Séminaire de topologie et géométrie différentielle

PAUL DEDECKER

Sur quelques points nouveaux de cohomologie non abélienne

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Mai 1960

SUR QUELQUES POINTS NOUVEAUX DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

par Paul DEDECKER

Cet exposé, datant de mai 1960, fait suite à des travaux antérieurs et notamment à mon article [4]. Il a fait l'objet d'une communication au Colloque de géométrie différentielle et topologie algébrique de Zürich en juin 1960. Dans une première partie on aborde, par les méthodes cohomologiques, le problème de la restriction du groupe structural G d'un espace fibré à un sous-groupe N, ce qui, lorsque N n'est pas normal, conduit à une "*cohomologie à coefficients dans un faisceau d'espaces homogènes*". Dans la seconde, on donne une interprétation cohomologique des espaces fibrés en théorie simpliciale, une fonction tordante étant interprétée comme un cocycle. Il conviendrait de préciser le lien entre le point de vue introduit ici et celui développé par Nguyen-Đinh-Ngoc [7].

PREMIERE PARTIE

1. Introduction. Soit $E = E(B, G)$ un espace fibré principal de base B et groupe structural G, N un sous-groupe normal de G. Le problème de la restriction du groupe structural à N admet, comme on sait, une solution fondée sur la cohomologie non abélienne; voir par exemple [2] et [5]. Les classes d'espaces fibrés principaux de base B et groupe G correspondent aux éléments d'un ensemble $H^1(B, \mathfrak{G})$ de *1*-cohomologie de B à valeurs dans le faisceau $\mathfrak{G}$ des jets locaux (germes) d'applications locales continues de B dans G; il s'agit d'un faisceau de groupes en général non abéliens. Au sous-groupe normal N correspond un sous-faisceau $\mathfrak{N}$, un faisceau quotient $\mathfrak{H}$ et des suites exactes:

$$e \to \mathfrak{N} \xrightarrow{i} \mathfrak{G} \xrightarrow{j} \mathfrak{H} \to e \tag{1.1}$$

$$\ldots \to H^1(B, \mathfrak{N}) \xrightarrow{i^1} H^1(B, \mathfrak{G}) \xrightarrow{j^1} H^1(B, \mathfrak{H}) \to \ldots \tag{1.2}$$

L'espace fibré E s'identifie à un élément de $H^1(B, \mathfrak{G})$ et il s'agit de savoir s'il appartient à l'image de l'application i^1 : en vertu de l'exactitude de la suite (1.2), il en est ainsi si et seulement si $j^1(E)$ est l'élément neutre de $H^1(B, \mathfrak{H})$. Comme on sait, cela revient à dire que l'espace fibré principal associé de fibre le groupe G/N est trivial.

Dans le cas général, $\mathfrak{N}$ n'est pas un sous-faisceau normal de $\mathfrak{G}$, ce qui signifie que l'inclusion i ne possède pas de conoyau dans la catégorie des groupes: tout au plus pourrait-on définir un faisceau $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ d'espaces homogènes mais on ne pourrait plus définir un ensemble $H^1(B, \mathfrak{H})$. On se propose d'énoncer cependant un analogue du résultat précédent.

2. La construction fondamentale. On va "plonger" l'inclusion $i : \mathfrak{N} \to \mathfrak{G}$ dans un homo-morphisme de faisceau de groupoïdes $i^* : \mathfrak{N}^* \to \mathfrak{G}^*$ qui possède lui un conoyau. Interprétée au niveau des groupes l'opération qu'on va réaliser est la suivante: On se donne un groupe G plus un sous-groupe N et on construit un groupoïde G^* muni d'un sous-groupoïde normal N^* avec en outre (a) des inclusions $\alpha : N \to N^*$, $\beta : G \to G^*$ qui soient des semi-homomorphismes dans le sens suivant: si pour $g, g' \in G$ $\beta(g) . \beta(g')$ est défini, on a $\beta(gg') = \beta(g) \cdot \beta(g')$; (b) un homomorphisme subjectif $\mu : G^* \to G$ tel que $\mu \cdot \beta$ soit l'identité. Pour la notion de sous-groupoïde normal voir [3].

Désignons par N' un conjugué quelconque de N (i.e. $N' = \Upsilon N \Upsilon^{-1}, \Upsilon \in G$) et considérons l'ensemble G^* des couples (g, N'). Deux d'entre eux (g', N''), (g, N') sont dits composables si $N'' = gN'g^{-1} = g\Upsilon N \Upsilon^{-1} g^{-1}$; on pose alors

$$(g', N'') \cdot (g, N') = (g'g, N').$$

Ceci fait de G^* un groupoïde dont les unités sont les couples (e, N') elles correspon-dent biunivoquement aux sous-gtoupes N' de G; l'inverse de (g, N') est (g^{-1}, N'') où $N'' = gN'g^{-1}$. Lorsque N est normal dans G, on a $G^* \approx G$. On désignera par N^* le sous-ensemble des couples (n', N') où $n' \in N'$: ceci est un sous-groupoïde qui s'identifie au groupoïde de somme ensembliste des groupes N'. Un composé $(g, N')\ (n', N')\ (g^{-1}, N'')$ est toujours défini et égal à $(gn'g^{-1}, N'')$: il appartient à N^*, ce qui signifie que ce sous-groupoïde est normal dans G^*. Le quotient $H^* = G^*/N^*$ s'identifie à l'ensemble des couples (h, N') où h est un élément de l'espace homogène $H' = G/N'$, image canonique d'un élément $g \in G$. Si de même $g' \in G$ donne h' dans $H'' = G/N''$ la loi de composition dans H^* est la suivante: $(h', N'') . (h, N')$ est défini si $N'' = g'N'g'^{-1}$, le composé étant alors (h'', N') où h'' est induit par $g'g$ dans G/N'. Si l'on désigne par ε le groupoïde formé des unités de G^* et par e un groupe formé d'un seul élément, on a la suite exacte de groupoïdes

$$\varepsilon \to N^* \xrightarrow{i^*} G^* \xrightarrow{j^*} H^* \to e .$$

Les inclusions α, β dont il est question ci-dessus sont définies par $\alpha(n) = (n, N) \in N^*$, $\beta(g) = (g, N) \in G^*$; elles vérifient bien la propriété de semi-homomorphie annoncée. Si H désigne l'espace homogène G/N on peut aussi définir une inclusion $\Upsilon : H \to H^*$ par $\Upsilon(h) = (h, N)$, $h \in H$. L'homomorphisme $\mu : G^* \to G$ est défini par $\mu(g, N') = g$.

Au niveau des faisceaux de groupes, on doit considérer, sur un espace B, un faisceau de groupes $\mathcal{G}$ et un sous-faisceau $\mathcal{N}$. Pour chaque $x \in B$ on a donc un groupe $\mathcal{G}_x$, un sous-groupe $\mathcal{N}_x$ et la famille des conjugués $\mathcal{N}'_x$ de $\mathcal{N}_x$ par les automorphismes intérieurs de $\mathcal{G}_x$. On peut définir la notion de continuité pour une fonction définie dans un ouvert U et dont la valeur $f(x)$ en tout $x \in U$ est un $\mathcal{N}'_x$: dans un voisinage $U_x \subset U$ de chaque point x doit être définie une section continue $g: U_x \to \mathcal{G}$ telle que pour $y \in U_x$, $f(y) = g_y \mathcal{N}_y g_y^{-1}$. Toutefois deux telles fonctions qui ont même valeur en x ne coïncident pas en général dans un voisinage de x; on peut encore dire que deux conjugués distincts $\mathcal{N}'_y$, $\mathcal{N}''_y$ peuvent tendre continûment vers un même $\mathcal{N}'_x$ lorsque y tend vers x. Ceci nécessite la considération, pour tout x, de l'ensemble de tous les jets locaux $f_x = j_x^{\lambda} f$ de ces fonctions f. Chacun de ces jets sera identifié à un groupe $\tilde{\mathcal{N}}_x = \tilde{\mathcal{N}}_{f_x}$ isomorphe à $\mathcal{N}'_x = f(x)$ et de telle manière que deux de ces groupes qui correspondent à des jets dis--tincts aient une intersection vide. L'isomorphisme de $\mathcal{N}'_x$ sur $\tilde{\mathcal{N}}_x$ sera noté:

$$\theta_x : \mathcal{N}'_x \to \tilde{\mathcal{N}}'_x .$$

Chaque groupe $\tilde{\mathcal{N}}_x$ sera appelé un *germe de conjugué* de $\mathcal{N}_x$ en x et l'ensemble de ces germes-groupes sera noté ε_x. On observe que pour $x \neq y$ les ensembles ε_x et ε_y sont disjoints; on désigne par ε la réunion des ε_x lorsque x parcourt B, réunion qui se munit d'une structure de faisceau d'ensembles sur B dont les sections continues sont de la forme $x \to j_x^{\lambda} f$. Le faisceau de groupes $\mathcal{G}$ opère à gauche sur ε de la manière suivante: si f est, au voisinage de x de la forme $y \to g_y \mathcal{N}_y g_y^{-1} = f(y)$, et si $\gamma_x \in \mathcal{G}_x$ est la valeur en x d'une section continue γ de $\mathcal{G}$ définie au voisinage de ce point, on pose $\gamma_x \cdot j_x^{\lambda} f = j_x^{\lambda} g$ où g est une fonction analogue à f de la forme $y \to \gamma_y g_y \mathcal{N}_y g_y^{-1} \gamma_y^{-1}$. Si $j_x^{\lambda} g = \tilde{\mathcal{N}}_x$, on a donc $\tilde{\mathcal{N}}_x = \gamma_x \cdot \tilde{\mathcal{N}}_x$.

Pour tout x on définit alors un groupoïde $\mathcal{G}^*_x$ formé des couples $(g_x, \tilde{\mathcal{N}}_x) \in \mathcal{G}_x \times \varepsilon_x$, un composé $(g_{2x}, \tilde{\mathcal{N}}_{2x})\,(g_{1x}, \tilde{\mathcal{N}}_{1x})$ étant défini et seulement si $\tilde{\mathcal{N}}_{2x} = g_{1x} \cdot \tilde{\mathcal{N}}_{1x}$, la va--leur étant alors $(g_{2x} \cdot g_{1x}, \tilde{\mathcal{N}}_{1x})$. La réunion $\mathcal{G}^*$ des $\mathcal{G}^*_x$ est un faisceau de groupoïdes sur B. Les couples $(n'_x, \tilde{\mathcal{N}}_x)$, où $\theta_x(n'_x) \in \tilde{\mathcal{N}}_x$, engendrent un sous-groupoïde $\mathcal{N}^*_x$ de $\mathcal{G}^*_x$ et un sous-faisceau $\mathcal{N}^*$ de $\mathcal{G}^*$. Pour vérifier ce dernier point, c'est-à-dire que $\mathcal{N}^*$ est ouvert dans $\mathcal{G}^*$, on notera ce qui suit. Si $\tilde{\mathcal{N}}_x = j_x^{\lambda} f$ et si $n'_x = \mathcal{N}'_x = f(x)$ il existe $n_x \in \mathcal{N}_x$ et une section g de $\mathcal{G}$ définie au voisinage de x qui engendre f et telle que $n'_x = g_x n_x g_x^{-1}$. Il existe alors une section n de $\mathcal{N}$ définie au voisinage de x et de valeur n_x en x. Ces données permettent de définir une section de $\mathcal{N}^*$ au voisinage de x et de valeur $(n'_x, \tilde{\mathcal{N}}_x)$ en x, ce qui établit la propriété. On notera en outre que chaque $\mathcal{N}^*_x$ est un sous-groupoïde normal de $\mathcal{G}^*_x$ et on peut donc prendre le quotient $\mathcal{H}^*_x = \mathcal{G}^*_x / \mathcal{N}^*_x$. On a donc des suites exactes :

$$\varepsilon_x \to \mathfrak{N}^*_x \xrightarrow{i^*_x} \mathfrak{G}^*_x \xrightarrow{j^*_x} \mathfrak{H}^*_x \to e_x$$

$$\varepsilon \to \mathfrak{N}^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{G}^* \xrightarrow{j^*} \mathfrak{H}^* \to e$$

où e est un faisceau sur B ne comportant qu'un seul élément e_x au-dessus de x, élément que l'on pourrait d'ailleurs identifier à x, le faisceau s'identifiant alors à B en tant qu'espace topologique. On identifiera, au moyen du dernier diagramme, le faisceau ε aux sous-faisceaux des unités dans $\mathfrak{N}^*, \mathfrak{G}^*, \mathfrak{H}^*$ (obser--ver que i_x et j_x se réduisent à des bijections sur les unités). Le faisceau ε admet une section globale $B \to \varepsilon$ qui associe à tout point $x \in B$ le jet de la fonc--tion f de valeur $f(y) = \mathfrak{N}_y$ pour tout $y \in B$. Cette section π est dite *principale* de même que l'unité π_x qu'elle définit pour tout $x \in B$. On a également des inclu--sions :

$$\alpha : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}^*, \quad \beta : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^*, \quad \gamma : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$$

[où $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} / \mathfrak{N}$ est un faisceau d'espaces homogènes] et un homomorphisme sur--jectif :

(2.1) $$\mu : \mathfrak{G}^* \to \mathfrak{G}$$

tel que $\mu . \beta$ soit l'identité.

3. Relations entre $H^1(B, \mathfrak{G})$ **et** $H^1(B, \mathfrak{G}^*)$ Pour ce qui concerne les définitions et les notations de la cohomologie non abélienne, nous renvoyons à [2], [5] lorsque les coefficients sont des groupes ou des faisceaux de groupes et à [6], lorsqu'il s'agit de groupoïdes ou de faisceaux de groupoïdes.

Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de B et considérons une *1*-co--chaîne $g^* = (g^*_{ij})$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathfrak{G}^*$; on notera g_{ij} et σ_{ij} les composan--tes de g^*_{ij} suivant $\mathfrak{G}$ et ε. Si g^* est un cocycle, le produit $g^*_{ij}(x) \cdot g^*_{jk}(x)$ est défini pour tout $x \in U_{ijk}$ et on a

$$g^*_{ik}(x) = g^*_{ij}(x) \cdot g^*_{jk}(x), \quad x \in U_{ijk}.$$

Ceci implique que (a) les g_{ij} définissent un cocycle $\mu(g^*) = g$ à valeurs dans $\mathfrak{G}$; (b) les $\sigma_{ii} = \sigma_i : U_i \to \varepsilon$ sont des sections de ε telles que, pour $x \in U_{ij}$, $\sigma_j(x)$ et $\sigma_i(x)$ soient les unités à droite et à gauche de $g^*_{ij}(x)$, ce qui nous permet d'écrire symboliquement

(3.1) $$g^*_{ij} : \sigma_j \to \sigma_i .$$

On notera en outre que $\sigma_{ij}(x) = \sigma_j(x)$ pour tout $x \in U_{ij}$ et que g^* est donc caractérisé par (g_{ij}, σ_j). La propriété (a) signifie que l'homomorphisme (2.1) induit une application

$$\mu^* : H^1(B, \mathcal{G}^*) \to H^1(B, \mathcal{G})$$

mais elle n'est pas en général surjective. En effet un 1-cocycle $g=(g_{ij})$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ n'est l'image d'un cocycle $g^* = (g^*_{ij})$ à valeurs dans $\mathcal{G}^*$ que s'il existe une famille de sections $\sigma_i : U_i \to \varepsilon$ (constituant une 0-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans le faisceau des unités) compatible avec g c'est-à-dire telles que, pour $x \in U_{ij}$ on ait :

$$(3.2) \qquad \sigma_i(x) = g_{ij}(x) \cdot \sigma_j(x)$$

(au sens des opérations de $\mathcal{G}$ sur ε), ce qui entraîne (3.1) en faisant $g^*_{ij} = (g_{ij}, \sigma_j)$.

Supposons que $g = (g_{ij})$ soit un cocycle cohomologue, dans $\mathcal{G}$, à un cocycle $h = (n_{ij})$ à valeurs dans $\mathfrak{N}$. Il existe donc une 0-cochaîne $h = (h_i : U_i \to \mathcal{G})$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ telle que, pour tout $x \in U_{ij}$:

$$(3.3) \qquad g_{ij}(x) = h_i(x) . n_{ij}(x) . h_j^{-1}(x).$$

Or les h_i induisent des sections $\sigma_i : U_i \to \varepsilon$ provenant des fonctions $\eta_i : x \to h_{ix} \mathfrak{N}_x h_{ix}^{-1}$ en posant $\sigma_i(x) = j_x^{\lambda} \eta_i$ et ces fonctions vérifient la condition de compatibilité (3.2). Le cocycle g est donc de la forme $\mu(g^*)$ où $g^* = (g_{ij}, \sigma_j)$ et ce dernier donne lieu, par l'homomorphisme $j : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^*$ à un cocycle $j(g^*) = (j(g_{ij}), \sigma_i)$ tel que :

$$j(g_{ij}) = j(h_i) . j(h_j^{-1}) .$$

Notons $h^* = (h^*_i)$ la 0-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeur dans $\mathcal{H}^*$ où $h^*_i = (j(h_i), \pi_i), \pi_i$ étant la restriction à U_i de la section principale $\pi : B \to \varepsilon$. En général une 0-cochaîne à valeurs dans un faisceau de groupoïdes ne possède pas un cobord, sauf si les unités à droite correspondent à une section globale du faisceau des unités: on dira dans ces conditions qu'il s'agit d'une 0-cochaîne *uniforme* à droite. C'est précisément le cas ici et nous voyons que l'on a:

$$j(g^*) = \delta h^* ,$$

le cobord étant défini, comme habituellement, par $\delta(h^*_i) = (h^*_i h^{*-1}_j)$ La classe de cohomologie définie par $j(g^*)$ dans $H^1(B, \mathcal{H}^*)$ est donc triviale et c'est plus précisément la classe de cohomologie triviale *principale* en appelant ainsi la classe définie par le cobord d'une 0-cochaîne uniforme à droite dont la section unité à droite est la section principale: au niveau d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ la classe de cohomologie correspondante contient le cocycle trivial principal π_{ij} tel que $\pi_{ij}(x) = \pi_x$. $x \in U_{ij}$. Réciproquement, soit $\xi \in H^1(B, \mathcal{G})$ une classe de cohomologie qui soit de la forme $\mu(\xi^*)$ où $\xi^* \in H^1(B, \mathcal{G}^*)$ telle en outre que $j(\xi^*) \in H^1(B, \mathcal{H}^*)$ soit la classe triviale principale. Dans ces conditions, il existe un recouvrement $\mathfrak{U}$ et des sections:

$$h_i : U_i \to \mathcal{G}, \qquad \sigma_i : U_i \to \varepsilon, \qquad g_{ij} : U_{ij} \to \mathcal{G},$$

les secondes étant induites par les premières er satisfaisant aux conditions suivantes: (a) (g_{ij}, σ_i) constitue un cocycle de la classe ξ^*; (b) (g_{ij}) définit donc un cocycle de la classe ξ; (c) $j(g_{ij})$ est de la forme $j(h_i h_j^{-1})$. Cela étant, considérons les sections $U_{ij} \to \mathcal{G}^*$ de la forme:

$$(h_i^{-1}, \sigma_i)\,(h_i h_j^{-1}, \sigma_j)\,(h_j, \pi_j) \text{ et } (n_{ij}, \pi_j) = (h_i^{-1}, \sigma_i)\,(g_{ij}, \sigma_j)\,(h_j, \pi_j).$$

Les premières définissent le cocycle principal trivial et les secondes, un cocycle qui a même image lorsque l'on passe de $\mathcal{G}^*$ à $\mathcal{H}^*$: ce dernier cocycle est donc à valeurs dans $\mathcal{N}^*$ et les (n_{ij}) représentant un cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans le sous-faisceau de groupes $\mathcal{N}$, lié à (g_{ij}) par la relation (3.3).

On peut donc énoncer le résultat suivant:

THEOREME 3.1. *Soient $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes (non nécessairement abéliens) et $\mathcal{N}$ un sous-faisceau quelconque de groupes, données auxquelles correspond une application canonique $i^1 \colon H^1(B, \mathcal{N}) \to H^1(B, \mathcal{G})$. Pour qu'un élément $\xi \in H^1(B, \mathcal{G})$ soit dans l'image de cette application, il faut et il suffit que, dans le diagramme suivant:*

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(B,\mathcal{N}) & \xrightarrow[i^1]{} & H^1(B,\mathcal{G}) & & \\
 & & \uparrow \mu^* & & \\
H^1(B,\mathcal{N}^*) & \xrightarrow{i^*} & H^1(B,\mathcal{G}^*) & \xrightarrow{j^*} & H^1(B,\mathcal{H}^*)
\end{array}$$

son image inverse $\mu^{*-1}(\xi)$ contienne un élément $\xi^* \in H^1(B, \mathcal{G}^*)$ envoyé par j^* sur la classe triviale principale de $H^1(B, \mathcal{H}^*)$.

REMARQUE. On notera qu'un ensemble de 1-cohomologie à valeurs dans un faisceau $\mathcal{F}$ de groupoïdes ne possède pas en général de classes privilégiées "triviales". Celles-ci supposent en effet l'existence de 0-cochaînes uniformes à droite, c'est-à-dire de sections globales du faisceau des unités; il revient au même de supposer que $H^0(B, \mathcal{F})$ est non vide.

DEUXIEME PARTIE

On se propose, dans cette seconde partie, d'aborder la cohomologie non abélienne dans le cadre de la théorie simpliciale, en cherchant à caractériser les espaces fibrés simpliciaux principaux (produits tordus) à un isomorphisme près. Pour les notions fondamentales de la théorie simpliciale, voir [1].

4. Rappels sur les produits tordus. Soient B un ensemble simplicial et G un groupe simplicial. Soient E la collection des $E_n = B_n \times G_n$. On fait alors de E un ensemble simplicial en définissant des opérateurs de face et dégénérescence du type suivant:

$$(4.1) \qquad d_o(x,y) = (d_o x, \tau(x) \cdot d_o y), \qquad (x,y) \in E_n,$$

$$(4.2) \qquad d_i(x,y) = (d_i x, d_i y), \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

$$(4.3) \qquad s_i(x,y) = (s_i x, s_i y), \qquad o \leqq i \leqq n,$$

Dans la première de ces formules τ représente une collection d'applications $B_n \to G_{n-1}$ et les opérateurs d_i, s_i ainsi définis vérifient les conditions usuelles de compatibilité à la condition nécessaire et suffisante que l'on ait:

$$(4.4) \qquad \tau s_o x = 1_n \text{ , pour tout } x \in B_n \text{ ;}$$

$$(4.5) \qquad s_i \tau = \tau s_{i+1} \text{ , } o \leqq i \text{ ;}$$

$$(4.6) \qquad (\tau d_o x) \cdot (d_o \tau x) = \tau d_1 x \text{ ;}$$

$$(4.7) \qquad d_i \tau = \tau d_{i+1} \text{ , } 1 \leqq i \text{ .}$$

Muni de la projection $p(x,y) = x$ de E sur B, l'ensemble simplicial E prend le nom de *produit tordu* de B par G et la fonction τ

$$(4.8) \qquad \tau : B_n \to G_{n-1} \text{ ;} \qquad (n \geq 1)$$

de fonction tordante. Ce produit se note souvent $E = B \times_\tau G$. On observe que la projec--tion p est une application simpliciale. Ces produits sont aussi appelés *produits principaux tordus* pour les distinguer d'objets similaires obtenus en formant les $B_n \times F_n$ où F est un ensemble simplicial sur lequel G opère à gauche.

A tout "sommet" X de B (i. e. X est un sous-ensemble simplicial de B formé des dégénérés d'un $x \in B_o$: chaque X_n contient le seul élément $x_n = s_o \dots s_o x$) correspond le sous-ensemble simplicial $X \times G$ de E et l'application canonique $y \to (x_n, y)$ de G dans $X \times G$ induit une application simpliciale:

$$i_X : G \to E .$$

On appellera *repère* en X toute application du même type:

$$h_X : G \to E$$

telle que: (a) pour $y \in G_o$, $h_X = g_o \cdot i_X(y)$ où g_o est un élément de G_o indépendant de y; (b) pour $y \in G_n$, $h_X(y) = g_n \cdot i_X(y)$, où $g_n = s_o g_{n-1}$.

Soient (E, p, B) et (E', p', B') deux produits tordus de même fibre G avec des fonctions tordantes τ et τ'. Un *homomorphisme* de l'un dans l'autre est un complet (f, g) d'applications simpliciales $f : E \to E'$, $g : B \to B'$ telles que: (a) $p' \circ f = g \circ p$; (b) $f \circ \varphi = \varphi' \circ (f \times 1)$. Ces propriétés s'expriment encore par les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[g]{} & B' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E \times G & \xrightarrow{\varphi} & E \\ {\scriptstyle f}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E' \times G & \xrightarrow[\varphi']{} & E' \end{array}$$

dans lesquels φ et φ' sont les applications canoniques par lesquelles G opère à droite sur un produit tordu (par exemple $\varphi[(x, y)g] = (x, y.g))$ et où $1 : G \to G$ est l'applica--tion identique.

La condition (a) implique que f est de la forme:

$$f(x, y) = (g(x), F_f(x, y))$$

tandis que la condition (b) permet de déterminer la forme de F_f.

En effet $(x, y) = \varphi[(x, 1), y]$ et soit $f(x, 1 = (g(x), \eta(x))$; on a donc:

$$(4.9) \qquad f(x, y) = (g(x), \eta(x).y) \text{ ou } F_f(x, y) = \eta(x).y.$$

On notera que η représente une suite d'applications $\eta : B_n \to G_n$.

En exprimant que f est simpliciale (i. e. commute avec les opérateurs faces et dégénérescences) on obtient les propriétés suivantes pour η:

$$(4.10) \qquad (\tau' gx).(d_o \eta x) = (\eta d_o x).\tau x,$$

$$(4.11) \qquad \eta d_i = d_i \eta, \qquad i \geqq 1,$$

$$(4.12) \qquad \eta s_i = s_i \eta, \qquad i \geqq o,$$

En particulier soit $B = B'$ et supposons que g soit l'identité. Une suite d'appli--cations $\eta : B_n \to G_n$ vérifiant (4.11) et (4.12) définit, au moyen de (4.10), une suite d'applications $\tau' : B_n \to G_{n-1}$,

$$(4.13) \qquad \tau' x = (\eta d_o x).\tau x.(d_o \eta x)^{-1}$$

que l'on vérifie être une nouvelle fonction tordante. Les applications $(x, y) \to (x, (\eta x).y)$ et $(x, y) \to (x, (\eta x)^{-1}.y)$ sont des homomorphismes inverses l'un de l'autre, entre $B \times_\tau G$ et $B \times_\tau G$; autrement dit, on peut énoncer le résultat.

THEOREME 4.1. *Deux fonctions tordantes τ, τ' de B à valeurs dans G induisent des produits tordus isomorphes si et seulement s'il existe une suite de fonctions $\eta : B_n \to G_n$ vérifiant (4.11) et (4.12) et telle que τ' se déduise de τ par la relation (4.13).*

De telles fonctions tordantes seront dites *équivalentes*. Un produit tordu est dit trivial s'il est isomorphe à celui qui se déduit de la fonction tordante triviale, c'est-à--dire telle que pour tout $x \in B_n$, $\tau x = 1_{n-1} \in G_{n-1}$. La fonction tordante d'un produit trivial est donc de la forme:

$$\tau x = (\eta\, d_o x)\,(d_o \eta x)^{-1}.$$

5. Interprétation cohomologique. Ceci conduit à des définitions du type suivant. Soient B un ensemble simplicial et G un groupe simplicial. On appelle, pour $p = 0, 1_n$, p-co--chaîne de B à valeurs dans G une suite de fonctions:

$$\sigma : B_n \to G_{n-p}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

pour $p = o$, $\quad s_i \sigma = \sigma s_i \quad (i \geq o)$, $\quad d_i \sigma = \sigma d_i \quad (i \geq 1)$,

pour $p = 1$, $\quad \sigma s_o = 1_n , s_i \sigma = \sigma s_{i+1} \ (i \geq o)$, $\quad d_i \sigma = \sigma d_{i+1} \ (i \geq 1)$.

Une O-cochaîne η est dite *O-cocycle* si l'on a en outre $d_o \eta = \eta d_o$; une 1-cochaîne τ est dite *1-cocycle* si elle vérifie en outre la condition (4.6). Les O-cochaînes forment un groupe $C^o(B, G)$, le produit de deux d'entre elles η, η' étant défini par $(\eta' \eta (x) = = \eta'(x) . \eta(x)$ et ce groupe opère à gauche sur l'ensemble $C^1(B, G)$ des 1-cochaînes et des 1-cocycles en désignant par $\eta . \tau$ la 1-cochaîne telle que:

$$(\eta . \tau)(x) = (\eta d_o x) . \tau(x) . (d_o \eta x)^{-1} .$$

Manifestement il y a équivalence entre les notions de 1-cocycle et de fonction tordante, entre classe d'intransitivité de 1-cocycle pour les opérations du groupe $C^o(B, G)$ et classe de fonctions tordantes équivalentes, ou encore classes de produits tordus isomor--phes. On est ainsi fondé à définir un opérateur "cobord" :

$$\delta^o : C^o(B, G) \to C^1(B, G)$$

en posant :

$$(\delta \eta)(x) = (\eta d_o x)(d_o \eta x)^{-1} ,$$

ce qui donne toujours un 1-cocycle et à noter $H^o(B, G)$, $H^1(B, G)$ respectivement le groupe $Hom(B, G)$ des applications simpliciales de B dans G et l'ensemble des classes d'intransitivité des opérations de $C^o(B, G)$ sur l'ensemble $Z^1(B, G)$ des 1-cocycles. Le dernier ensemble s'identifie à celui des classes de produits tordus isomorphes de base B, fibre G ; il contient un élément privilégié dit *"neutre"*, corres--pondant à la classe des produits principaux tordus triviaux.

On peut évidemment définir des suites exactes de groupes simpliciaux auxquelles correspondent des suites exactes analogues à celles qui interviennent en cohomologie non abélienne classique. Il y aurait lieu de généraliser la notion de produit principal tordu de manière à obtenir de nouveaux produits tordus sur lesquels opère à droite l'ana--logue simplicial d'un espace fibré de groupes. Ce dernier peut s'obtenir à partir de $B \times G$ en définissant l'opérateur d_o par:

$$d_o(x, y) = (d_o x, (\tau x) . d_o y . (\tau x)^{-1}) .$$

On obtiendrait alors une classe $\mathcal{H}^1(B, G)$ plus ample que $H^1(B, G)$ et munie d'une structure de groupoïde, comme dans [3]. Ceci conduirait alors à la construction d'un ensemble $H^2(B, G)$ analogue à celui considéré dans [4] et il conviendrait d'expliciter le lien entre ce foncteur H^2 avec celui défini par Nguyen-Dinh-Ngoc en théorie simpliciale également [7].

Bibliographie.

[1] H. CARTAN. Sur la théorie de Kan, Séminaire de l'E.N.S., 9ème année, exposé 1, 1956-57.

[2] P. DEDECKER. Extension du groupe structural d'un espace fibré, Colloque de Topologie de Strasbourg, 1955.

[3] P. DEDECKER. La structure algébrique de l'ensemble des classes d'espaces fibrés, Bull. Acad. Roy. Belgique, 42 (1956).

[4] P. DEDECKER. Sur la cohomologie non abélienne I, Can. J. Math. 12, (1960), pp. 231-251.

[5] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 135-220.

[6] A. HAEFLIGER. Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, Commentarii Math. Helv., 32 (1958) 248-329.

[7] NGUYEN-DINH-NGOC. Sur la suite exacte de cohomologie non abélienne, Comptes rendus 250 (1960) p. 3438; - Cohomologie non abélienne et classes caractéristiques, ibid. 251 (1960) p. 2453.