Shiing-Shen Chern

Sur les métriques riemanniennes compatibles avec une réduction du groupe structural

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 8, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Janvier 1960

SUR LES METRIQUES RIEMANNIENNES COMPATIBLES AVEC UNE REDUCTION DU GROUPE STRUCTURAL

par Shiing-shen CHERN

Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe $\geqq 3$. L'espace fibré tangentiel de M est un espace fibré à fibre l'espace vectoriel réel T à n dimensions et à groupe structural $GL(n, R)$. On dit que M a une Γ-structure, si le dernier est réduit à un sous-groupe Γ de $GL(n, R)$. Le groupe Γ opère dans la fibre typique T et induit des opérations linéaires dans l'espace dual T^* de T et dans les espaces des covecteurs extérieurs $\Lambda^q(T^*)$, $0 \leqq q \leqq n$. Soit W un sous-espace de $\Lambda^q(T^*)$, qui est stable par rapport à Γ. Alors on peut définir sur une variété M munie d'une Γ-structure la notion de forme différentielle extérieure de degré q et du type W. Si Γ est de plus un sous-groupe du groupe orthogonal $O(n)$, l'espace $W^{\perp} \subset \Lambda^q(T^*)$, qui est orthogonal à W, est aussi stable. On peut alors définir sur les formes de degré q de M l'opérateur de projection P_W.

Prenons un repère dans T et appelons repères admissibles tous ceux qui s'en déduisent par les opérations de Γ. Un corepère admissible est par définition le dual d'un repère admissible. Si M a une Γ-structure, on peut, d'une manière évidente définir les repères ou les corepères admissibles sur M.

A une Γ-structure sur M, avec $\Gamma \subset O(n)$, est associée une métrique riemannienne. Nous considérons les variétés M munies d'une Γ-structure, $\Gamma \subset O(n)$, satisfaisant à une des trois conditions suivantes, qui sont d'ailleurs équivalentes entre elles :

1) Le groupe d'holonomie homogène de la connexion de Levi-Civita (de la métrique riemannienne associée) est Γ ou un sous-groupe de Γ.

2) par le transport par parallélisme de Levi-Civita les repères admissibles restent admissibles.

3) Il existe une connexion de torsion nulle, dont le groupe structural est le groupe linéaire non homogène dont Γ est la partie homogène.

Nous appellerons holonome une telle Γ-structure. Bien entendu, la géométrie riemannienne classique est un cas particulier, avec $\Gamma = O(n)$.

THEOREME FONDAMENTAL. *Soit M une variété avec une Γ -structure holonome. L'opérateur P_W défini ci-dessus commute avec l'opérateur de Laplace-de Rham Δ, c'est-à-dire : $\Delta P_W = P_W \Delta$. De plus, si η est une forme différentielle extérieure invariante par Γ, l'opérateur multiplication extérieure par η commute aussi avec Δ.*

Dans le cas où M est compact et orienté ce théorème donne une analyse fine de la cohomologie à coefficients réels de M (via les formes harmoniques de Hodge).
Voici quelques exemples :

Exemple 1. $n = 2m$, $\Gamma = U(m)$, considéré comme un sous-groupe de $SO(2m)$. C'est la formulation réelle de la géométrie kählerienne. On peut déduire du théorème fondamental les conséquences topologiques connues sur les variétés kähleriennes compactes.

Exemple 2. $\Gamma = SO(q) \times SO(n-q)$. Géométriquement cela signifie qu'il existe un champ de q-plans orientés sur M, qui sont parallèles par rapport au parallèlisme de Levi-Civita. On déduit du théorème fondamental une analyse de la cohomologie réelle de M. En particulier, il s'en suit que le q-ième nombre de Betti b_q de M est $\geqq 1$. L'analyse du cas où $q = 1$ donne l'inégalité suivante $b_2 \geqq b_1 - 1$.

L'utilisation des formes harmoniques donne aussi des conséquences concernant la structure multiplicative de cohomologie de M, et en particulier l'indice (au sens topologique). En effet, soit $n = 4k$. L'opérateur $*$ définit un endomorphisme linéaire dans $\Lambda^{2k}(T^*)$ et on a $\Lambda^{2k}(T^*) = W_1 \oplus W_2$, où W_1(resp. W_2) est le sous-espace de tous les éléments de $\Lambda^{2k}(T^*)$ invariants par $*$ (resp. transformés en éléments opposés par $*$). Soit b_i la dimension de l'espace des formes harmoniques de degré $2k$ et du type W_i, $i = 1, 2$. Alors l'indice de M est égal à b_1-b_2. De ce théorème on déduit par une voie purement algèbrique le théorème d'indice de Hodge pour les variétés kähleriennes compactes.

Mentionnons l'application suivante : Soit M une variété compacte et orientée de dimension $4k$ avec la propriété qu'il existe $2k$ champs de vecteurs linéairement indépendants qui sont parallèles par rapport à une métrique riemannienne. Alors l'indice de M est nul.

Référence :

CHERN S., On a generalization of Kähler geometry, Lefschetz Jubilee Volume, 103-121, Princeton, et un autre article qui sera publié prochainement.