour } m \geq 1, \; Q_m = \sum_{q=2}^{m} \sum_{\Sigma m_i = q} \bar{P}'_q(Q_{m_1}, \ldots, Q_{m_q}).$$

Comme les m_i sont $< m$, ceci détermine par récurrence, pour tout $m \geq 1$, un polynome m-homogène continu Q_m, ce qui assure déjà l'*unicité* de la solution.

En outre : $\| Q_m \| \leq \Sigma \; \Sigma \; \| \bar{P}'_q \| \, \| Q_{m_1} \| \ldots \| Q_{m_n} \|$.

On a : $\| Q_1 \| = 1 = g_1$ et si, pour $p < m$, on a $\| Q_p \| \leq g_p$, la formule précédente montre que $\| Q_m \| \leq \Sigma \; \Sigma \; f'_q \, g_{m_1} \ldots g_{m_q} = g_m$.

On a donc : $| \, Q \, | \prec g$.

Ceci montre que Q est un germe analytique et que $P \circ Q = I$.

Le même résultat appliqué à Q montre l'existence d'un germe analytique R tel que $Q \circ R = I$ et l'on a aussitôt $R = P$, ce qui achève la démonstration.

La formule qui a servi à déterminer Q_m montre que le résultat précédent vaut pour les espaces formels (resp. (F)-espaces).

Ce théorème s'étend aussitôt au cas où P est un germe analytique de E dans F tel que $\Delta P(0) = P_1$ soit bijectif (donc soit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques).

On passe ensuite au cas où il y a un paramètre:

THEORÈME 10.2. *Si P est un germe analytique de $\Lambda \times H$ dans H tel que $P_1(\lambda, x) = x$, il existe un (et un seul) germe analytique Q de $\Lambda \times H$ dans H tel que $P(\lambda, Q(\lambda, x)) = Q(\lambda, P(\lambda, x)) = x$.*

Il suffit d'appliquer le théorème précédent en définissant un germe analytique de $\Lambda \times H$ dans $\Lambda \times H$ par $\widetilde{P}(\lambda, x) = (\lambda, P(\lambda, x))$ (La partie linéaire de $\widetilde{P}$ est $\widetilde{P}_1(\lambda, x) = (\lambda, P_1(\lambda, x)) = (\lambda, x)$).

Plus généralement, il suffit que l'application $(\lambda, x) \to (\lambda, P_1(\lambda, x))$ soit *inversible*.

CAS PARTICULIER: La condition $P_1(\lambda, x) = x$ est notamment vérifiée si $P(\lambda, x)$ est linéaire en x et $P(0, x) = x$, d'où l'important:

COROLLAIRE : *Soit V un germe analytique de Λ dans $\mathfrak{L}(E, E)$. Alors il existe un germe analytique unique V' de Λ dans $\mathfrak{L}(E, E)$ tel que $(I + V) \bullet (I + V') = (I + V') \bullet (I + V) = I$, où I est l'application identique de E et où le point désigne la multiplication dans $\mathfrak{L}(E, E)$.*
(Autrement dit: $(I + V(\lambda)) \circ (I + V'(\lambda)) = (I + V'(\lambda)) \circ (I + V(\lambda)) = I$).

11. Equations différentielles avec paramètres.

THEOREME 11.1. *Soit $Z(y, \alpha, x)$ un germe analytique de $F \times \Lambda \times E$ dans F tel que*

(1) $$Z(y, \alpha, o) = 0$$

et $\Phi(\alpha)$ un germe analytique de Λ dans F.

Alors il existe un germe analytique unique P de $\Lambda \times E$ dans F tel que:

(2) $$D\,P(\alpha, x; o, x) = Z(P(\alpha, x), \alpha, x)$$

et (3) $$P(\alpha, o) = \Phi(\alpha).$$

(La condition (1) est évidemment nécessaire car le premier membre de (2) s'annule pour $x = 0$).

Identifiant les développements (p, q)-homogènes des deux membres de (2) et (3), il vient:

(4) $$P_{po}(\alpha, x) = P_p(\alpha, o) = \Phi_p(\alpha).$$

et, pour $q > 0$, en posant $P'(\alpha, x) = (P(\alpha, x), \alpha, x)$:

(5) $$q\,P_{pq} = \sum_{\substack{\Sigma p_i = p \\ \Sigma q_i = q}} \bar{Z}_r \circ (P'_{p_1 q_1}, \ldots, P'_{p_r q_r}).$$

Comme $Z_1(y, \alpha, x) = Z_1(o, o, x)$, le deuxième membre de (5) ne contient pas P_{pq}, et ne contient que des termes pour lesquels $p_i + q_i < p + q$.

Si l'on connaît tous les P_{mn} pour $m + n < p + q$, la formule (5) donne pour P_{pq} un polynome (p, q)-homogène unique si $q > 0$, et, si $q = 0$, c'est la formule (4).

Comme on a $P_{oo} = 0$, P_{pq} est déterminé de façon unique par récurrence, et donc aussi $P_m = \sum_{p+q=m} P_{pq}$, ce qui établit l'*unicité*.

Inversement, si $\Sigma P_m = P$ est un germe analytique, les formules (5) et (4) sont équivalentes à (2) et (3) et P est solution.

Pour établir l'analyticité de P, on va procéder de façon analogue à ce que l'on a fait au paragraphe 10, mais on devra utiliser des majorantes à plusieurs variables, telles qu'elles ont été définies au paragraphe 9.

Il est commode d'observer d'abord que, si l'on pose $\Phi'(\alpha) = (\Phi(\alpha), \alpha, o)$ et $Z'(y, \alpha, x) = (Z(y, \alpha, x), o, x)$, les formules (1) à (5) sont équivalentes à:

(1') $$Z'(y, \alpha, o) = 0$$

(2') $$D\,P'(\alpha, x, o, x) = Z'(P'(\alpha, x))$$

(3') $$P'(\alpha, o) = \Phi'(\alpha)$$

(4') $$P'_{po}(\alpha, x) = \Phi'_p(\alpha)$$

(5') $$q\,P'_{pq} = (Z' \circ P')_{pq}$$

Posons alors, avec les notations du paragraphe 9:

$$|Z|_{\times} = w, \qquad {}_{\times}|Z'|_{\times} = w', \qquad |\Phi|_{\times} = \varphi, \qquad {}_{\times}|\Phi'|_{\times} = \varphi',$$

et considérons l'équation différentielle à variables réelles (ou complexes):

$$\begin{cases} x \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, x) = w(f(\alpha, x), \alpha, x) \\ f(\alpha, o) = \varphi(\alpha) \end{cases}$$

Comme on a: $w(y, \alpha, o) = 0$, on peut écrire $w(y, \alpha, x) = x\, v(y, \alpha, x)$, où v est encore un germe analytique, ce qui ramène au système classique:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, x) = v(f(\alpha, x), \alpha, x) \\ f(\alpha, o) = \varphi(\alpha) \end{cases}$$

lequel, d'après la théorie classique, admet un germe de solution unique $f(\alpha, x)$.

Si l'on pose $f'(\alpha, x) = (f(\alpha, x), \alpha, x)$, f' est déterminé par les relations:

$$f'_{po} = \varphi'_p$$

et, pour $q > 0$: $q\, f'_{pq} = (w' \circ f')_{pq}$; en particulier f' est *à coefficients* $\geqslant 0$.

Or on a:

$$\| P'_{oo} \| = 0 = f'_{oo}, \quad \| P'_{po} \| = \| \varphi'_p \| = f'_{po}$$

et, pour $q > 0$, d'après la formule (5') et la formule 9.(4):

$q\, \| P'_{pq} \| \leqslant (w' \circ \underset{\times}{|}\, P' \underset{\times}{|})_{pq}$.

Supposons $q > 0$ et que, pour tous les m, n tels que $m + n < p + q$, on ait $\| P'_{mn} \| \leq f'_{mn}$. Alors $q\, \| P'_{pq} \| \leqslant (w' \circ f')_{pq} = q\, f'_{pq}$, ce qui établit par récurrence que $\underset{\times}{|}\, P' \underset{\times}{|} \prec f'$ et achève la démonstration.

Si l'on considère maintenant un accroissement quelconque de la variable, il va s'introduire une *condition d'intégrabilité* provenant de la condition de symétrie vérifiée par les différentielles:

THEOREME 11.2. *Soit* $L(y, \alpha, x)$ *un germe analytique au sens large* (cf définition 6.4) *de* $F \times \Lambda \times E$ *dans* $\mathfrak{L}(E, F)$, *et soit* Φ *un germe analytique de* Λ *dans* F.

Posons $M(y, \alpha, x, h) = L(y, \alpha, x) \bullet h$, *qui est un germe analytique de* $F \times \Lambda \times E \times E$ *dans* F.

On suppose que:

(1) $$D\,M(y, \alpha, x, h;\ M(y, \alpha, x, x), o, x, o) = D\,M(y, \alpha, x, x;\ M(y, \alpha, x, h), o, h, o),$$

autrement dit:

(1') $$D\,L(y, \alpha, x;\ L(y, \alpha, x) \bullet x, o, x) \bullet h = D\,L(y, \alpha, x);\ L(y, \alpha, x) \bullet h, o, h) \bullet x.$$

Alors il existe un germe analytique unique P *de* $\Lambda \times E$ *dans* F *tel que:*

(2) $$\Delta_2 P(\alpha, x) = L(P(\alpha, x), \alpha, x)$$

autrement dit (voir définition de Δ_i au paragraphe 9):

(2') $$D\,P(\alpha, x; o, h) = M(P(\alpha, x), \alpha, x, h),$$

et en outre :

(3) $$P(\alpha, o) = \Phi(\alpha)$$

Si l'on pose $Z(y, \alpha, x) = M(y, \alpha, x, x)$ l'équation (2') entraîne en particulier:

(4) $$D\,P(\alpha, x; o, x) = Z(P(\alpha, x), \alpha, x)$$

et le théorème 1 assure l'existence et l'unicité d'un germe analytique, qu'on notera P, vérifiant (3) et (4) (la condition $Z(y, \alpha, o) = 0$ étant bien vérifiée)

Il reste à montrer que P vérifie (2').

Posons: $W(\alpha, x, h) = D\,P(\alpha, x; o, h) - M(P(\alpha, x), \alpha, x, h)$ de sorte que $W(\alpha, x, x) = 0$, et, par suite $D\,W(\alpha, x, x; o, h, h) = 0$

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} D\,W(\alpha, x, h; o, x, h) &= D\,W(\alpha, x, h; o, x, h) - D\,W(\alpha, x, x; o, h, h) = \\ &= D.(D\,P)(\alpha, x; o, h; o, x; o, h) \\ &\quad - D.(D\,P)(\alpha, x; o, x; o, h; o, h) \\ &\quad + D\,M(P(\alpha, x), \alpha, x, h; D\,P(\alpha, x; o, x), o, x, h) \\ &\quad - D\,M(P(\alpha, x), \alpha, x, x; D\,P(\alpha, x; o, h), o, h, h). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes se détruisent par suite des propriétés de symétrie des différentielles secondes.

Ecrivons ensuite, en posant $y = P(\alpha, x)$:

$(D\,P(\alpha, x; o, x), o, x, h) = (o, o, o, h) + (M(y, \alpha, x, x), o, x, o)$

et $(D\,P(\alpha, x; o, h), o, h, h) = (o, o, o, h) + (M(y, \alpha, x, h), o, h, o)$ $+ (W(\alpha, x, h), o, o, o)$ et développons $D\,M$ par linéarité.

Comme M est linéaire en h, les deux termes provenant de (o, o, o, h) valent tous deux $M(y, \alpha, x, h)$ et se détruisent.

Les deux termes suivants se détruisent *grâce à la condition (1) de symétrie.*

En définitive, on voit que W vérifie l'équation différentielle:

$$D\,W(\alpha, x, h; o, x, h) = H(W(\alpha, x, h), \alpha, x, h)$$

où l'on a posé $H(w, \alpha, x, h) = -D\,M(P(\alpha, x), \alpha, x, x; w, o, o, o)$.

En outre $W(\alpha, o, o) = 0$.

Comme on a: $H(w, \alpha, o, o) = 0$, on est dans les conditions d'application du théorème 1 (la variable étant le couple (x, h)), qui assure l'unicité de W. Il en résulte que $W \equiv 0$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE SUR LA CONDITION D'INTEGRABILITE (1'). Posons:

$$N(y, \alpha, x, h, k) = D\,L(y, \alpha, x;\ L(y, \alpha, x) \bullet h, o, h) \bullet k.$$

N s'identifie à un germe analytique B de $F \times \Lambda \times E$ dans $\mathfrak{L}_2(E, F)$:

$$N(y, \alpha, x, h, k) = B(y, \alpha, x) \bullet (h, k).$$

La condition (1') s'écrit alors: $B(y, \alpha, x) \bullet (h, x) = B(y, \alpha, x) \bullet (x, h)$. Elle est donc *notamment vérifiée si* B *est à valeurs dans* $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_2(E, F)$.

REFERENCES

[1] A. GROTHENDIECK. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. (Memoirs of the American Mathematical Society n° 16).

[2] E. HILLE and R.S. PHILLIPS. Functional analysis and semi-groups, (American Mathematical Society, Colloquium Publications. Vol.XXXI, Chap.XXVI: Functions from vectors to vectors).

[3] M. KURANISHI. On the abstract approach to the local theory of continuous infinite pseudo-groups, (rapport Oct. 1957. AFOSR, ARDC et Université de Chicago, contrat n° AF 18 (600)-1383. ASTIA Document Service Center, Dayton 2, Ohio) partiellement publié avec de légères modifications dans: Nagoya Math. Journal, Vol. 15, Août 1959, pp. 225-260.