Joseph A. Wolf

Sur les revêtements riemanniens

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n^{o} 9, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Février 1960

SUR LES REVETEMENTS RIEMANNIENS

par Joseph A. WOLF

1. Introduction.

Soit M une variété riemanienne homogène compacte connexe; nous recherchons les variétés riemanniennes M' admettant M comme revêtement riemanrien. Rappelons qu'un *revêtement riemannien* est un revêtement d'une variété riemannienne connexe où la projection est une isométrie locale. Par suite, le groupe des automorphismes d'un revêtement riemannien $p: M \to M'$, composé des isométries $d: M \to M$ tels que $p \cdot d = p$, est un sous-groupe du groupe $I(M)$ des isométries de M. Si M est simplement connexe, le problème se ramène, d'une façon bien connue, à la détermination des sous-groupes finis de $I(M)$ sans points fixes. En général, le revêtement n'étant pas galoisien, la situation est plus compliquée. Un revêtement riemannien $p: M \to M'$ étant donné, on construit un revêtement riemannien galoisien fini $q: M'' \to M$ tel que le revêtement riemannien fini $p \cdot q: M'' \to M'$ soit galoisien. En observant que M'' est automatiquement homogène, conséquence de l'homogénéité de M, notre problème est ramené à :

Soit K un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G. On cherche les sous-groupes finis D de G tels que $D \cap ad(G)K = I$, où I est l'identité de G et $ad(G)K$ est l'ensemble des $ad(g)k = gkg^{-1}$ avec $g \in G$ et $k \in K$.

En effet, soient $G = I(M'')$ pour M'' convenablement choisi, K un sous-groupe d'isotropie de G et D le groupe du revêtement $p \cdot q: M'' \to M'$. M'' étant compact, un sous-groupe de G opère d'une façon discontinue si, et seulement s'il est fini, et ne rencontre aucun sous-groupe d'isotropie de G sauf I, i. e., ne rencontre aucun $ad(g)K$ sauf I.

EXEMPLE. Soit $M = S^n$ l'espace sphérique de dimension n et de rayon $k > 0$, c'est l'espace du revêtement riemannien universel des variétés riemanniennes complètes connexes de dimension n et à courbure sectionnelle constante k^{-2}. Ce cas particulier de notre problème est le problème classique de **Clifford-Klein** : la détermination des formes spatiales sphériques. Il est résolu par **H. Hopf** (3) et puis par **W. Threlfall** et **H. Seifert** (5) pour $n = 3$, et **G. Vincent** (7) l'a considéré pour n arbitraire. En général interviennent des problèmes arithmétiques peut-être trop difficiles.

REMARQUE. En principe, nous ne donnerons que des indications des démonstrations. Les théorèmes donnés ici sont plus ou moins contenus dans ma thèse (8). Le cas où M' est aussi homogène est considéré dans une note aux Comptes Rendus (9).

2. Rang.

Soient p un entier premier et B un groupe abélien dont le sous-groupe *p-Sylov* B_p est fini; on appellera *p-rang de B*, noté *p-rang.B*, le nombre minimal de composantes cycliques d'une décomposition de B_p comme produit de groupes cycliques. Si B est fini, on appellera *rang de B*, noté *rang. B*, le maximum des p-rangs de B (p variable); c'est le nombre minimal des composantes cycliques d'une décomposition de B comme produit de groupes cycliques. Par exemple,

$$rang.(Z_p)^h = h \quad \text{où} \quad (Z_p)^h = Z_p \times \ldots \times Z_p \; (h \; fois),$$

produit de h exemplaires du groupe cyclique (Z_p) d'ordre p.

Soit G un groupe de Lie compact; comme d'habitude, le rang $rang.G$ de G est la dimension commune des sous-groupes toroïdes maximaux de G.

THEOREME 1. *Soit K un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G.*

1°) Soient D un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$, et B, un sous-groupe de D contenu dans un tore de G; on a $rang.B \leqslant rang.G - rang.K$.

2°) Cette inégalité est la meilleure possible, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif $m(G,K)$ tel que, A étant un groupe abélien fini avec $rang.A \leqslant rang.G - rang.K$ et l'ordre de A premier avec $m(G,K)$, un tore de G contienne un sous-groupe A' isomorphe à A avec $A' \cap ad(G)K = 1$.

DEMONSTRATION. 1°) Soit T' un $ad(G)$-conjugué d'un tore maximal de K, contenu dans un tore maximal T de G qui contienne B. Il résulte de $B \cap T' = 1$ que la restriction à B de l'application $T \to T/T'$ est un monomorphisme.

Alors $rang.B \leqslant rang.(T/T') = rang.G - rang.K$.

2°) Soit T un tore maximal de G. On peut trouver un nombre fini de $(rang.K)$-tores T_i dans T tels qu'un élément de T est contenu dans $ad(G)K_o$ si, et seulement s'il est contenu dans un T_i, où K_o est la composante de l'identité de K. Puis on choisit un $(rang.G - rang.K)$-tore V dans T tel que chaque $V_i = V \cap T_i$ soit fini. L'entier $m(G,K)$ est produit des ordres des V_i avec l'ordre de K/K_o. On choisit A' dans V. C.Q.F.D.

Le Théorème 1 s'applique mieux si on connaît les sous-groupes finis de G contenus dans des tores. **A. Borel** (1) a démontré : *soient p un entier premier et G un groupe de Lie compact connexe. L'anneau $H^*(G,Z)$ de cohomologie entier n'a pas de p-torsion si et seulement si chaque sous-groupe du type $(Z_p)^h$ de G est contenu dans un tore.*

Par suite, nous avons le

THEOREME 1'. *Soient K un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G, G_o la composante de l'identité de G, p un entier premier tel que $H^*(G_o;Z)$ n'ait pas de p-torsion, D un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$, et B un sous-groupe fini abélien de D contenu dans G_o. Alors $p\text{-rang}.B \leqslant \text{rang}.G - \text{rang}.K$.*

On doit remarquer ici que **A. Borel** (2) a clarifié la situation de la p-torsion: *Soient p un entier premier, G un groupe de Lie compact connexe, G_{ss} la partie semi-simple de G, $a: G' \to G_{ss}$ le revêtement universel de G_{ss} et B_G le classifiant de G.*

1°) Alors les conditions suivantes sont équivalentes : (a) *$H^*(G;Z)$ n'a pas de p-torsion* (b) *$H^*(B_G;Z)$ n'a pas de p-torsion ;* (c) *$H^*(G_{ss};Z)$ n'a pas de p-torsion ;* (d) *$\pi_1(G_{ss})$ n'a pas d'élément d'ordre p et aucun facteur simple de G' n'a de p-torsion dans H^*.*

2°) Si K est un facteur simple de G', il a une p-torsion dans H^* si et seulement si

(a) $p = 2$ *et* $K = E_8, E_7, E_6, F_4, G_2,$ *ou* $Spin(n)$ *avec* $n \geqslant 7$,

(b) $p = 3$ *et* $K = E_8, E_7, E_6$ *ou* F_4, *ou*

(c) $p = 5$ *et* $K = E_8$.

En utilisant un autre résultat de **A. Borel** (2): *Soit x un élément d'un groupe de Lie compact connexe H, où $\pi_1(H)$ n'a pas d'élément d'ordre fini. Le centralisateur de x dans H est connexe.* On peut démontrer le

THEOREME 2. *Soit K un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact connexe G tel que $\text{rang}.G - \text{rang}.K = 1$. Soient D un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$, B un sous-groupe abélien de D, et p un entier premier. Alors $p\text{-rang}.B \leqslant p\text{-rang}.\pi_1(G)+1$, et si $p\text{-rang}.\pi_1(G) = 2$, $p\text{-rang}.B \leqslant 2$. En particulier, si la partie semi-simple de G est simplement connexe, chaque sous-groupe abélien de D est cyclique, les sous-groupes impairs de Sylov de D sont cycliques, et les sous-groupes 2-Sylov de D sont soit cycliques soit des groupes quaternioniens Ω^{2^a} donnés par*

$$A^{2^{a-1}} = 1, \quad A^{2^{a-2}} = B^2, \quad BAB^{-1} = A^{-1}, \quad a \geqslant 3.$$

REMARQUE. Les groupes finis où tout sous-groupe abélien est cyclique, ont été déterminés par **H. Zassenhaus** (10) et **M. Suzuki** (6).

3. Arithmétique. Soient K un sous-groupe fermé connexe de rang k d'un groupe de Lie compact connexe G de rang n, $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ le groupe de Weyl de G relatif à un tore maximal T, $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ une base intégrale de l'algèbre $\mathfrak{A}$ de T (c'est-à-dire, une base de $\mathfrak{A}$ telle que $exp(\Sigma_s a_s X_s) = 1$ si et seulement si chaque a_s est entier), T' un conjugué dans T d'un tore maximal de K, et $\mathfrak{A}_j$ l'algèbre k-*tore* $T_j = w_j(T')$. T_i étant fermé dans T, $\mathfrak{A}_i$ est l'intersection de $n-k$ hyperplans $\Sigma_s v_{ijs} x_s = 0$, où les v_{ijs} sont rationnels et où les x_s sont des coordonnées dans $\mathfrak{A}$ relatives à $\mathfrak{X}$. Une normalisation évidente transforme chaque $V_{ij} = \{v_{ij_1}, v_{ij_2}, \ldots, v_{ij_n}\}$ en un ensemble d'entiers relativement premiers.

On appellera *paramètres angulaires de K dans G relatifs à $\mathfrak{X}$*, la collection des $(n-k)q$ ensembles V_{ij} d'entiers relativement premiers.

THEOREME 3. *Soit V_{ij} les paramètres angulaires d'un sous-groupe fermé connexe K de rang k dans un groupe de Lie compact connexe G de rang n, relatifs à un choix $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ d'une base intégrale de l'algèbre $\mathfrak{A}$ d'un tore maximal de G. Soit $X = \sum_s a_s X_s$ tel que $exp(X)$ soit $ad(G)$-conjugué au générateur d d'un sous-groupe cyclique D de G d'ordre m. Alors chaque $b_s = ma_s$ est entier; et $D \cap ad(G)K = 1$ si et seulement si chaque $V_i = \{m, \sum_s v_{i1s} b_s, \sum_s v_{i2s} b_s, \ldots, \sum_s v_{i\,n-k\,s} b_s\}$ est un ensemble d'entiers premiers.*

Il y a des cas où le Théorème 3 peut être simplifié. Supposons que le groupe de Weyl de G opère sur $\mathfrak{X}$ par des permutations signées $X_s \to \pm X_{s'}$. En utilisant les notations introduites avant la définition des paramètres angulaires, on peut supposer que l'algèbre $\mathfrak{A}'$ de T' est l'intersection de $n-k$ hyperplans $\sum_s u_{js} x_s = 0$. On appellera *paramètres canoniques de K dans G* les $n-k$ ensembles $U_j = \{u_{j1}, \ldots, u_{jn}\}$ d'entiers relativement premiers. On fait opérer W sur des n-uples d'une façon donnée par son action sur $\mathfrak{X}$: par des permutations signées. On peut alors supposer que les $V_{ij} = w_i(U_j)$ sont les paramètres angulaires de K dans G relatifs à $\mathfrak{X}$.

EXEMPLES. 1°). $G = U(n)$, le groupe unitaire. Une base intégrale $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ du tore maximal T des matrices diagonales, est donnée par $exp(\sum_s a_s X_s) = diag\{e^{2\pi i a_1}, \ldots, e^{2\pi i a_n}\}$, où $i^2 = -1$. Le groupe de Weyl de G relatif à T opère sur $\mathfrak{X}$ comme le groupe de toutes les permutations, c'est-à-dire le groupe symétrique.

2°). $G = Sp(n)$, le groupe symplectique, composé des éléments $A \in U(2n)$, tels que $AJA = J$ ou $J^2 = -I_{2n}$. Un tore maximal T est donné par les éléments $\begin{pmatrix} B & O \\ O & \bar{B} \end{pmatrix}$, où B est diagonal et $\bar{B}$ est le conjugué complexe de B. Une base intègre $\mathfrak{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de l'algèbre de ce tore est donnée par

$$exp(\sum_s a_s X_s) = diag\{e^{2\pi i a_1}, \ldots, e^{2\pi i a_n}, e^{-2\pi i a_1}, \ldots, e^{-2\pi i a_n}\}.$$

Le groupe de Weyl opère sur $\mathfrak{X}$ par toutes les permutations signées.

3°) $G = SO(q)$, $q = 2n$ ou $2n+1$, le groupe orthogonal spécial.

Soit $R(t)$ la rotation $\begin{pmatrix} cos(2\pi it) & sin(2\pi it) \\ -sin(2\pi it) & cos(2\pi it) \end{pmatrix}$. Un tore maximal T de G est l'ensemble des matrices $diag\{R(a_1), R(a_2), \ldots, R(a_n), (1)\}$ où le (1) n'apparaît que pour $q = 2n-1$. Une base intégrale de l'algèbre de ce tore est donnée par

$$exp(\sum_s a_s X_s) = diag\{R(a_1), \ldots, R(a_n), (1)\}.$$

Le groupe de Weyl opère sur cette base $\mathfrak{X}$ par toutes les permutations signées si $q = 2n+1$, et par toutes les permutations signées où le nombre des changements de signes est pair, si $q = 2n$.

Si K est un sous-groupe fermé connexe dans $G = U(n)$, $Sp(n)$ ou $SO(q)$, il sera convenu que les paramètres canoniques de K dans G sont relatifs à la base $\mathfrak{X}$ explicitée plus haut. Si K est un sous-groupe fermé connexe du groupe unitaire spécial $SU(n) \subset U(n)$, on peut supposer qu'un des paramètres canoniques de K dans $U(n)$ est $\{1, 1, \ldots l\}$; on appellera les autres les paramètres canoniques de K dans $SU(n)$. Si K est un sous-groupe fermé connexe du groupe $Spin(q)$, $f: Spin(q) \to SO(q)$ est l'application canonique et U_{jK} sont les paramètres canoniques de $f(K)$ dans $SO(q)$; on appellera les U_j les paramètres canoniques de K dans $Spin(q)$.

Soit K un sous-groupe fermé connexe de rang $n-1$ d'un groupe classique $G = U(n)$, $SU(n+1)$, $Sp(n)$, $SO(2n$ ou $2n+1)$ ou $Spin(2n$ ou $2n+1)$. Soit $U = \{u_s\}$, le paramètre canonique de K dans G. Le groupe de Weyl de G laisse invariante la parité du produit des u_s. On dira que K est *pair* ou *impair* selon que le produit des u_s est pair ou impair. Si K n'a qu'un seul élément, on dira qu'il est impair.

THEOREME 4. *Soit K un sous-groupe fermé connexe de rang $n-1$ dans $G = SO(2n$ ou $2n+1)$. Si K est impair, $\pi_1(G/K) = Z_2$ et tout 2-groupe diédrique D a un isomorphe $D' \subset G$ tel que $D' \cap ad(G)K = 1$. Si K est pair et D est un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$, alors chaque sous-groupe abélien de D est cyclique, et G/K est simplement connexe.*

THEOREME 5. *Soit K un sous-groupe fermé connexe de $G = U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(2n$ ou $2n+1)$ ou $Spin(2n$ ou $2n+1)$ tel que rang.G - rang.$K = 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G a un sous-groupe D de type Ω^{2a}, où $D \cap ad(G)K = 1$.*

(b) *G a un sous-groupe D_a de chaque type Ω^{2a}. où $D_a \cap ad(G)K = 1$.*

(c) *$G = U(n)$, $SU(n)$ ou $SO(2n$ ou $2n+1)$, n est pair et q est impair;*

$G = Sp(n)$ et q impair ou K impair;

$G = Spin(2n$ ou $2n+1)$ et n pair et q impair ou K impair.

q est le nombre des éléments impairs du paramètre canonique de K dans G.

Si les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites, K est pair si $G = SO(2n$ ou $2n+1)$ et D est un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$; alors chaque sous-groupe Sylov de D est cyclique.

THEOREME 6. *Soient K un sous-groupe pair de $G = U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(2n)$ ou $Spin(2n)$ (alors K est fermé et connexe, et rang.G - rang.$K = 1$) et D, un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$. Soit d un élément d'ordre 2 dans D. Alors d est central dans G et c'est le seul élément d'ordre 2 dans G. De plus, n est pair si $G = SU(n)$.*

Ces trois théorèmes sont des applications du théorème 3.

Le théorème 4 complète le théorème 2 ; l'intérêt du théorème 5 provient du fait que les groupes finis ayant tous les sous-groupes de Sylov cycliques sont de structure très simple ((11), p. 175).

Le théorème 3 nous donne aussi :

THEOREME 7. *Soit G un groupe classique $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(q)$ ou $Spin(q)$. Soit K un sous-groupe fermé connexe de rang $rang.G - 1$ et à paramètre canonique $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$. Soit D un sous-groupe fini de G dont l'ordre est le produit de deux nombres premiers, ou bien est premier avec $2n (q = 2n$ ou $2n+1)$, tel que $D \cap ad(G)K = 1$. Alors D est cyclique.*

4. Caractéristique. Jusqu'ici nous avons évité le cas où $rang.G = rang.K$. D'abord, soit K un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact connexe G. On sait (4) que la caractéristique $\chi(G/K)$ d'Euler-Poincaré est $\geqslant 0$, et $\chi(G/K) > 0$ si et seulement si $rang.G = rang.K$. Il en résulte, en tenant compte du théorème 1 :

THEOREME 8. *Soit M une variété riemannienne homogène compacte connexe de caractéristiques $\chi(M) \neq 0$. Alors, il n'y a qu'un nombre fini, à une isométrie près, de variétés riemanniennes admettant M comme revêtement riemannien.*

DEMONSTRATION. Le groupe fondamental de M étant fini, on peut supposer M simplement connexe. Soit G_o la composante de l'identité de $G = I(M)$, soit K un sous-groupe d'isotropie de G et soit D un sous-groupe fini de G tel que $D \cap ad(G)K = 1$. Il suffit de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes D à un automorphisme intérieur de G près. D'après le théorème 1, un tel groupe D est isomorphe à un sous-groupe du groupe fini G/G_o. Par suite, il suffit d'appliquer un théorème de Mostow d'après lequel un groupe de Lie compact ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes isomorphes à un groupe fini donné, à un automorphisme intérieur près.

Bibliographie.

[1] A. BOREL, "Fixed point theorems for elementary abelian groups, 1," *Seminar on Transformation Groups, Notes. The Institute for Advanced Study, Princeton, 1959.*

[2] A. BOREL, "Commutative subgroups and torsion in compact Lie groups," *à paraître.*

[3] H. HOPF, "Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem," *Math. Annalen, t.95 (1925), p. 313-339.*

[4] H. SAMELSON, "On curvature and characteristic of homogeneous spaces," *Michigan Math. Journal, t.5 (1958), p. 13-18.*

[5] W. THRELFALL et H. SEIFERT, "Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche-" *Math. Annalen, t.104 (1930) p. 1-70 et t.107 (1932) p. 543-586.*

[6] M. SUSUKI, "On finite groups with cyclic ...," *American Jour. Math, t.77 (1955), p.657-691.*

[7] G. VINCENT, "Les groupes linéaires finis sans points fixes," *Comm. Math. Helv. t.20 (1947), p. 117-171.*

[8] J. WOLF, "The manifolds covered by a riemannian homogeneous manifold," *à paraître dans American Jour. Math.*

[9] J. WOLF, "Sur la classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante," *à paraître aux Comptes Rendus.*

[10] H. ZASSENHAUS, "Uber endliche Fastkörper," *Hamburg Abhandlungen, t.11 (1934/35), p.187-220.*

[11] H. ZASSENHAUS, The theory of groups, *2e édition, New-York, 1958.*