G. de Rham

# Factorisations topologiques du disque à cinq dimensions

*Séminaire de topologie et géométrie différentielle*, tome 3 (1960-1962), exp. nº 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
Séminaire de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Mai 1961

# FACTORISATIONS TOPOLOGIQUES DU DISQUE A CINQ DIMENSIONS

*par G. de RHAM*

V. Poénaru (Bull. Soc. math. France, 88, 1960, p. 113-129) a donné un exemple d'une variété à quatre dimensions, dont le bord est une variété non simplement connexe à trois dimensions et dont le produit avec un segment est homéomorphe au disque à cinq dimensions. Le procédé de construction qu'il a imaginé, que je décris ici, permet d'obtenir beaucoup d'autres variétés jouissant de la même propriété. En considérant les plus simples d'entre elles, je montrerai qu'il existe une infinité de variétés distinctes, dont le produit avec un segment est homéomorphe au disque à cinq dimensions.

## 1. Quelques définitions :

Un *disque à n dimensions* est une variété $D^n$ homéomorphe à l'ensemble des points de $R^n$ dont la distance à l'origine est $\leq 1$. *Ls sphère à n dimensions* est une variété $S^n$ homéomorphe au bord de $D^{n+1}$.

J'appellerai *tube* toute variété homéomorphe à $S^1 \times D^2$ (tore plein ou tore solide). Le bord d'un tube est un *tore*, surface fermée orientable de genre un, homéomorphe à $S^1 \times S^1$. Une courbe simple fermée sur le bord d'un tube, qui est homologue à zéro dans le tube mais pas sur le bord. sera appelée *un méridien* du tube. Un disque $D^2$ bordé par un méridien, dont l'intérieur est intérieur au tube, sera appelé un *disque méridien*. Une courbe simple fermée sur le bord du tube, qui forme une base pour le premier groupe d'homologie du tube, sera appelée *une longitudinale*. Si $L$ et $L'$ sont deux longitudina--les du même tube, $L \pm L'$ est homologue à zéro dans le tube, et à un multiple d'un méridien sur le bord du tube.

On dira qu'un tube $T$ plongé dans $S^3$ n'est pas noué, si $S^3 - \dot{T}$ est un tube. Dans le cas contraire, on dira que $T$ est noué, mais on supposera toujours que $S^3 - \dot{T}$ est une variété (on exclura les plongements sauvages). On sait (Dehn-Papakyriakopou--los) que $T$ n'est pas noué si et seulement si le groupe fondamental de $S^3 - \dot{T}$ est cyclique.

Soient $W$ et $W'$ deux variétés à $n$ dimensions, et soit $h$ un homéomorphisme d'une sous-variété à $n$-$1$ dimensions $W_1$ (en général avec bord) du bord $\partial W$ de $W$ sur une sous-variété $W'_1$ du bord $\partial W'$ de $W'$. Dans l'espace topologique $W+W'$ somme de $W$ et $W'$, on considère la relation d'équivalence pour laquelle deux points $x$ et $y$ sont équivalents si $x=y$ ou $x=h(y)$ ou $y=h(x)$, et dans ces cas seulement. L'espace quotient de $W+W'$ par cette relation d'équivalence est une variété à $n$ dimensions, que l'on désignera par $(W, W', h)$ ou simplement par $V(h)$, et l'on dira qu'elle est obtenue *en attachant* $W$ *et* $W'$ *avec l'homéomorphisme* $h$.

Si $h'$ est un autre homéomorphisme analogue, je dirai que $h$ et $h'$ sont *équivalents*, s'il existe des automorphismes $g$ de $W$ et $g'$ de $W'$, tels que $g'.h'=h.g$. S'il en est ainsi, $(W, W', h)$ et $(W, W', h')$ sont homéomorphes.

Le bord de $(W, W', h)$ est la variété obtenue en attachant $\partial W - \dot{W}_1$ et $\partial W' - \dot{W}'_1$ avec l'homéomorphisme $h_1 = h \mid \partial W_1$ restriction de $h$ à $\partial W_1$:

$$\partial(W, W', h) = (\partial W - \dot{W}'_1, \partial W' - \dot{W}'_1, h \mid \partial W_1).$$

## 2. La construction de Poénaru.

Partons d'un tube $T$ noué dans $S^3$, de sorte que la variété $A = S^3 - \dot{T}$ ne soit pas un tube. Soient $m$ et $\tilde{m}$ deux méridiens de $T$, ne se touchant pas; ils partagent le bord de $T$ en deux surfaces $F$ et $\tilde{F}$ homéomorphes à une couronne $S^1 \times I_o$ (produit d'un cercle $S^1$ et d'un segment $I_o$). Le produit $A \times I$ de $A$ avec un segment $I$ est une variété à quatre dimensions, dont le bord contient le tube $T_1 = F \times I = S^1 \times I_o \times I$. Prenons encore un homéomorphisme $h$ de $T_1$ sur un tube $T'$ contenu dans le bord $S^3$ d'un disque $D^4$. En attachant $A \times I$ et $D^4$ avec $h$, on obtient une variété à 4 dimensions:

$$V(h) = (A \times I, D^4, h).$$

Il est clair que cette variété dépend du choix de $T$, de $T'$ et de $h$. Poénaru a pris pour $T$ un tube formant le noeud de trèfle, pour $T'$ un noeud plus compliqué formé en composant un noeud de trèfle avec son symétrique et il n'a considéré qu'un seul homéomorphisme $h$. Je considèrerai spécialement le cas où $T$ est le noeud de trèfle et où $T'$ n'est pas noué, et je montrerai que suivant le choix de $h$ on obtient une infinité de variétés distinctes. Je ferai aussi quelques remarques sur le cas général.

Je vais d'abord définir un certain entier associé à l'homéomorphisme $h$ que j'appellerai *l'invariant de* $h$ et que je désignerai par $a(h)$.

Désignons par $O_o$ et $O$ les origines de $I_o$ et $I$, et par $p$ un point de $S^1$. La courbe $m_1 = p \times \partial(I_o \times I)$ est un méridien de $T_1$, tandis que $m \times O = S^1 \times O_o \times O$ en est une longitudinale. Leurs images $h(m_1)$ et $h(m \times O)$ par $h$ sont par suite un méridien et une longitudinale de $T'$, et comme $h(m_1)$ est une base du premier groupe d'homologie de $S^3 - T'$, $h(m \times O)$ est homologue dans $S^3 - T'$ à un multiple de $h(m_1)$, $h(m \times O) \sim$

$\sim a\, h(m_1)$ dans $S^3 - T'$. C'est cet entier $a = a(h)$ que j'appellerai *l'invariant* de $h$.

Voici alors l'énoncé de quelques résultats.

THEOREME I. *Si $T$ est le nœud de trèfle, si $T'$ n'est pas noué et si $a(h) \neq 0$, $\partial V(h)$ n'est pas simplement connexe.*

THEOREME II. *Si $T$ et $T'$ sont noués. $\partial\, V(h)$ n'est pas simplement connexe.*

THEOREME III. *Si $a(h))$ est pair, le produit de $V(h)$ avec un segment est homéomorphe à $D^5$.*

Je démontrerai complètement I et III seulement dans le cas où $T'$ n'est pas noué et où $h$ appartient à une série particulière d'homéomorphismes, dont l'invariant prend toutes les valeurs entières, et je montrerai que les groupes fondamentaux des bords des variétés correspondantes $V(h)$ sont deux-à-deux non isomorphes. Il en résultera bien l'existence d'une infinité de variétés distinctes, dont le produit avec un segment est $D^5$.

**3. Etude du bord de V(h).**

D'après le n° 1, on a $\partial V(h) = (\partial\,(A \times I) - \dot{T}_1,\ S^3 - \dot{T}',\ h / \partial T_1)$. Montrons d'abord, suivant Poénaru, que $\partial\,(A \times I - \dot{T}_1)$ est homéomorphe à $S^3 - \dot{T}_2$, où $T_2$ est un tube que l'on obtient en composant le noeud formé par $T$ avec le nœud symétrique.

Représentons $S^3$ par $R^3$ complété avec un point à l'infini. Par une déformation homéomorphe de $S^3$, on peut amener $A$ sur la variété bornée limitée par la partie d'une sphère $S$ extérieure à deux cercles tracés sur $S$ et ne se touchant pas, et par la surface d'un canal joignant ces deux cercles à l'intérieur de $S$, de manière que ces deux cercles soient $m$ et $\tilde{m}$, que $F$ soit la surface du canal joignant $m$ et $\tilde{m}$ et $\tilde{F}$ la partie de $S$ limitée par $m$ et $\tilde{m}$ et extérieure à ces deux cercles (Voir figure 2). Soient $A'$, $S'$ et $F'$ les symétriques de $A$, $S$ et $F$ par rapport à un plan ne coupant pas $S$. Par chaque point extérieur à $S$ et $S'$ passe un arc de cercle orthogonal à $S$ et $S'$, joignant un point de $S$ à son symétrique sur $S'$, et un seul.

On a:

$$\partial\,(A \times I) - \dot{T}_1 = (\partial\, A \times I - T_1) \cup A \times 0 \cup A \times 1 = \tilde{F} \times I \cup A \times 0 \cup A \times 1.$$

On peut alors représenter $A \times 0$ sur $A$, $A \times 1$ sur $A'$ et $\tilde{F} \times I$ sur la variété balayée par les arcs de cercles orthogonaux à $S$ et $S'$ joignant un point de $\tilde{F}$ à son symétrique sur $S'$, de manière que, pour $x \in \tilde{F}$, le point $(x, t)$ décrive cet arc lorsque $t$ varie de $0$ à $1$. On obtient ainsi une représentation de $\partial\,(A \times I) - \dot{T}_1$ sur $S^3 - \dot{T}_2$, $T_2$ étant le tube formé par le canal intérieur à $S$, son symétrique dans $S'$, et deux canaux joignant $m$ et $\tilde{m}$ *à leurs symétriques* $m'$ et $\tilde{m}'$, ces derniers canaux étant engendrés par des arcs de cercles orthogonaux à $S$ et $S'$.

On peut remarquer que $m \times 0$ est un méridien de $T_2$; et que $m_1$ est une longitu--dinale de $T_2$, qui est homologue à zéro dans $S^3 - \dot{T}_2$ (cela se déduit immédiatement du fait que $m_1$ est symétrique par rapport au plan de symétrie de $T_2$, et par suite a un coefficient d'enlacement nul avec l' "âme" de $T_2$).

Les groupes fondamentaux $\pi_1(\partial(A \times I) - \dot{T}_1) = \pi_1(S^3 - \dot{T}_2)$ et $\pi_1(S^3 - T')$sont des groupes de noeuds, dont on sait trouver des générateurs et des relations fondamenta--les. On sait qu'on obtient des générateurs et des relations fondamentales de $\pi_1(\partial V(h))$ en réunissant ces générateurs et ces relations et ajoutant les relations qu'on obtient en égalant les éléments qui représentent des classes de courbes sur les bords $\partial T_2$ et $\partial T'$ qui se correspondent par $h$. Le théorème II peut alors se déduire facilement de résultats de Papakyriakopoulos et Whitehead, d'après lesquels, si un tube $T$ est noué, une courbe sur $\partial T$ non homotope à zéro sur $\partial T$ n'est pas non plus homotope à zéro dans $S^3 - \dot{T}$.

Prenons maintenant le cas où $T$ est le noeud de trèfle. Alors, le groupe $\pi_1(S^3 - \dot{T}_2)$ est le groupe du noeud représenté sur la figure en projection, à chacun des arcs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,.. on associe un générateur du groupe, représentant la classe d'homotopie des lacets partant du point base ⊙ supposé en avant du plan de projection, perçant ce plan à droite de l'arc, passant derrière et revenant en O en reperçant le plan à gauche de l'arc. On sait qu'à chaque croisement correspond une relation, et qu'on obtient ainsi des relations fondamentales. On a donc ainsi les générateurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$, $\varphi$, $\delta = \alpha$, avec les relations $\alpha\gamma = \gamma\beta = \beta\alpha$, $\alpha\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi\alpha$. Comme fait Poénaru, posons $\beta\alpha = \sigma$, $\varphi\alpha = \tau$. En éli--minant $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$, $\varphi$ et $\delta$, il reste les générateurs $\alpha$, $\sigma$ et $\tau$, avec les relations $\sigma^2 = \alpha\sigma\alpha$, $\tau^2 = \alpha\tau\alpha$. Elles entraînent $\sigma^3 = (\alpha\sigma)^2 = (\sigma\alpha)^2$, $\tau^3 = (\alpha\tau)^2 = (\tau\alpha)^2$, d'où résulte que $\alpha$ commute avec $\sigma^3$ et $\tau^3$.

En supposant le point base $O$ placé sur le bord de $T_2$, au dessus (ou en avant) de l'arc $\alpha$ de la figure, le méridien $m \times O$ de $T_2$ est représenté par $\alpha$, tandis que la longitudinale $m_1$ de $T_2$ (orientée dans le sens des flèches de la figure) est représentée par l'élément :

$$\chi = \gamma\alpha\beta\varphi^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} = \alpha^{-1}\sigma\alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha\tau^{-1}\alpha^{-1}\tau^{-1}\alpha =$$
$$= \alpha^{-2}(\alpha\sigma)^2(\alpha\tau)^{-2}\alpha^2 = \alpha^{-2}\sigma^3\tau^{-3}\alpha^2 = \sigma^3\tau^{-3}$$

Si $T'$ n'est pas noué, le groupe $\pi_1(S^3 - \dot{T}')$ est cyclique, engendré par un élé--ment représentant un méridien de $T'$, soit $h(m_1)$, élément qui s'identifie par suite à $\chi$. Comme $h(m \times O)$ est homologue et par suite homotope dans $S^3 - \dot{T}'$ à $am_1$, où $a$ est l'invariant de $h$, il s'introduit une nouvelle relation, $\alpha = \chi^a$. En définitive,

THEOREME IV. *Si $T$ est le noeud de trèfle, si $T'$ n'est pas noué et si l'invariant de $h$ est égal à $a$, $\pi_1(\partial V(h))$ est le groupe $G_a$ défini par les générateurs $\alpha$, $\sigma$ et $\tau$ avec* *les relations :*

$$\sigma^2 = \alpha\sigma\alpha\,, \qquad \tau^2 = \alpha\tau\alpha\,, \qquad \alpha = (\sigma^3\tau^{-3})^a.$$

Si $a = 0$, ces relations entraînent $\alpha = \sigma = \tau = 1$, et $G_o$ est trivial. Si $a \neq 0$, $G_a$ n'est pas trivial, car il admet une représentation sur le groupe unimodulaire mod $(6a+1)$, qu'on obtient en représentant $\alpha$, $\sigma$ et $\tau$ par les substitutions $z' = z+1$, $z' = \frac{-1}{z} - 1$ et $z' = z+2$, car alors $\sigma^2$ et $\alpha\sigma\alpha$ sont représentés par la substitution $z' = \frac{-1}{z+1}$, $\tau^2$ et $\alpha\tau\alpha$ par $z' = z+4$, et $(\sigma^3\tau^{-3})^a$ par $z' = z - 6a$, ce qui mod $(6a+1)$ est la même chose que la substitution représentant $\alpha$.

En considérant les représentations de $G_a$ dans le groupe des déplacements du plan non-euclidien, on peut montrer que si $|a| \neq |b|$, $G_a$ et $G_b$ ne sont pas isomorphes, et que $G_a$ est infini si $a \neq 0$. (voir Appendice, n° 5).

**Etude du produit $V(h)\times I_1$ :**

Je vais montrer d'abord que, quel que soit le tube $T$, il existe un homéomorphisme $h_o$ de $T_1$ sur un tube $T'$ non noué, tel que $V(h_o)$ soit homéomorphe au disque $D^4$.

Reprenons la variété $A$ représentée comme plus haut, dans $R^3$; son bord est formé par la partie de la sphère $S$ extérieure aux deux cercles $m$ et $\tilde{m}$ et la surface d'un canal joignant $m$ à $\tilde{m}$ à l'intérieur de $S$, surface qui représente $F$. Désignons par $B$ la variété constituée par l'intérieur de ce canal avec son bord, de sorte que $A \cap B = F$ et $A \cup B$ est la variété formée par la sphère $S$ et son intérieur. Il est clair que $B\times I$ est un disque $D^4$, dont l'intersection avec $A\times I$ est $F\times I = T_1$, tube qui est contenu à la fois dans $\partial(A\times I)$ et dans $\partial(B\times I)$. En attachant $A\times I$ et $B\times I$ avec l'homéomorphisme $h_o$ égal à l'application identique de $T_1$ sur lui-même, on obtient alors la variété $V(h_o) = (A\cup B)\times I$, qui est bien homéomorphe à $D^4$. On voit encore que $T'$, qui se confond ici avec $T_1$, n'est pas noué dans $S^3 = \partial(B\times I)$ et que $a(h_o) = 0$, car $S^3 - T' = \partial(B\times I) - T_1 = B\times O \cup B\times I \cup (S - \dot{F})\times I$ n'est pas autre chose que le tube $T_2$ envisagé au n° 3, dans lequel $h_o(m\times O) = m\times O$ est un méridien donc homologue à zéro.

Considérons maintenant un homéomorphisme de $T_1$ sur un tube $T'$ quelconque dans $S^3 = D^4$. On peut introduire dans $T'$ un système de coordonnées, $(z, \theta)$, formé d'une coordonnée complexe $z$ assujettie à $|z| \leq 1$ et d'une coordonnée angulaire $\theta$ (mod $2\pi$), de manière que arg $z$ augmente de $2\pi$ sur le méridien $h(m_1)$ et que $\theta$ augmente de $2\pi$ sur la longitudinale $h(m\times O)$. L'automorphisme $G$ de $T'$ défini par $G(z, \theta) = (e^{i\theta}z, \theta)$ change alors $h(m\times O)$ en une longitudinale homologue sur $\partial T'$ à $h(m\times O)$ e $h(m_1)$, de sorte que, si l'invariant de $h$ est $a$, celui de $G.h$ est $a+1$. On pourra ainsi déduire d'un homéomorphisme $h$ une série d'homéomorphismes $G^k.h$ $(k = 0 \pm \pm 1, \pm 2, \dots)$ ayant pour invariants tous les entiers.

THEOREME V. *Quel que soit l'homéomorphisme $h$, les variétés $V(h)\times I_1$ et $V(G^2.h)\times I_1$ sont homéomorphes.*

Dans cet énoncé, $I_1$ désigne un segment, que nous supposerons être l'intervalle $(-1 \leq t \leq 1)$. Nous désignerons par $i$ l'application identique de $I_1$. Il est clair que l'on peut obtenir $V(h)\times I_1$ en attachant $A\times I\times I_1$ et $D^4\times I_1$ avec l'homéomorphisme $h\times i$, qui change $(x, t)$ en $(h(x), t)$. On a ainsi:

$$V(h)\times I_1 = (A\times I\times I_1, D^4\times I_1, h\times i).$$

Pour montrer que $V(h)\times I_1$ et $V(G^2.h)\times I_1$ sont homéomorphes, il suffira donc de montrer que les homéomorphismes $h\times i$ et $(G^2.h)\times i$ de $T_1\times I_1$ sur $T'\times I_1$ sont équivalents, au sens du nº 1, et pour cela il suffit de montrer que l'automorphisme $G^2\times i$ de $T'\times I_1$ peut s'étendre en un automorphisme de $D^4\times I_1$, ou, ce qui suffit encore, en un automorphisme de $S^4 = \partial(D^4\times I_1)$, car un tel automorphisme peut toujours s'étendre à l'intérieur de $D^4\times I_1$. Je vais montrer que $G^2\ i$ peut s'étendre en un automorphisme de $(D^4\ I_1)$ qui est l'identité en dehors d'un voisinage de $T'\ I_1$.

Le système de coordonnées $(z, \theta)$ introduit dans $T'$ peut s'étendre à un voisinage de $T'$ dans $S^3 = \partial D^4$, qui sera ainsi représenté sur le produit $R^2\times S^1$ du plan de la variable complexe $z$ avec un cercle. Ensuite, par projection centrale dans $R^4\times R$ de $\partial(D^4\times I_1)$ privée des centres de $D^4\times -1$ et $D^4\times 1$ sur $S^3\times R$, on obtientun système de coordonnées $(z, \theta, t)$ défini dans un voisinage $\mathfrak{U}$ de $T'\times I_1$ dans $S^4 = \partial(D^4\times I_1)$, $T'\times I_1$ étant défini dans ce voisinage par $|z| \leq 1$ et $|t| \leq 1$. Posons encore:

$$w = \lambda z \quad \text{et} \quad u = \lambda t, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{sup(|z|, |t|)}{\sqrt{|z|^2 + t^2}},$$

de sorte que $\sqrt{|w|^2 + u^2} = \sup(|z|, |t|)$. A l'aide des coordonnées $(w, \theta, u)$, qui sont valables dans $U$, $T'\times I_1$ est défini par $|\mathfrak{W}|^2 + \mathfrak{U}^2 \leq 1$ et la transformation $(G^2\times i)(w, \theta, u) = (e^{2i\theta}w, \theta, u)$ s'étend à ce voisinage. Les sphères $S(r, \varphi)$, définies par $|w|^2 + u^2 = r^2$ et $\theta = \varphi$, forment une fibration de $U$, et $G^2\times i$ fait subir à $S(r, \varphi)$ une rotation sur elle-même indépendante de $r$, d'angle $2\varphi$.

On peut représenter chacune de ces rotations par une rotation de l'espace $R^3$ des coordonnées $(w, u)$ autour de l'origine. Or, dans le groupe de ces rotations, lorsque $\varphi$ varie de $0$ à $2\pi$, la rotation qui change $(w, u)$ en $(e^{2i\varphi}w, u)$ décrit une courbe fermée homotope à zéro. On peut par suite trouver une famille continue de rotations $R(r, \varphi)$ qui se réduisent à la rotation ci-dessus pour $r \leq 1$ et à l'identité pour $r \leq 2$ L'automorphisme de $S^4 = \partial(D^4\times I_1)$ qui coïncide sur $S(r, \varphi)$ avec la rotation $R(r, \varphi)$ et qui se réduit à l'identité en dehors de $U$ fournit alors l'extension cherchée de $G^2\times i$.

REMARQUE : Ls construction ci-dessus ne permet pas d'étendre l'automorphisme $G \times i$, parce que, lorsque $\varphi$ varie de $0$ à $2\pi$, la rotation qui change $(w, u)$ en $(e^{i\varphi} w, u)$ décrit dans le groupe des rotations une courbe qui n'est pas homotope à zéro.

Lorsque $T'$ n'est pas noué, deux homéomorphismes de $T_1$ sur $T'$ dont les invariants sont égaux au signe prês sont équivalents : cela se déduit facilement du fait qu'un automorphisme de $T'$ qui induit l'identité sur l'homologie de $T'$ est isotope à l'identité, et peut par suite s'étendre à $S^3$. Dans ce cas, si $T$ est donné, $V(h)$ ne dépend que de $a(h)$.

Revenons au cas où $T$ est le noeud de trèfle et où $T'$ n'est pas noué. Nous obtenons alors une série de variétés $V_a = V(G^a . h_o)$ dépendant d'un entier arbitraire $a$. D'aprés le théorème V, le produit $V_a \times I_1$ est homéomorphe à $V_o \times I_1 = D^5$ (car $V_o = D^5$) si $a$ est pair et à $V_1 \times I_1$ si $a$ est impair. D'autre part, $\pi_1(V_a) = G_a$.

Comme les groupes $G_{2a}(a = 0, 1, 2, \ldots)$ sont deux-à-deux non isomorphes, *les variétés* $V_{2a}(a = 0, 1, 2, \ldots)$ *sont deux-à-deux non homéomorphes, et le produit de chacune d'elles avec* $I_1$ *est* $D^5$.

Le théorème III est ainsi établi dans le cas où $T'$ n'est pas noué. On l'étend au cas général en montrant que, pour tout homéomorphisme $h$, on peut trouver un homéomor--phisme $h'$ tel que $h'(T_1)$ ne soit pas noué, que $h \times i$ soit équivalent à $h' \times i$ et que $a(h') \equiv a(h) \pmod 2$. Il faut utiliser pour cela le procédé qui permet de dénouer les noeuds dans l'espace à 4 dimensions, comme fait Poénaru dans son exemple.

Il serait intéressant de savoir si $V_1 \times I_1$ est homéomorphe à $D^5$? Je me borne à poser la question !

Voici encore une remarque intéressante faite par Poénaru. L'automorphisme involutif de $I_1$ qui change $t$ en $-t$ s'étend naturellement en un automorphisme involutif de $\partial(V(h) \times I_1)$, dont l'ensemble des points fixes est une variété homéomorphe à $\partial V(h)$, qui partqge $\partial(V(h) \times I_1)$ en deux variétés homéomorphes à $V(h)$. Le "double" de $V(h)$, c'est-à-dire la variété obtenue en attachant deux exemplaires de $V(h)$ avec l'homéomorphisme canonique du bord de l'un sur le bord de l'autre, est homéomorphe à $\partial(V(h) \times I_1)$. En tenant compte de ce qui précède, on voit qu'*il existe une infinité d'automorphismes involutifs de* $S^4$ *dont les points fixes forment des variétés à trois dimensions deux-à-deux non homéomorphes*.

Ces mêmes variétés se présentent comme ensembles des points fixes de groupes à un paramètre (homéomorphes à $S^1$) d'automorphismes de $S^5$.

## 5. Appendice.

*Les groupes $G_a$*, définis dans l'énoncé du théorème IV.

Condidérons une représentation du groupe $G_a$ dans le groupe des déplacements du plan non euclidien, que nous supposerons non triviale. Soient $S$, $T$ et $A$ les dépla--cements représentant $\sigma$, $\tau$, et $\alpha$. On sait que l'ensemble des déplacements permutables avec un déplacement donné (distinct de la transformation identique) est le sous-groupe à un paramètre contenant ce déplacement. Comme $S^3$ et $T^3$ sont permutables avec $A$ et $A \neq 1$ (si $A = 1$ la représentation serait triviale), il est nécessaire que $S^3$ ou $T^3$ se réduisent à l'identité. (Sinon $S$ et $T$ seraient permutables et la représentation serait triviale).

Si $S^3 = 1$, les relations $S^2 = ASA$, $T^2 = ATA$ et $A = (S^3 T^{-3})^a$ se réduisent à $T = A^2$, $S^3 = A^{6a+1} = (AS)^2 = 1$.

Si $T^3 = 1$, elles se ramènent à $S = A^2$, $T^3 = A^{6\alpha - 1} = (AT)^2 = 1$.

On voit que les représentations de $G_\alpha$ se ramènent aux représentations du groupe $H_n$ défini par deux générateurs $A$ et $B$ avec les relations $B^3 = A^n = (AB)^2 = 1$, pour $n = 6|a| + 1$ et $n = 6|a| - 1$. Or, on sait que, si $n > 6$, il existe une représentation fidèle de $H_n$ par un groupe de déplacements du plan non-euclidien, qui laisse invariant un réseau de polygones réguliers à $n$ côtés d'angle $2/3$; cela entraîne que $n$ est le maximum de l'ordre des éléments d'ordre fini de $H_n$. D'autre part, $H_5$ est le groupe de l'icosaèdre. Il résulte de là que *le nombre $6|a| + 1$ est le maximum de l'ordre des éléments d'ordre fini de toutes les représentations de $G_a$ par des déplacements du plan non-euclidien.*

Cela entraîne immédiatement que $G_a$ et $G_b$ ne peuvent être isomorphes que si $a = \pm b$. Et $G_a$ et $G_{-a}$ sont effectivement isomorphes : une permutation de $\sigma$ et $\tau$ réalise l'isomorphisme.

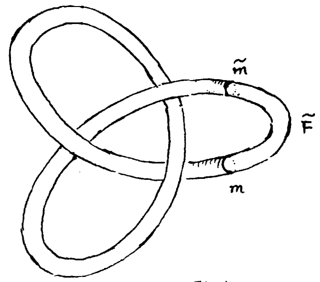



Fig 1

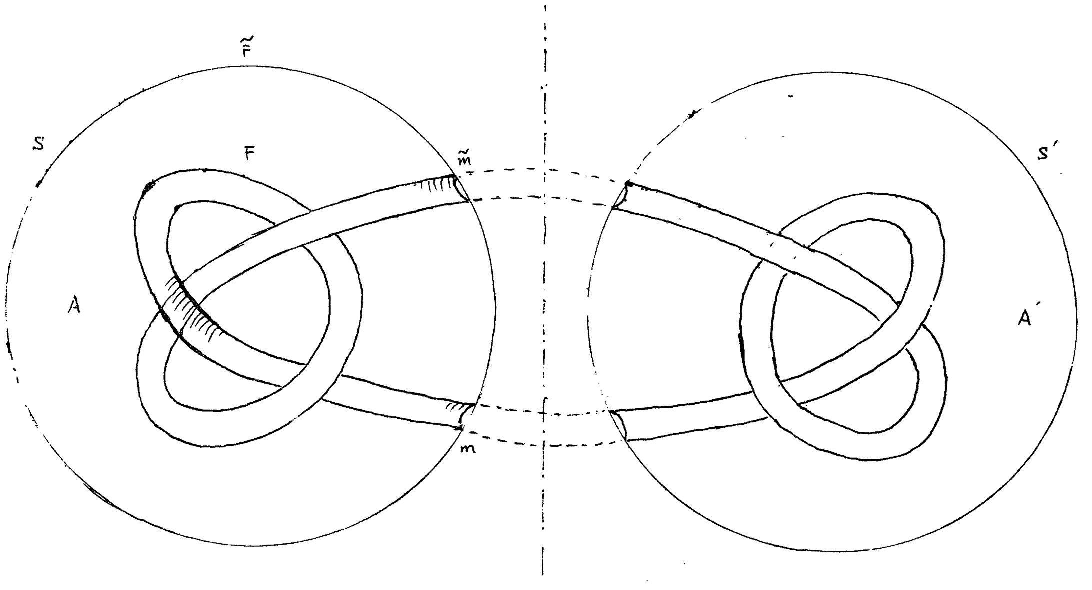
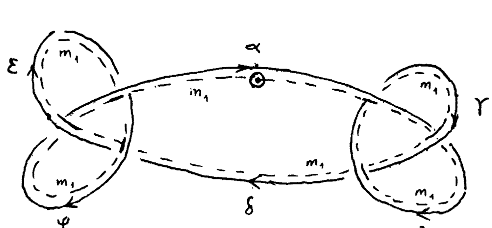



Fig 2

$\alpha = \delta$

$\alpha\gamma = \gamma\beta = \beta\alpha = \sigma$

$\alpha\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi\alpha = \tau$




$\gamma = \gamma\alpha\beta\varphi^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} = \ldots = \sigma^{3}\tau^{-3}$

Fig 3