Séminaire de topologie et géométrie différentielle

J. P. Benzecri

Variétés localement affines

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n^{o} 7, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris

SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Mai 1959

VARIETES LOCALEMENT AFFINES

par J.P. BENZECRI

Ce travail a pour objet un problème posé par M. C. Ehresmann et M. S.S. Chern : comparer les propriétés topologiques des variétés localement affines à celles, bien connues, des variétés localement euclidiennes.

Les résultats exposés ici constituent la thèse de Ph. D soutenue par l'auteur devant un jury de l'Université de Princeton composé de Messieurs

ARTIN

KODAIRA

MILNOR

A tous les Maîtres de cette Université, et particulièrement au Professeur K. KODAIRA qui a dirigé son travail, au Professeur S.S. CHERN qui l'a aimablement conseillé, aux Directeurs du Graduate College, à M. C. EHRESMANN qui lui a permis d'exposer et de publier ce travail dans le cadre de son séminaire, il est heureux d'exprimer ici sa respectueuse gratitude.

RESUME

L'étude des variétés localement affines, trouve dans celle des variétés localement Euclidiennes son origine et ses méthodes. D'un voisinage d'un point ou d'une courbe d'une variété métrique, l'on peut faire sur le plan ou l'espace euclidien une carte isométrique. Développons, à partir d'un tel voisinage la variété V sur l'espace : deux cartes d'un même voisinage se déduisent l'une de l'autre par un déplacement, qui correspond à la classe d'homotopie du chemin c sur V, utilisé pour prolonger la carte. Ainsi, le développement commencé par un petit voisinage, donne du revêtement universel de V une application localement isométrique dans l'espace euclidien ; on démontre que cette application est biunivoque, et que V est le quotient de l'espace euclidien par le groupe des déplacements, qui associent deux cartes d'un même voisinage, obtenues dans notre développement.

Pour les variétés affines, la situation est plus complexe : le revêtement universel ne s'applique pas nécessairement sur l'espace affine, il ne s'applique pas nécessairement biunivoquement sur son image dans cet espace : en fait, classer ces applications est un problème ouvert.

Sur une variété de dimension 2, l'on peut tracer des lignes, ou résections, telles que les points en dehors de ces lignes forment un polygone p curviligne simplement connexe, dont la frontière ait pour côtés chaque ligne comptée deux fois, et n'ait pour sommet qu'un seul point, compté plusieurs fois. Le polygone d'une variété métrique peut être développé sur le plan : étant simplement connexe, le polygone correspond biunivoquement à son développement ; les côtés sont des lignes égales par paires ; la somme des angles aux sommets, fragments du voisinage d'un seul point de V, est 360° ; comme le périmètre peut être réduit sans rebroussement à un cercle de rayon nul, la rotation de sa tangente sur un tour complet, vaut 360°. Il en résulte que le polygone doit être un quadrilatère.

Dans le cas affine, il n'y a plus en général, de correspondance biunivoque ; mais le développement d'un point reste bien défini, et la rotation de la tangente au périmètre, est, quelle que soit la métrique compatible introduite, 360°. Les côtés associés, toutefois, ne sont que linéairement équivalents, non égaux, ce qui complique l'évaluation des rotations : l'on a des inégalités, faisant intervenir la mesure en demi tours de la courbure des côtés, et le résultat final est le même : topologiquement, les surfaces affinement plates compactes sont le tore et la bouteille de Klein.

Ce fait topologique, permet d'étudier complètement le groupe des transformations qui associent deux cartes d'un même voisinage, obtenues dans un même prolongement, car ce groupe est une représentation affine du groupe fondamental, que nous connaissons maintenant.

De la forme des groupes, il résulte que les surfaces compactes possèdent une structure plus riche que la structure affine. Cette structure permet d'achever la classification, en décomposant les surfaces en un nombre fini de parties, sur lesquelles une structure métrique est canoniquement définie.

AFFINALLY FLAT VARIETES

The study of locally flat affine varities originates in that of metrically flat varieties. For these varieties, there exists of some neighbourhood of any point, an isometric map in the euclidian space. We may try to extend such a map to the whole variety, by developing in the euclidian space the various curves originating in the region already mapped. It turns out that, of one given region, we will get by prolongation various mappings, differing from one another by an isometric transformation, associated to the homotopy class of the path connecting the two maps. The development besides, covers the whole of the euclidian space : it is a one to one representation of the universal covering of the variety, which therefore turns out to be the quotient of the euclidian space by the group of isometric transformations connecting two maps of a same region.

For affine varieties, the universal covering does not always map over the whole space ; the mapping is not always one to one. Actually, in dimensions higher than two, the classification of such mappings is an open problem.

On a two-dimensional variety, lines may be drawn, the so called resections, such that the points out of these lines make up a curve-sided connected polygone whose boundary is each line counted twice, and has actually only one vertex counted several times. The polygone of a metric surface can be developed on the plane : being simply connected, it is mapped one to one ; the sides are pairs of equal lines ; the sum of the angles at the vertices, which are obtained by splitting the neighbourhood of one only point on the surface, is 360° ; as the boundary can be reduced without cusps to a small circle, the rotation of the tangent on the boundary is 360°. The polygone, consequently, must be 4-sided.

In the affine case, the mapping is not any more one to one ; the development of one point, however, remains well defined, owing to the simple connectedness of the polygone ; the rotation of the tangent is, whatever may be the quadratic form chosen for a metric, 360°. The coupled sides are not equal, but they are linearily equivalent, which makes more involved the evaluation of the corresponding rotations : one comes to inequalities, involving the mesure in half-turns of the curvature of sides, and finally, the result is the same : topologically, compact affinally flat surfaces can be the torus or the Klein bottle.

This topological fact allows us to study completely the group of the transformations connecting two different maps of a same open set obtained by prolongation : this group is an affine representation of the fondamental group, which is now well known.

From the nature of these groups, it comes out that the structure of the surface is richer than it was expected : classification can be completed, using a decomposition of the surfaces in a finite number of components on each of which a metric can be canonically defined.

CHAPITRE PREMIER

VARIETES LOCALEMENT AFFINES

Nec me animi fallit scientiarum obscura reperta
Difficile illustrare Latinis versibus esse.
Lucr. I

Nous indiquerons d'abord comment peut être donnée une variété localement affine (ou euclidienne) puis, cherchant à caractériser, parmi les diverses données, celles qui construisent une même variété, nous donnerons une définition intrinsèque. Pour relier cette définition à la donnée constructive, nous effectuerons alors une triangulation particulière.

1. Définition constructive. Sur un espace topologique V, nous donnerons une structure de variété de dimension n localement affine, conforme ou euclidienne, au moyen d'un recouvrement par une famille d'ouverts U_i, et d'un système de représentations biunivoques et bicontinues f_i des U_i sur un ouvert de R^n, telles que l'on ait les conditions de raccordement des cartes :

$$f_i(U_i \cap U_j) = a_{ij} f_j(U_i \cap U_j)$$

où a_{ij} est une transformation de R^n dans R^n, définie sur un ouvert, et appartenant à une certaine classe. Selon que cette classe est celle des transformations affines, conformes ou orthogonales, nous dirons que la variété est localement affine, conforme ou euclidienne. Et quoique l'on puisse définir une infinité de telles classes, nous n'aurons en vue que les variétés localement affines et les variétés localement euclidiennes.

2. Germes d'application. Cette notion intervenant dans la définition intrinsèque, nous rappellerons quelques résultats. Soient V et R deux espaces, V topologique ; $C(V,R)$, une classe d'applications de V dans R, chacune définie sur un ouvert de V appelé son support ; p, un point de V et $C_p(V,R)$, la sous-classe des applications de C dont le support contient p. On appelle germe d'application de C au-dessus de p, ou jet, un élément du quotient de C_p par la relation d'équivalence suivante :

Deux applications qui coïncident en un voisinage U de p dans V, ont même germe en p.

On appelle fibre l'ensemble des jets au-dessus d'un même point. Sur l'espace G, réunion de toutes les fibres au-dessus de V, l'on définit une topologie :

Soit H une partie de G, un germe g au-dessus de p est intérieur à H s'il existe une fonction f de germe g, dont les germes au-dessus d'un voisinage W de p appartiennent à H.

Cette notion d'intériorité conduit effectivement à une topologie : elle définit des ouverts qui vérifient trivialement la propriété de réunion ; la propriété d'intersection résulte de la définition du germe : soit g de H et H' ; f et f' de germe g coïncident sur U ; les germes de f au-dessus de W sont dans H, ceux de f' au-dessus de W' sont dans H' : les germes communs de f et f' au-dessus de $U \cap W \cap W'$ sont donc dans $H \cap H'$. Enfin, si p est intérieur à H, H contient un ouvert contenant p.

On appelle projection ou source l'application P de G dans V qui fait correspondre à tout germe le point au-dessus duquel il est défini ; ce point est appelé la source du germe (jet). P est continue. On appelle image ou but l'application I de G dans R, qui associe à g, jet au-dessus de p d'une fonction f, le point $f(p)$: comme ce point appelé but du jet ne dépend pas de la fonction f choisie parmi celles de germe g, I est bien définie. Si l'espace R est topologique, et que les fonctions de classe C sont continues, l'application I est continue.

Soit W un sous-ensemble de V : on appelle section au-dessus de W, une application S, biunivoque et bicontinue de W dans V, associant à un point p un germe $S(p)$, de la fibre au-dessus de ce point : $P.S = 1$. Par tout germe g au-dessus de p, l'on peut définir une section au-dessus d'un voisinage de p, définie par une fonction f de germe g. De l'ensemble $S(W)$, nous disons par abus de langage qu'il est une section au-dessus de W. Deux sections ayant un germe en commun, ont en commun un voisinage de ce germe ; les sections au-dessus des ouverts de V forment une base des ouverts de G.

Soit A un groupe de transformations de R dans R, tel que si a est dans A, et c dans $C(V,R)$, ac soit dans C. Le groupe A opère continûment sur G ; il laisse chaque fibre invariante ; il transforme une section au-dessus de W en une section au-dessus de W.

3. Définition intrinsèque. Soit V un espace topologique localement homéomorphe à R_n ; soit $C(V,R_n)$, la classe des applications biunivoques et bicontinues d'un ouvert de V sur un ouvert de R_n, soit G l'espace des jets de ces applications ; soit A un groupe d'isomorphismes continus de R_n sur R_n.

Une structure de A variété locale affine au-dessus de V, est définie par un ouvert F de G, globalement invariant par le groupe A, et tel que A opère transitivement et simplement sur la partie de chaque fibre contenue dans F.

C'est-à-dire que l'ouvert F, jouissant de ces propriétés, est un espace fibré de base V, de fibre l'ensemble A muni de la topologie discrète et de groupe A, toujours muni de cette topologie.

Nous considérerons le groupe A des transformations affines, et celui des déplacements, pour définir les variétés localement affines ou euclidiennes. Comme toute transformation de ces groupes, autre que l'unité, transforme un jet en un jet distinct, A opère bien simplement sur la fibre.

A toute donnée de variété localement affine par un système d'ouverts et de cartes, nous associerons un fibré F, et identifierons deux structures qui conduisent au même fibré. A tout fibré R sur une variété V, nous associerons un système d'ouverts et de cartes.

Construisons F : au-dessus de chaque U_i on considère l'ensemble F_i des germes de f_i et de toutes les fonctions af_i où a parcourt A. La section ensemble des germes de f_i est un ouvert ; donc F_i est ouvert ; de plus il est globalement invariant par A, qui opère simplement et transitivement sur ses fibres. Au-dessus d'un point commun à U_i et U_j, F_i et F_j contiennent les mêmes germes, puisque d'après les conditions de raccordement l'on a :

$$ag_i = aa_i^j g_j \qquad \text{dans } F_j$$

$$ag_j = aa_j^i g_i \qquad \text{dans } F_i$$

La réunion des F_i est donc le fibré F cherché.

Construction des U_i : F est supposé donné sur V dénombrable à l'infini ; l'on peut au-dessus de chaque point p de V choisir un germe g dans F, et par ce germe mener dans F une section S au-dessus d'un voisinage w de p : $PS(W) = W$. Considérons un recouvrement de V au moyen de tels W. Nous démontrerons qu'il existe un recouvrement $)U($, subordonné à $)W($ et tel que l'intersection de deux U soit connexe. Soit $f_i(U_i) = IS_i(U_i)$: l'existence de transformations de raccordement résultera du théorème suivant :

THEOREME I. *Deux sections au-dessus d'un même connexe tel que $U_i \cap U_j$ ne diffèrent que par une transformation du groupe A.*

4. Géométrie affine de V. Nous démontrerons un résultat plus général que (I), et l'utiliserons pour justifier quelques définitions géométriques naturelles.

Remarquons que F est un revêtement de V, c'est-à-dire : $P(F) = V$ et tout point p de V admet un voisinage W tel que $P^{-1}(W)$ soit la réunion d'un ensemble discret de composantes isomorphes à W : si SW est une section au-dessus de W, $P^{-1}(W)$ est la réunion des aW, où a parcourt A.

THEOREME II. *Toute application continue d'un connexe B dans un recouvrement K de V est complètement déterminée par la donnée de sa valeur en un point b° de B, et de la fonction projection, application de B dans V.*

En effet, soient donc Φ et Φ', deux applications continues de B dans K, telles que $P_\circ \Phi = P_\circ \Phi' = f$; $\Phi(b^\circ) = \Phi'(b^\circ)$: on montre aisément que Φ et Φ' coïncident sur un ensemble ouvert et fermé de B.

Soient maintenant S et S' deux sections de F au-dessus d'un même connexe W ; $S(p) = g$, $S'(p) = g'$; $g' = ag$. D'après le théorème II, $aS = S'$ c'est le théorème I.

Il en résulte en particulier que l'image $IS(W)$ de $S(W)$, que nous appellerons, par abus de langage image de W, et l'image $IS'(W)$ ne diffèrent que par une affinité. L'on peut donc sur W définir les éléments locaux de la géométrie affine, (ou si A est le groupe orthogonal, de la géométrie euclidienne) : segment de droite, portion de variété linéaire, polyèdre, cellule ; élément linéaire tangent à une sous-variété, ordre de contact, invariants affins analogues à la courbure ; et aussi ensembles convexes : un ensemble Q est convexe, s'il existe au-dessus une section $S(Q)$, telle que $IS(Q)$ soit convexe. On a la proposition (1) :

Si au-dessus de la réunion de deux convexes Q et Q' est définie une section, alors $Q \cap Q'$ est connexe et convexe.

5. Triangulation. Nous construirons maintenant sur toute variété V, dénombrable à l'infini, une décomposition cellulaire $)T($, finie si V est compacte, et nous associerons à chaque T_i un ouvert U_i le contenant tel qu'il existe une section $S(U_i)$ et que l'intersection de deux U soit connexe.

Pour cela associons à chaque point p un voisinage W_p, tel qu'il existe une section $S_p(W_p)$, et découpons dans W_p un polyèdre ouvert Y_p, tel que p soit dans Y_p et que $\overline{Y}_p$ soit intérieur à W_p.

Puisque V est localement compacte dénombrable à l'infini, V peut être engendrée comme réunion d'une suite dénombrable d'ouverts V_n tels que $\overline{V}_n$ soit compacte et intérieur à V_{n+1}. Désignons par D_n le compact $\overline{V}_{n+1} - V_n$: il existe de D_n un recouvrement fini par des Y_j^m tels que $Y_j^m \cap V_{m-1}$ soit vide. L'ensemble de tous les X_j d'indice m quelconque, est un recouvrement de V tel qu'un Y_j donné ne soit coupé que par un nombre fini d'autres Y du recouvrement. Nous choisirons une section S_j, au-dessus du W_j contenant chaque Y_j.

A chaque point p, associons la fonction $p(j)$ ainsi définie :

$$p(j) = 0 \quad \text{si } p \text{ est dans } Y_j,$$

$$p(j) = 1 \quad \text{si } p \text{ n'est pas dans } Y_j.$$

A tous les points p d'une composante connexe T du sous-ensemble ouvert de V complémentaire de la réunion des frontières des polyèdres Y_j, correspond la même fonction $p(j)$: d'où il résulte en particulier que un point de T est dans Y_j, Y_j contient T et W_j contient $\overline{T}$. Chacune de ces composantes connexes est en particulier contenue toute entière dans un Y_j : elle a sur R_n une image biunivoque, et cette image est un polyèdre. Nous sous-décomposerons les polyèdres en cellules, triangles, tétraèdre etc., selon la dimension, et garderons pour ce système, la notation $)T($. $)T($ est une triangulation de V, c'est-à-dire que la réunion des cellules et de leurs frontières est la variété V toute entière, et que deux T n'ont pas de x points intérieurs communs.

Considérons deux cellules T_k, T_l ayant un point frontière p en commun ; ce point p est intérieur à un polyèdre Y_j du recouvrement considéré plus haut : d'après une remarque déjà faite W_j, voisinage de $\overline{Y}_j$ contient $\overline{T}_k$ et $\overline{T}_l$. Choisissons dans W_j deux voisinages connexes convexes U'_{kl} et U'_{lk} de $\overline{T}_k$ et $\overline{T}_l$ respectivement ; l'intersection de la famille finie des U'_{kl}, l'indice l parcourant l'ensemble des cellules contigues à T_k sera un voisinage ouvert U_k de $\overline{T}_k$, et la famille des U_k est un recouvrement du type cherché.

CHAPITRE DEUX

REPRESENTATION DU GROUPE FONDAMENTAL

Ma bisogna anco, prima ch'io ne parla
Orl. Fur. XXXII

Comme préliminaire à l'étude des variétés localement affines, nous étudierons dans ce chapitre la structure d'une composante connexe K du revêtement F de V précédemment défini : au-dessus d'un point de V, K contient une fibre de germes qui diffèrent par des affinités pouvant fournir diverses représentations du groupe fondamental H de V. L'image de I est, dans le cas des variétés localement euclidiennes, un isomorphisme de K sur l'espace R^n. Il apparaît, dès la dimension 2, qu'il n'en est pas nécessairement de même pour une variété localement affine.

1. Théorèmes de relèvement. THEOREME I. *Soit $f(t)$ une application continue du segment $(0,1)$ dans V : l'on peut construire $\Phi(t)$ continue à valeurs dans un recouvrement K de V,* telle que $P \circ \Phi = f$ et que $\Phi(0)$ soit un point choisi au-dessus de $f(0)$.

Disons, pour faire image, que ce théorème exprime qu'une courbe peut être relevée. Nous le démontrerons avec un théorème plus fort, qui exprime que deux courbes homotopes de même origine et même extrémité, se relèvent avec même extrémité, si on les relève avec même origine.

THEOREME II. *Soit $f(t,u)$ une application du carré produit de deux intervalles $(0,1)$, f continue à valeur V telle que $f(0,u) = f(0,0)$ et $f(1,u) = f(1,0)$. Il existe $\Phi(t,u)$, continue à valeur dans K, telle que $P\Phi = f$. L'on a : $\Phi(0,u) = \Phi(0,0)$; $\Phi(1,u) = \Phi(1,0)$.*
La démonstration de ce théorème est bien connue.

THEOREME III. *Soit f une application continue dans V d'un ensemble B, localement connexe par arc et simplement connexe : il existe Φ continue à valeurs dans K telle que $P \circ \Phi = f$.*

Φ est complètement déterminé par (b^o), choisi dans K, au-dessus de $f(b^o)$. Nous construirons Φ en joignant chaque point b de B à b^o, et relevant le chemin. D'après le théorème II, le relèvement de b ne dépend pas du chemin choisi : Φ est ainsi définie de manière unique, nous allons montrer qu'elle est continue au voisinage d'un point quelconque b.

Soit Y un voisinage connexe par arc de b, tel que $f(Y)$ soit contenu dans W, K étant au-dessus de W réunion de sections disjointes isomorphes à W. L'on peut définir $\Phi\ (Y)$, au moyen d'un chemin $b^o b$, et d'un chemin au-dessus de Y : comme les relèvements de ces chemins Φ est donc contenu dans la section sur W passant par $\Phi\,(b)$. Ceci démontre la continuité de Φ en b.

2. Revêtement connexe. Soit K un revêtement d'un espace V connexe localement connexe par arc. Pour K être connexe équivaut à être connexe par arc : une composante connexe par arc d'un revêtement connexe de V est, en effet, ouverte et fermée.

Pour classer les revêtements connexes de V, l'on peut faire opérer sur la fibre de K le groupe fondamental H de V. Soit p dans V, et g dans K au-dessus de p : un circuit fermé d'origine et d'extrémité p peut être relevé dans K avec pour origine g. Si h est la classe du circuit dans $H(V,p)$, l'on appelle $h(g)$ l'extrémité relevée dans K : $h(g)$ est bien défini, indépendemment du circuit choisi dans la classe de h. La proposition suivante est bien connue :

PROPOSITION I. *Les éléments h de $H(V,p)$ tels que $h(g) = g$, forment un sous-groupe de H isomorphe au groupe fondamental J de K.*

Choisissons un autre point g' au-dessus de p et voyons en quoi la représentation de J dans $H(V,p)$ par $H(K,g')$ diffère de celle par $H(K,g)$. Puisque K est connexe par arc, il existe un chemin gg' : il se projette dans V suivant un chemin de classe j, telle que $j(g) = g'$. Si h est projection d'un élément de $H(K,g)$ réalisé par un chemin gg, jhj^{-1} est projection d'un élément de $H(K,g')$ réalisé par $g'g$, gg, gg' et tel fait admet une réciproque car $jhj^{-1}(g') = jh(g) = j(g) = g'$ .En choisissant tous les points hg de la fibre de k au-dessus de p, l'on a respectivement pour image tous les transmués de $H(K,g)$ dans $H(V,p)$.

PROPOSITION II. *Les points de la fibre de K sont en correspondance biunivoque avec les classes $)hJ($ de H.*

Si l'on compare les groupes fondamentaux $H(V,p)$ et $H(V,p')$ construits en deux points différents, l'isomorphisme qui les associe par un chemin pp' est défini à une transmutation hHh^{-1} près. L'on ne peut donc considérer un élément j, ou un sous-groupe J de H, mais, à une classe de sous-groupes ou d'éléments (modulo k automorphismes intérieurs), correspondra une classe bien définie dans tout $H(V,p)$. Un élément commutant avec tous les autres est bien défini dans H, car il est seul de sa classe ; de même un sous-groupe invariant. A tout recouvrement K de V, et tout point g de K au-dessus d'un point p de V, nous avons associé un sous-groupe J de $H(V,p)$: en variant g et p, l'on associe à K une classe $)hJh^{-1}($ de sous-groupes de H. On a le théorème réciproque suivant :

THEOREME IV. *Les revêtements K de V sont en correspondance biunivoque avec les classes de sous-groupes de H : deux revêtements correspondant à une même classe sont isomorphes ; à chaque classe correspond un revêtement.*

Le revêtement associé au sous-groupe à un élément est simplement connexe : c'est le revêtement universel K^o. K est espace quotient de K^o par la relation : deux points g' *et* g'' de K^o sont un même point de K, si les chemins gg' $g'g''$ tracés dans K^o se projettent dans V suivant un circuit dont la classe dans $H(V,p)$ est un élément de J. L'on a la

PROPOSITION III. *Le revêtement universel de V, est un revêtement pour tout autre revêtement de V.*

Un revêtement correspondant à une classe à un élément, autrement dit à un sous-groupe invariant de H, est dit régulier. L'on a la propriété suivante, caractéristique des revêtements réguliers :

PROPOSITION IV. *Un revêtement de V, est régulier si et seulement si un circuit de V qui, avec une origine particulière, se relève fermé dans K, se relève fermé quelle que soit l'origine choisie.*

PROPOSITION V. *Un revêtement K de V est régulier si et seulement si, à tout couple gg' de points de K au-dessus d'un même point de V, l'on peut associer un isomorphisme a de K, tel que $g' = ag$ et $Pa = P$.*

PROPOSITION VI. *Le groupe des isomorphismes intérieurs a, de K, tels que $Pa = P$, est isomorphe au quotient H/J des groupes fondamentaux de V et de K ; l'isomorphisme est canonique si J contient le sous-groupe des commutateurs de H.*

On peut trivialement caractériser un tel isomorphisme par la donnée du transformé g' de g : les projections des chemins gg' de K appartiennent toutes à la même classe $hJ = Jh$ de $H(V,p)$: elles définissent un élément du groupe H/J. Réciproquement, à toute classe correspond un transformé unique de g. Nous avons précisé la proposition II dans le cas d'un revêtement régulier. L'isomorphisme sera canonique si toute classe hJ est invariante par transmutation. Autrement, A opère sur K, mais non H/J : soient g et g' deux relèvements différents d'un même point p, et $ag = g''$, $ag' = g'''$ leurs transformés : un chemin gg'', et un chemin $g'g'''$ ne se projettent pas en général dans des classes de $H(V,p)$ congrues modulo J. Il peut arriver que l'isomorphisme de A et de H/J ne soit pas canonique, mais qu'un élément ou un sous-groupe de H/J, étant invariant par transmutation, soit canoniquement associé à un élément, ou à un sous-groupe de A : un tel élément h opérant sur une fibre de K par la fonction $h(g)$, coïncide avec une transformation de A.

3. Représentation affine. Soit K un revêtement de V, obtenu en choisissant une composante connexe de l'espace fibré F, qui définit une structure de variété localement affine. Il est évident que toute courbe de V peut être relevée dans K : cette propriété peut servir à caractériser K, composante connexe par arc de F. K est un revêtement régulier : soient g et g' deux germes au-dessus d'un point p de V : il existe une transformation affine a telle que $g' = ag$; a transforme K en un ensemble ouvert et connexe de F, qui ayant en commun g' avec K, coïncide avec K. La proposition suivante est maintenant claire :

PROPOSITION VII. *Le groupe des affinités laissant invariante une composante connexe K de l'espace fibré F définissant une structure de variété localement affine, est isomorphe au groupe A introduit dans la proposition VI.*

Une proposition analogue peut être énoncée pour le cas métrique.

THEOREME V. *Soit K un ouvert de l'espace des germes d'isomorphismes locaux de V dans R^n : si K est un recouvrement de V, et que deux germes de K au-dessus d'un même point de V ne diffèrent que par une transformation affine (resp. orthogonale), K définit canoniquement sur V une structure de variété localement affine (resp. Euclidienne).*

Les transformés de K par affinité ou déplacement engendrent le fibré F qui définit la structure. K étant connexe, la variété est bilatère si le groupe A ne contient que des transformations directes, unilatère si A contient des transformations changeant l'orientation de R^n.

Soit V' un revêtement de V ; p', un point de V', au-dessus du point p de V ; H', la projection de $H(V',p')$ dans $H(V,p)$. Un germe g d'application de V dans R^n en p, définit en p' un germe d'application de V' dans R^n : g' est dit transféré de g ; l'ensemble F' des germes d'applications de V' transférés des germes de F, définit sur V' une structure de variété localement plate. Si K est un revêtement connexe de V formé de germes de F, les germes de F' transférés des germes de K, suffisent à construire un revêtement connexe K' de V' : tout chemin dans l'issu de p' peut être relevé dans K' comme suit : on projette le chemin sur V, on le relève sur K à partir de g, on transfère sur K' les germes de ce relèvement. Le revêtement régulier K' de K correspond à un sous-groupe J', isomorphe à $J \quad H'$: en effet, un circuit $p'p'$ se relève avec même germe à l'origine et à l'extrémité, si sa projection, dans $H(V,p)$ qui appartient à H', appartient aussi à J. Le groupe affine A' qui représente J' est un sous-groupe de A, défini à une transmutation près selon le choix de g. A' est isomorphe à $H'/J \quad H' = H'/J'$.

THEOREME VI. *Sur un revêtement d'une variété localement plate, une structure localement plate est canoniquement définie.*

Quand, dans la suite, il sera fait usage des diverses propriétés démontrées pour cette structure, nous renverrons au théorème VI.

4. Domaines d'affinité. K muni de sa topologie et de la projection P sur V est un revêtement de V, donc un espace fibré de germes d'isomorphismes de V dans R^n.

K muni de la même topologie, maintenant envoyé dans R^n par l'image I, ne recouvre pas R^n tout entier. $I(K)$ peut n'être qu'une partie de R^n , mais il est trivial que K est un sous-fibré du fibré des germes d'isomorphismes locaux de R^n dans V. Ce sous-fibré est analogue au sous-fibré des germes appartenant à une fonction analytique et à ses prolongements ; celui-ci s'appelle surface de Riemann : nous appellerons K étalé au-dessus de R^n par l'application but I, un domaine d'affinité.

Dans le cas des variétés localement euclidiennes, K est un revêtement universel de V et I met K en correspondance biunivoque avec l'espace R^n tout entier.

Dés la dimension 2, ni l'une ni l'autre de ces propriétés ne peut être généralisée. L'on peut avoir pour domaine d'affinité :

Le plan entier.

Le demi plan.

L'angle compris entre deux demi droites.

Le revêtement universel du plan privé d'un point.

Un revêtement d'ordre fini du plan privé d'un point.

Une couronne limitée à deux cercles concentriques identifiés par homothétie est un exemple très simple de variété V, dont K est le plan privé d'un point, qui n'est pas simplement connexe.

En dimension 2, du moins, tous les domaines sont revêtements d'une partie du plan. Cette propriété se généralise-t-elle en dimension supérieure à 2 ?

On peut aborder ainsi le problème de classification : au-dessus de quelles courbes de R^n existe-t-il une section de K ou, dirons-nous, quelles courbes de R^n peuvent-elles être relevées sur K et ensuite, par projection, tracées sur V ? L'existence de telles courbes dépend-elle du point de K choisi pour relever l'origine ? Si oui, K n'est pas un fibré au-dessus d'une partie de R^n.

Si I est un isomorphisme de K et de R^n, la variété V est dite complète, au sens d'Ehresmann, ou prolongeable.

5. Domaine fondamental. A la fin du paragraphe 3, nous avons vu que H n'opère pas en général canoniquement sur K : toutefois, choisissons sur K, pour A, un domaine fondamental D simplement connexe. D contient un point et un seul au-dessus de chaque point de V : soit g au-dessus de p, a, une transformation de A : $aD = D'$; $ag = g'$. Les chemins gg' tracés dans K projetés sur V appartiennent à des classes de $H(V,p)$ équivalentes modulo J : l'on convient d'associer a à l'élément de H/J ainsi défini. A tout chemin qq', se projetant ou non suivant un circuit, l'on associe la transformation a qui fait passer du domaine fondamental D, contenant q, à D', contenant q' : la correspondance est discontinue sur la frontière de D, ainsi que sur les transformés par A de cette frontière.

Au-dessus d'une variété V compacte localement plate, il est facile de construire dans K un domaine fondamental D. Utilisons une triangulation $)T($ de V : considérant V

comme un complexe, on construit un autre complexe Θ , simplement connexe, non fermé, qui s'applique biunivoquement, non bicontinument, mais continument sur V. L'ensemble des simplexes de)T(et de leurs relations d'incidence est tel que l'on peut, sur chaque simplexe, définir des coordonnées barycentriques grâce à l'image I, et ces coordonnées se raccordent, à une transformation linéaire près, sur la frontière commune à deux simplexes. On peut donc réaliser Θ comme un d qui s'applique barycentriquement sur V par f ; d'après le théorème III $f(d)$ se relève dans K suivant $\Phi(d) = D$. Puisque f est est biunivoque, D est un domaine fondamental ; Φ est, comme f, une correspondance barycentrique.

Remarquons que le groupe A a un système fini de générateurs : les transformations qui transforment D en un domaine aD, ayant avec D frontière commune, l'on peut définir pour un système choisi de générateurs le rang d'un élément comme nombre minimum d'éléments d'un monome formé de générateurs pour le représenter. La réunion D_n des aD, où le rang de a est n au plus, a une fermeture compacte ; tout compact de K est contenu dans un D_n : K est donc dénombrable à l'infini.

CHAPITRE TROIS

GENRE TOPOLOGIQUE DES SURFACES LOCALEMENT AFFINES

Rien n'est plus commun que ce nom,
Rien n'est plus rare que la chose.
La Fontaine (V, 17).

D'abord, V compacte ne peut être isomorphe à la sphère, ni au plan projectif. S'il existe une structure localement affine sur le plan projectif, il en existe une sur la sphère, d'après le théorème VI du Ch. 2. : or la sphère est simplement connexe ; d'après le théorème (III, 2) il existe une image de la sphère dans R^2 qui soit localement un isomorphisme, ce qui est topologiquement impossible. D'autre part, les surfaces localement euclidiennes ont pour caractéristique d'Euler-Poincaré 0 : ce sont le tore et la bouteille de Klein.

Nous démontrerons que topologiquement, la classe des surfaces localement affines n'est pas plus riche que la sous-classe des surfaces localement euclidiennes. Pour cela, il suffira d'établir que le genre des surfaces bilatères est 0 ; pour les surfaces unilatères, nous considérerons la structure affine de leur revêtement orientable.

1. Forme réduite du domaine fondamental. Dans le dernier paragraphe du précédent chapitre, nous avons construit un complexe simplement connexe, non fermé d, une application barycentrique biunivoque f de d dans V, et un relèvement $\Phi(d) = D$ de f dans K ; en subdivisant, au besoin, la triangulation $)T($ qui nous a servi à faire cette construction, l'on peut choisir pour d un domaine satisfaisant à des conditions complémentaires : d est réalisé comme l'intérieur d'un polygone plan subdivisé en triangles, et une partie de sa frontière.; sur cette frontière, on peut marquer des sommets :

$$s_{11}\ s_{12}\ s_{13}\ s_{14},$$
$$s_{21}\ s_{22}\ s_{23}\ s_{24},$$
$$;\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{i1}\ s_{i2}\ s_{i3}\ s_{i4},$$
$$;\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{n4} = s_{11}$$

de telle sorte que si l'on étend f à toute la frontière de d, les lignes brisées $s_{i1}\, s_{i2}$, et $s_{i4}\, s_{i3}$ se représenteront biunivoquement sur une même ligne de V, et de même pour $s_{i3}\, s_{i2}$ et $s_{i4}\, s_{i+1\,1}$; tous les sommets se représentent sur un même point s de V.

Pour construire ce domaine particulier, on opère sur le complexe qu'une triangulation découpe sur V, comme il est classique d'opérer sur un polyèdre.

Considérons $I\,\Phi\,(\bar{d}) = I(\bar{D})$: c'est un ensemble de triangles du plan, chacun en correspondance avec un triangle de D ; les lignes brisées $s_{i1}\, s_{i2}$ et $s_{i4}\, s_{i3}$ de la frontière, ont pour images les lignes $S_{i1}\; S_{i2}$ et $S_{i4}\; S_{i3}$, qui ont peut être des points doubles, et se correspondent par une similitude directe du groupe A, puisque $f(s_{i1}\, s_{i2}) = f(s_{i4}\, s_{i3})$. Il en est de même pour $s_{i3}\; s_{i2}$ et $s_{i4}\, s_{i+1\,1}$.

2. Rotation de la tangente à une courbe. Soient ou, ov deux directions orientées dans le plan : l'on peut associer à l'angle (ou,ov) une mesure définie à un multiple de deux demi tours près. Soit maintenant $ou(t)$ une direction orientée variable, dépendant continument d'un paramètre t : l'on peut associer à la direction $ou(t)$ le point $m(t)$ où la demi droite ou coupe le cercle trigonométrique de centre o et de rayon unité. Soient ou et ou' deux directions correspondant aux valeurs t et t' du paramètre : il est maintenant possible de définir exactement l'angle (ou,ou') : ce sera la mesure algébrique du chemin parcouru par le point variable m, entre les deux positions $m(t)$ et $m(t')$. L'on peut notamment définir ainsi exactement l'angle de deux tangentes à une courbe de classe C^1, c'est-à-dire dont la tangente varie continument. Supposons que l'on fasse varier continument une courbe dans la classe C^1, deux points et leurs tangentes orientées restant fixes : la valeur de l'angle de ces tangentes est le même quelle que soit la courbe sur laquelle on l'évalue : cette valeur, en effet, varie continument, et n'admet d'autre part qu'une famille discrète de déterminations possibles. La définition de l'angle de deux tangentes peut être étendue au cas où il existe des points anguleux : nous définirons l'angle de deux côtés d'une ligne polygonale orientée. Pour celà, considérons les demi-droites ou et ov, parallèles à deux côtés consécutifs de la ligne polygonale : elles divisent le plan en deux régions, dont l'une est inférieure, l'autre supérieure au demi-plan : l'angle saillant et l'angle rentrant : pour définir la vraie valeur de l'angle $(ou,\, ov)$ nous ferons varier continument une demi droite dans l'angle saillant, de la position ou à la position ov, et mesurerons l'angle dont elle a tourné : cet angle ne dépend pas de la fonction continue $ou(t)$ choisie telle que $ou(o) = ou$, $ou(1) = ov$: deux telles fonctions sont homotopes, et l'angle correspondant, qui ne peut varier que discontinument, est bien défini.

Ici encore, l'on peut dire que l'angle de deux segments est fonction continue de la ligne polygonale les joignant, à condition de donner de la continuité la définition suivante : une ligne polygonale varie continument si les directions de ses côtés varient continument, et si deux côtés consécutifs ne prennent jamais des directions opposées :

pour un tel rebroussement, en effet, il n'y a plus d'angle saillant ni rentrant, mais deux angles plats, dont l'un vaut -1 demi tour, l'autre +1 demi tour, et entre lesquels, en général, rien ne permet de choisir, chacun d'eux provenant par continuité d'un angle saillant.

Ces résultats se généralisent en géométrie affine, où l'on peut définir des invariants correspondants : la mesure d'un angle, évidemment, n'existe plus au sens usuel : une transformation affine directe transforme l'un dans l'autre n'importe quels angles saillants de même sens ; mais nous associerons à l'angle de deux tangentes, soit une mesure exacte en demi tours si les deux tangentes orientées sont portées par des droites parallèles, soit autrement une inégalité affirmant que l'angle considéré est compris entre deux nombres entiers algébriques consécutifs de demi-tours. Pour calculer ces nombres, nous introduirons une métrique, à l'aide d'une forme quadratique définie positive arbitraire : il est évident par continuité que ces nombres ne dépendent pas de la métrique : en effet, un angle multiple exact de demi-tours correspond à deux directions orientées, portées par la même direction non orientée de droite : il ne peut varier continument à travers des valeurs non entières de demi-tours ; un angle de directions à apports distincts, ne pourra changer continument de classe d'inégalité, car il devrait passer par une valeur entière, ce qui est impossible.

Les angles ainsi mesurés ne peuvent s'additionner puisqu'il n'y a pas de déplacements permettant de construire une addition.

Dans le cas des lignes polygonales la mesure affine de l'angle de deux côtés peut être définie : en effet, la construction qui nous a donné un raccordement de deux côtés successifs, ne dépend que de notions invariantes par affinité : la continuité, les angles saillants : l'on est ainsi ramené au cas d'une direction variant continument.

L'angle dont tourne la tangente à une ligne fermée, ou le côté d'un polygone, est naturellement un multiple pair de demi-tours.

On a enfin le résultat suivant : deux réalisations métriques d'un même angle affine, diffèrent de moins d'un demi-tour en valeur absolue : il y a égalité dans le cas particulier où la mesure de l'angle affine est un entier exact.

3. Propriétés du domaine fondamental.

PROPOSITION I. *Un côté de la ligne polygonale orientée frontière du polygone fondamental, tourne de 2 demi-tours en décrivant une fois cette ligne, et revenant sur lui-même.*

$I(\widetilde{D})$ est réunion de triangles : nous allons montrer que la rotation considérée ne varie pas quand on retranche de $I(\widetilde{D})$ un triangle : ceci établira que cette rotation est la même que pour la ligne polygonale frontière d'un seul triangle : nous retrancherons un triangle tel que l'intérieur I' de $I(D)$ privé de ce triangle soit connexe et simplement connexe : pour que I' soit simplement connexe, nous prendrons un triangle dont un ou deux côtés appartiennent à la frontière ; pour que I' soit connexe, choisissons d'abord un triangle au hasard : s'il sépare en deux composantes l'intérieur de $I(D)$, nous chercherons un triangle dans une de ces composantes, et ainsi de suite jusqu'à rencontrer un triangle convenable, par exemple une composante n'ayant qu'un seul triangle. Alors, pour montrer que la rotation ne varie pas quand on retranche ce triangle, nous le réduirons continument à zéro : s'il a deux côtés frontières, en ramenant par exemple, suivant la médiane, le sommet où se raccordent les côtés frontières, sur le troisième côté ; s'il a un côté frontière, en ramenant, toujours suivant la médiane, le milieu de ce côté sur le sommet opposé. Dans les deux cas, puisqu'au voisinage d'un triangle l'image $I(D)$ est biunivoque, l'angle reste constamment défini et varie continument. Le complexe $I(D)$ est évidemment orientable : l'orientation de la frontière induit sur tout triangle une orientation : si l'orientation d'un triangle est positive, la rotation d'un côté de la frontière est +2 demi-tours.

Considérons maintenant une direction sz sur la variété V : on peut la relever en chacun des points $\Phi(s_{ij})$ et prendre ses images : $S_{ij}Z_{ij}$; une de ces directions est intérieure à $I(D)$, les autres sont extérieures : sz, en effet, n'est intérieure qu'à un seul angle du polygone Φ (D). Les directions SZ vont nous permettre de donner pour la rotation d'un côté de la frontière du polygone $I(D)$ une nouvelle évaluation.

Pour cela, marquons sur la demi direction sz un point z, contenu dans un voisinage relevable de s : soient Z_{ij} ses diverses images : considérons la ligne polygonale :

$$S_{11}S_{12}Z_{12}S_{12}S_{13}Z_{13}S_{13}S_{14}\dots$$

Les points Z sont, pour cette ligne, des points de rebroussement : il serait en général impossible de définir la rotation de la tangente. Mais prenons sur $S_{11}S_{12}$ un point S'_{12}, sur $S_{12}S_{13}$ un point S''_{12} ... L'on peut évaluer l'angle $S'Z\,S''$, en faisant tendre les sommets S'_{12} et S''_{12} vers S_{12}. On voit par continuité que la ligne polygonale avec Z intercalés a même rotation que la ligne initiale ; de plus, en considérant que tous les triangles de $I(D)$ ont même orientation, on voit que si au point Z intérieur correspond un angle de -1 demi-tour, il correspondra à tout Z extérieur un angle de $+1$ demi-tour. La rotation totale d'un côté orienté comprend donc :

La rotation aux 4n-1 sommets extérieurs, soit 4n-1 demi-tours

La rotation au sommet Z intérieur, soit -1 demi-tour

Les rotations le long des 4n lignes polygonales telles que :

$$z_{12}s_{12}s_{13}z_{13} \text{ ou } z_{14}s_{14}s_{21}z_{21}$$

Or ces lignes polygonales forment *2n* paires de lignes semblables, mais orientées en sens inverse telles que :

$$Z_{12}S_{12}S_{13}Z_{13} \text{ semblable directement à :}$$

$$Z_{14}S_{14}S_{21}Z_{21} \text{ orienté comme } Z_{21}S_{21}S_{14}Z_{14}$$

Mais les angles correspondant à :

$$Z_{12}S_{12}S_{13}Z_{13}$$

et

$$Z_{14}S_{14}S_{21}Z_{21}$$

par exemple, ont donc une somme en valeur absolue inférieure à 1 demi-tour, puisqu'ils sont différences de deux réalisations d'un même angle affine. D'où pour la rotation totale R l'inégalité suivante en demi-tours :

$$(4n-1)-1-2n < R < (4n-1)-1+2n$$

$$2n-2 < R < 6n-2$$

Or $R = 2$, donc $n = 1$; nous énoncerons le théorème :

THEOREME I. *Le genre d'une surface affine orientable localement plate est 1.*

4. Principe de la démonstration. De tous les résultats énoncés avant ce théorème, il en est peu qui n'aient contribué à sa démonstration. Le principe cependant peut s'en énoncer en peu de mots : mais beaucoup de ces mots sont des abus de langage, qu'un théorème auxiliaire a légitimés.

Les résections pratiquées, développer sur le plan : le contour fermé obtenu est frontière d'une surface, qui peut se recouvrir elle-même, mais comme elle peut être contractée différentiellement jusqu'à un cercle de petit rayon, sa tangente quand un point fait un tour complet doit faire un tour et un seul : pratiquons des résections toutes tangentes les unes aux autres : le polygone curviligne de développement aura un angle de $360°$ et $4n-1$ angles de $0°$, si n est le nombre de trous de la surface. La tangente au contour, pour compenser ces sommets, tournera de $(4n-1)-1$ demi-tours. D'autre part, comme les côtés se correspondent en paires par similitude, directe si la surface est orientable, la rotation de la tangente correspondant à un côté se retrouvera sur l'autre changée de signe, et transformée par similitude : le transformé d'un demi-tour est un demi-tour, et deux angles saillants transformés l'un de l'autre diffèrent de moins d'un demi-tour, en sorte que la contribution des côtés, si tourmentés soient-ils, est en valeur absolue moindre qu'un demi-tour par paire : il y a $2n$ paires : la rotation totale de la tangente peut donc être encadrée

$$(4n-2) - 2n < R < 4n-2+2n$$

D'où puisque $R = 2$ le genre apparaît égal à 1.

Pour contracter le développement de V, nous l'avons triangulée ; mais alors, les résections qui s'offrent naturellement sont polygonales : plutôt que de tracer sur V des lignes de classe C^1, nous avons étudié les angles des polygones, et introduit la direction sz, qui correspond à la tangente commune aux résections curvilignes. Encore faut-il avoir, par des théorèmes de relèvement, défini de manière précise la géométrie affine sur la surface V.

5. Les surfaces unilatères. Soit V une variété compacte ; K un recouvrement de V à l'aide de germes définissant une structure de variété localement plate ; H et J, les groupes fondamentaux de V et K. L'on a construit *(2 N° 3)* un isomorphisme de H/J et du groupe affine A, défini à une transmutation près : nous définirons dans H le sous-groupe invariant H' des transformations représentées dans A par une affinité directe. Au sous-groupe H' associons *(2 n° 2)* un recouvrement V' de V : la fibre de ce recouvrement, isomorphe au quotient H/H', a deux points : V' est donc une variété compacte, sur laquelle *(2 n° 3)* est canoniquement définie une structure affinement plate. V' est le revêtement bilatère de V. Du théorème I, et de l'existence de V' on déduit :

THEOREME II. *Toute surface affinement plate a un revêtement bilatère de genre 1.*

Remarquons que la méthode appliquée aux surfaces bilatères donne des résultats aussi pour les surfaces unilatères : mais le polygone réduit d'une telle surface a $2n$ côtés, semblables par paires, d'où l'inégalité :

$$2n-2-n < R < 2n-2+n$$

$$n-2 < R < 3n-2$$

ce qui ne permet pas d'éliminer le cas $n = 2$.

CHAPITRE QUATRE

GROUPES ABELIENS AFFINES

Tony, how many is five times six ?
Five times six is six times five.
Middleton : The changeling.

Le groupe A $(2\,n^o\,3)$ d'une surface bilatère localement affine est une représentation du groupe fondamental $H = Z^2$ d'une telle surface : il est donc lui-même abélien et isomorphe à l'un des groupes suivants :

$$Z^2\ ;\ Z\cdot Z(q)\ ;\ Z\ ;\ Z(q)\cdot Z(q')\ ;\ Z(q)\ ;\ I$$

Dans ce chapitre nous classerons les groupes de transformations affines ayant une des structures ci-dessus, réservant au chapitre suivant la classification des surfaces leur correspondant éventuellement. Le dernier paragraphe étudie les représentations affines du groupe fondamental, non abélien, de la bouteille de Klein.

1. Théorèmes préparatoires. Soit A un groupe abélien affine :

THEOREME I. *Si une transformation a de A admet un point fixe o, et un seul, toute transformation b de A laisse o fixe :*

L'on a : $$abo = bao = bo$$

donc bo est un point fixe de a, donc $bo = o$.

THEOREME I'. *Soit E l'ensemble des points fixes de a : toute transformation b, commutant avec a, laisse E globalement invariant.*
Soit o un point de E, la démonstration précédente montre que bo appartient à E.

THEOREME II. *Si une transformation a de A laisse deux directions fixes d et d', réelles ou imaginaires, et deux seulement, toute transformation b de A laisse ces deux directions fixes.*

L'on a : $$bd = bad = abd$$

d'où : $$bd = d \text{ ou } d'$$

de même : $$bd' = d' \text{ ou } d$$

ce qui laisse deux possibilités : soit $bd = d$; $bd' = d'$, selon le théorème, soit $bd = d'$; $bd' = d$, ce que nous allons montrer impossible. Si l'on choisit pour axes les directions d et d', les transformations a et b, considérées comme opérant sur les vecteurs du plan, peuvent s'écrire :

$$a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

l'on en déduit :

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_1 \\ a_2 b_2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad ba = \begin{pmatrix} 0 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

si $ab = ba$, $a_1 = a_2$; mais ceci est contraire à l'hypothèse : a n'a que deux directions propres, d'où le théorème.

THEOREME III. *Si une transformation a de A a ses deux valeurs propres égales, et n'a qu'une direction propre d, toute transformation b de A a ses deux valeurs propres confondues, et admet la direction propre d.*

Que b admette la direction propre d, se démontre comme le théorème I. Si les deux vecteurs propres de b étaient distincts, b aurait deux directions propres distinctes, d et d', et deux seulement : d'après le théorème II, a aurait la direction propre d', ce qui est contraire à l'hypothèse.

THEOREME IV. *Si une transformation sans point fixe a de A admet deux valeurs propres distinctes, dont l'une doit être l'unité, alors on peut choisir un système d'axes tel que*

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

où b est une transformation quelconque de A.

D'après les théorèmes précédents :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$ab = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 b'_0 \\ a_0 + b_0 \end{pmatrix}$$

$$ba = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_0 \\ a_0 b_2 + b_0 \end{pmatrix}$$

puisque a_1 est différent de 1 : $b'_0 = a_1 b'_0 = 0$

puisque a est différent de 0 : $a_0\, b_2 = a_0$; $b_2 = 1$

THEOREME. *Supposons qu'il existe dans A, une transformation a, sans point fixe, distincte d'une translation, dont la valeur propre double soit 1 : alors pour un système convenable de coordonnées :*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a'_0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

et l'on a ; $b_1\, a'_0 = b'_0\, a_1$ *b étant une transformation quelconque de A.*

Du théorème III, il résulte que :

$$b = \begin{pmatrix} m & b_1 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

Considérons l'action de a et b sur la deuxième coordonnée : a opère comme une translation, b comme une similitude : puisqu'il n'y a pas de points fixes, a'_0 n'est pas nul, et b, qui commute avec a doit être une translation : $m = 1$.

$$\mathrm{ab} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + a_1 b'_0 \\ a'_0 + b'_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ba} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + b_1 a'_0 \\ a'_0 + b'_0 \end{pmatrix}$$

$b_1\, a'_0 = b'_0\, a_1$ résulte de la commutativité.

2. Représentations affines de $\mathbf{Z}^2$. Nous classerons ces groupes de représentations par des hypothèses successives.

I) Une transformation a de A a des valeurs propres imaginaires conjuguées : en introduisant une métrique, à l'aide d'une forme quatratique convenable, on peut dire que a est une similitude à centre : d'après le théorème II, A est un groupe de similitude ; d'après le théorème I, ces similitudes ont toutes même centre. L'existence dans A d'un sous-groupe cyclique de rang fini différent de 2, entraine nécessairement l'hypothèse I.

II) Une transformation de A a deux valeurs propres distinctes, et un point fixe unique : le groupe A est formé de matrices laissant fixes un point et deux axes.

III) Une transformation de A a deux valeurs propres distinctes, et pas de point fixe : a admet l'unité pour valeur propre ; les éléments de A sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a'_0 \end{pmatrix}$$

IV) Une transformation a de A a un point fixe unique, une direction propre unique, donc deux valeurs propres confondues : les transformations de A peuvent s'écrire dans un même système :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a'_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

ce qui est une conséquence directe du théorème III.

V) Une transformation de A, a une direction propre unique, et n'a pas de point fixe : la valeur propre unique est donc 1 ; on a, d'après le dernier théorème préparatoire des transformations de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ k \ a_1 \end{pmatrix}$$

où k est une constante, caractéristique du groupe A.

Supposons maintenant qu'aucune transformation n'existe, d'aucun des cinq types précédents : les transformations de A sont donc d'un des trois types suivants :

1) deux valeurs propres distinctes ; plusieurs points fixes, soit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) deux valeurs propres confondues ; plusieurs points fixes, une seule direction propre, donc l'équation réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) une valeur propre double ; plusieurs directions propres : l'on a une homothétie, une translation, ou la transformation identique.

Classons les groupes formés de telles transformations.

VI) Il existe une transformation du type 1) : d'après le théorème III les autres transformations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème I', $b = 0$

$$a^n b = \begin{pmatrix} a_1^n b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

pour que toutes ces transformations soient du type 1 ou 3, il faut que :

$$b'_0 = 0 \; ; \; b_2 = 1$$

Le groupe est donc formé de transformations du type :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VII) Le groupe contient une transformation du type 2 : il est donc exclusivement formé de transformations de type 2 ou 3 ; il ne peut contenir d'homothétie, parce que le produit d'une homothétie vraie par une transformation du type 2 ne peut être de type 2 ou 3 ; il ne peut y avoir de transformations sans point fixe, car on rentrerait dans le cas V. Il résulte du théorème I' que toutes les transformations du groupe peuvent s'écrire dans un même système d'axes :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VIII) Le groupe est formé de translations.

IX) Le groupe est formé d'homothéties de même centre.

X) Le groupe ne contient que la transformation identique.

3. Affinités commutant avec A. Il est utile pour classer les transformations affines de V, de connaitre les transformations affines commutant avec toute transformation de groupe A. Ces transformations forment un groupe B : en effet, si $ba = ab$ et $b'a = ab'$, alors $bb'a = bab'$ et $bab' = abb'$. Nous donnons le groupe B correspondant à chacun des cas ci-dessus.

I) B est le groupe de toutes les similitudes ayant pour centre le point fixe : c'est un groupe à deux paramètres.

II) B est le groupe des transformations qui, dans le système canonique, s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Le groupe B a deux paramètres.

III) B est le groupe à deux paramètres des transformations écrites :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

IV) B est le groupe à deux paramètres des transformations écrites :

$$\begin{pmatrix} b_1 & b'_1 \\ 0 & b'_2 \end{pmatrix}$$

V) B est le groupe à deux paramètres des transformations écrites :

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ k b_1 \end{pmatrix}$$

VI) B est le groupe à 3 paramètres des transformations écrites :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

VII) B est le groupe à 3 paramètres des transformations écrites :

$$\begin{pmatrix} b_1 & b'_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VIII) Si A contient deux translations non collinéaires, B est le groupe à deux paramètres de toutes les translations. Si A est engendré par une seule translation a, B est le groupe à 4 paramètres des b :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b'_0 \end{pmatrix}$$

IX) B est le groupe à 4 paramètres des transformations laissant le centre fixe.

X) B est le groupe à 6 paramètres de toutes les transformations affines du plan en lui-même.

4. Invariante du groupe A. Pour un choix convenable de nouveaux paramètres, tout groupe A devient un groupe de déplacements, et même un groupe de translations.

I) Prendre le logarithme du rayon polaire, et l'angle polaire.

II) Prendre les logarithmes des coordonnées canoniques.

III) Prendre une variable et le logarithme de l'autre.

IV) Prendre pour variables x/y et Ly.

La transformation s'écrit :

$$Ly = La_1 + Ly \; ; \; x/y = x/y + a'_0 \,/ a_1$$

V) Prendre pour variables y et $y^2 - 2kx$: la transformation s'écrit :

$$y = y + k a_1$$

$$y^2 - 2kx = (y + k a_1)^2 - 2k(x + a_1 y + a_0) = y^2 - 2kx + k^2 a_1^2 - 2k a_0$$

VI) Prendre pour variables y et Lx.

VII) Prendre pour variables Ly et x/y.

IX) Pour se ramener au cas I, introduire une métrique quelconque.

Les logarithmes considérés, sont les logarithmes des valeurs absolues des coordonnées : les considérations précédentes établissent l'existence locale d'une structure métrique invariante, en dehors de lignes exceptionnelles où s'annule certaines coordonnées.

5. Le cas unilatère. Le groupe fondamental s'obtient en adjoignant au groupe abélien à deux générateurs libres, a et r^2, l'élément r, avec la condition :

$$ra = a^{-1}r$$

Nous étudierons les représentations affines de ce groupe, a étant une transformation directe, et r une transformation inverse.
Remarquons d'abord que r a deux valeurs propres de signes distincts, donc distinctes. Nous ferons sur la forme r des hypothèses successives.

A) $$r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} r_1^2 \neq r_2^2 \\ r_1^2 \neq 1 \\ r_2^2 \neq 1 \end{matrix}$$

Parce que a commute avec r^2, l'on a selon B II :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que a commute avec r, et comme $ra = ar = a^{-1}r$, l'on a $a = a^{-1}$, d'où pour a les deux formes possibles :

$$A_1) : \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2) : \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B) $$r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad r_1 \neq 1$$

Parce que a commute avec r , l'on a selon B VI :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_o \end{pmatrix} \quad ; \quad ra = \begin{pmatrix} r_1 a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a_o \end{pmatrix} \quad ; \quad a^{-1}r = \begin{pmatrix} r_1/a_1 & 0 \\ 0 & -1/a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_o}{a_2} \end{pmatrix}$$

L'on en déduit $a_1^2 = a_2^2 = 1$; et si $a_2 = -1$, $a_o = 0$. D'où les cas :

$$B_1) : \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2) : \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_o \end{pmatrix}$$

C) $$r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} r_1 \neq -1 \\ r_0 \neq 0 \end{matrix}$$

Parce que a commute avec r^2, l'on a selon B III :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Il résulte que a commute avec r ; d'où $a = a^{-1}$, ce qui entraîne :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D) $$r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad r_1 \neq -1$$

Parce que a commute avec r^2, l'on a selon B VI :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que a commute avec r, d'où $a = a^{-1}$; ce qui entraîne :

$$D_1) : \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2) : \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

ou, en changeant l'origine, sans changer l'expression de r, cette forme :

$$D_2) : \qquad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E) $$r = \begin{pmatrix} -r_1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix}$$

Parce que a commute avec r^2, l'on a d'après B IX :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a'_1 \\ a'_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

De l'égalité $ra = a^{-1}r$, il résulte que : $rara = rr = r_1^2$. La transformation ra/r_1 a un déterminant négatif, et son carré est l'identité : puisqu'elle laisse l'origine fixe, c'est une symétrie dont l'axe passe par l'origine ; a est le produit de la symétrie $r_1 r^{-1}$, par la symétrie ra/r_1.

F) $$r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad r_0 \neq 0$$

posons :

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ r_0 \end{pmatrix} \qquad r = s\,t$$

a commute avec r^2, donc t^2 et l'on a : $r\,a\,r\,a = t\,t$, et puisque t commute avec r et a :

$$(r\,t^{-1}a)^2 = 1 \quad \text{ou :} \quad s\,a\,s\,a = 1$$

a est le produit des deux symètries $x\,s$ et $s\,a$; comme la symétrie $s\,a$ commute avec t, son axe est parallèle à celui de s.

L'introduction d'une métrique est évidente dans les cas A, B, C, D. Pour le cas E :

$$r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad s\,a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ e_2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'on procède comme dans V, en introduisant la nouvelle coordonnée :

$$x^2 - 2(e_0 / e_2)y$$

Avant d'étudier le cas F, rappelons la définition géométrique d'une symétrie : le symétrique d'un point m, par rapport à un axe D, suivant la direction d, est un point m', tel que mm' soit parallèle à d et que le milieu o de mm' soit D. Soient D, d, D', d', les axes et les directions des symétries r/r_1 et $r\,a/r_1$: si ces quatre directions sont distinctes, il existe deux directions conjuguées harmoniques par rapport aux paires $D\,d$ et $D'd'$: si ces deux droites sont imaginaires conjuguées, l'on peut en les prenant pour isotropes du plan, construire une métrique où les deux couples $D\,d$ et $D'd'$ soient orthogonaux : l'on introduit alors des coordonnées polaires comme dans I.

Si ces droites sont réelles, soient $o\,x$ et $o\,y$; l'on considère les coordonnées polaires hyperboliques suivantes : $L\,x\,y$, comme analogue du logarithme du rayon polaire, et l'argument sur une hyperbole d'asymptotes $o\,x$ et $o\,y$, du point d'intersection d'un rayon, comme analogue de l'angle polaire.

Si maintenant les droites $D\,d$ e'D' n'ont que deux directions distinctes, la solution du problème est évidente. Nous supposerons donc que ces directions sont au nombre de trois :

d'abord : $\quad D = D' \quad ; \quad r/r_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad r\,a/r_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ e_2 & 1 \end{pmatrix}$

L'on introduit les coordonnées $L\,x$ et y/x.

$$d = d' \quad ; \quad r/r_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad r\,a/r_1 = \begin{pmatrix} -1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas ci-dessus, prendre pour coordonnées : $L\,y$ et x/y.

$$d' = D \quad ; \quad r/r_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad r\,a/r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas ci-dessus, prendre les coordonnées $L\,x$ et y/x.

CHAPITRE CINQ

SURFACES LOCALEMENT AFFINES

Schau, die verborgene vielfalt der herrlichen Landschaft :
Stellenweis flach, und doch hauchzart gewellt - Teure Heimat !
Goethe.

1. Décomposition de V. Nous avons, au paragraphe 4 du chapitre précédent, introduit de nouvelles coordonnées, pour lesquelles le groupe A devient un groupe de translations ou, dans le cas unilatère, un groupe de translations et de symétries. Ces nouvelles coordonnées vont nous permettre de briser V en un nombre fini de composantes, sur lesquelles une structure de variété métrique peut être définie canoniquement. Les nouvelles coordonnées ne peuvent, en général, être introduites sur tout le plan R^2: en entendant éventuellement par logarithme le logarithme de la valeur absolue, on a dans les différents cas :

I) Une carte biunivoque sur le plan, de revêtement universel du plan privé d'un point.

II) Une carte biunivoque sur le plan, de chaque secteur en quart de plan, limité à deux demi-axes.

III) Une carte biunivoque sur le plan d'un demi-plan, limité à la droite où s'annule la coordonnée dont on prend le logarithme.

IV) Une carte biunivoque sur le plan du demi-plan limité à $x'ox$.

V) Une carte biunivoque du plan sur le plan.

VI) Une carte biunivoque sur le plan du demi-plan limité à $x = 0$.

Nous désignerons par l' une telle carte. Considérons sur V l'ensemble Ω des points ayant par les germes de K une image où s'annule une coordonnée dont on prend le logarithme, ou qui intervient comme un dénominateur dans la définition de l' : d'après la forme du groupe A, si pour un germe d'une composante connexe K, choisi au-dessus d'un point p, une telle coordonnée s'annule, elle s'annulera pour tout germe de K au-dessus de p ; remarquons de plus que d'un voisinage convenable de p, dont il existe une image biunivoque dans le plan, il faut exclure au plus deux segments de Ω .

THEOREME I. *Sur une composante connexe W de V-Ω, l'on peut définir canoniquement une structure de variété localement euclidienne sans frontière à distance finie.*

Soit Q' une composante connexe de la restriction de K à W : cette composante connexe ne comprend pas nécessairement tous les germes de K au-dessus de W ; soit $I'Q' = Q$, l'ensemble des germes de Q' composés avec la carte I' ; soit $Y = I'I$, l'opération image (but) correspondante : nous allons montrer que Y met en correspondance biunivoque le revêtement universel de Q avec tout le plan.

D'abord, parce que Ω a été exclu, l'on voit par continuité que l'image I envoie Q' dans une région du plan, telle que demi-plan ou quart de plan, que I' représente biunivoquement sur le plan.

Ensuite, d'après le théorème V du chapitre 2, on voit que, puisque deux germes de Q au-dessus d'un même point p ne diffèrent que par une transformation isométrique, Q définit sur W une structure de variété localement euclidienne.

Pour démontrer que Y met Q en correspondance biunivoque avec le plan, et déterminer les structures possibles de W, il faut utiliser la méthode exposée au chapitre trois des leçons d'Elie Cartan sur la géométrie des espaces de Riemann. Cette méthode utilise l'hypothèse que W est sans frontière à l'infini, c'est-à-dire que toute partie bornée B de W est contenue dans une partie compacte C : en effet la fermeture de B dans V, ne contient aucun point de Ω, sinon B ne serait pas borné : nous prendrons pour C le complémentaire sur W d'un ouvert de V contenant Ω, et sans point commun avec B. Pour construire cet ouvert, l'on associe à chaque point de Ω un voisinage ouvert ω extérieur à B : de la structure locale de Ω, il résulte que Ω est une partie compacte de V, et est donc contenu dans un ouvert, réunion d'un nombre fini de ω.

2. Structure des composantes de V. La composante W, considérée comme variété euclidienne peut être compacte ou infinie : **démontrons le**

THEOREME II. *Si W, considérée comme surface euclidienne est compacte, alors W est identique à V.*

La topologie que définit sur W la métrique, est identique à la topologie de W considérée comme partie de V ; W est un ouvert de V, si W est aussi compacte, W est une composante connexe de V, c'est-à-dire V toute entière.

Si W, considérée comme composante métrique n'est pas compacte, il existe pourtant un domaine fondamental correspondant à W dans le plan dont le transformé par I'^{-1} soit un compacte de l'image de tout le plan par I'^{-1}. Considérons le cas où W, métriquement, est un cylindre : le cas unilatère non compacte se ramène à celui-ci, en prenant deux domaines fondamentaux adjacents. Le groupe fondamental de W a un générateur, qui métriquement se représente par une translation non nulle : considérons la famille des droites parallèles à cette translation : chaque domaine fondamental contient les homologues des points d'un segment de chacune de ces droites. Transformons par I'^{-1} : la famille des droites devient une famille de courbes : s'il n'existe pas de compact coupant toutes les courbes de la famille, il ne peut exister de variété V, dont le cylindre W soit une composante : dans les autres cas, l'existence d'une telle variété apparaitra possible.

3. Classification des surfaces bilatères localement affines. Nous reprendrons les cas considérés dans le chapitre précédent pour le groupe A et ses représentations.

I) La surface ne peut avoir qu'une seule composante W : celle-ci, munie de la structure métrique, est un tore. En effet, l'on peut définir la famille de droites ci-dessus envisagée : sa transformée par I'^{-1} est une famille de spirales logarithmiques, s'enroulant autour du point o, et balayant tout le recouvrement du plan privé de ce point : un domaine fondamental coupant toutes ces courbes, devrait avoir des points dans une infinité de feuillets du revêtement, il ne pourrait être compact. Les surfaces V sont donc en correspondance biunivoque avec les groupes de translations du plan, à deux générateurs non collinéaires.

II) A tout groupe de translations, à deux générateurs non collinéaires, l'on peut peut associer une surface à une seule composante torique.

A une composante cylindrique correspond une famille de droites, dont les transformées par I'^{-1}, forment un faisceau de courbes d'équations :

$$x^m = a y^n$$

où a est un paramètre variant suivant la courbe : si m et n sont de signes contraires, ou si l'un d'eux est nul, l'on peut choisir une courbe de faisceau au-delà de toute région bornée : le cylindre correspondant ne peut donc être une composante. Mais si m et n sont de même signe, et non nuls, l'on a un faisceau de courbes passant par l'origine. Un domaine fondamental borné s'obtient en prenant une courbe quelconque parmi celles qui joignent un point de ox à un point de oy, en coupant une fois et une seule chaque ligne du faisceau, et la transformée de cette courbe par la transformation affine, correspondant à la translation qui définit le cylindre. La frontière du domaine fondamental est formée des deux courbes, et de deux segments des axes ; la frontière de W sur oy, est isomorphe à un cercle ; de l'autre côté de ce cycle se trouve sur V une autre composante W' : W', ayant frontière sur oy, est aussi composante cylindrique, et deux courbes frontières de son domaine fondamental sont identifiées par la même transformation affine : celle associée au cycle de la frontière. L'on a ainsi une suite de composantes distinctes W de V : mais comme V est compacte, cette suite est finie, et l'on doit, après avoir franchi un certain nombre de cycles frontières, dont l'image est sur ox ou oy, revenir sur la composante W initiale. Partant d'un point de la frontière de W sur ox, et traversant une chaine de composantes W pour revenir à ce même point, l'on a sur V un cycle auquel correspond en général un élément de A différent de l'identité : en tout cas, le cycle développé vient se terminer sur ox, ce qui prouve que le nombre de composantes est pair : si le nombre de composantes est un multiple de 4, la transformation correspondant au cycle a ses deux valeurs propres positives, et à ceci près que si la moitié du nombre de composantes est un nombre impair, les deux valeurs propres doivent être négatives.

Ainsi, l'on a réalisé une nouvelle classe de variétés correspondant au groupe II : elles ne sont pas en correspondance biunivoque avec les groupes de translations : pour les définir, il faut se donner une affinité vérifiant une certaine inégalité (les logarithmes des deux valeurs propres sont de même signe), puis un nombre pair, et une autre affinité, qui selon la parité de la moitié du nombre doit être choisie diversement.

En général, K est le revêtement universel de V ; il est isomorphe par I au revêtement du plan privé d'un point. Mais si la deuxième affinité est l'identité, ou la symétrie de de centre o, K est isomorphe par I à un revêtement d'ordre fini du plan privé d'un point.

III) Les surfaces V sont en correspondance biunivoque avec les groupes de translations du plan, à deux générateurs non collinéaires. Elles ont une composante torique : en effet, dans le cas d'une composante cylindrique, introduisons le faisceau de droites parallèles, et le faisceau de courbes correspondant : c'est un faisceau d'exponentielles, une courbe du faisceau peut être tracée en dehors de tout compact. En aucun cas un élément de A ne peut avoir de valeur propre négative.

IV) A tout groupe de translations planes engendré par deux vecteurs non collinéaires, l'on peut associer une surface V à une seule composante torique. Quant au cas à plusieurs composantes, il est analogue au cas II, mais non identique : à chaque composante cylindrique, correspond un domaine fondamental, que l'on peut construire à l'aide d'une courbe, faisant un demi-tour au voisinage de l'origine, en rencontrant une fois et une seule chacune des lignes du faisceau des C_a, d'équation paramétrique :

$$x/y = k\,t$$
$$y = a\,e^{t}$$

où k caractérise le faisceau, et a la ligne particulière : entre la courbe coupant les C_a, et sa transformée, s'étend le domaine fondamental. Le nombre des composantes n'est pas nécessairement pair : s'il est pair, l'affinité de raccordement a sa valeur propre négative, sinon, positive.

K est en général le revêtement universel de V, il correspond par I au revêtement universel du plan privé d'un point. Si l'affinité de raccordement est l'identité, ou la symétrie, même situation se présente que pour II. Remarquons que l'affinité correspondant à un cycle frontière d'un cylindre ne peut avoir pour valeur propre qu'un nombre positif différent de 1 : à la valeur propre 1 correspond non un faisceau de courbes issues de l'origine, mais un faisceau de droites parallèles dans un demi-plan.

V) Ce cas, équivalent au cas VIII, ne pose aucun problème de classification qui ne soit trivial.

VI) Ce cas est un cas particulier de II : comme le logarithme d'une valeur propre est o, il ne peut y avoir de composantes cylindriques ; comme les translations correspondantes sont toutes collinéaires, il n'y a strictement pas de surfaces correspondant à VI.

VII) Aucune variété ne correspond à ce cas particulier de V : toutes les translations associées sont collinéaires ; la valeur propre étant 1, il ne peut exister de composantes cylindriques.

IX) Ce cas se traite comme I : mais il ne peut s'agir d'un groupe d'homothéties qui en coordonnées polaires n'agissent que sur le logarithme du rayon : certaines de ces homothéties doivent comprendre un nombre entier de demi-tours. K est isomorphe par I à un revêtement d'ordre fini du plan privé d'un point.

En bref, ce qui distingue les variétés à composantes cylindriques, c'est que deux éléments du groupe A jouent un rôle particulier. Pour une variété à une composante torique, à toutes les transformations de A correspondent des cycles fermés dont l'image par Y est un segment de droite ; pour une variété à composantes cylindriques, de telles fibres n'existent que pour une transformation a de A , et les puissances de a.

4. Les surfaces unilatères.

A) se rattache au cas II : sur une composante connexe W de $V - Y$, l'on a Q, qui applique W dans un quart de plan : pour construire le domaine fondamental du revêtement bilatère, il faudrait une transformation non identique du quart de plan en lui-même : or nous n'en avons aucune. Aucune variété ne correspond à A.

B) B_1 est impossible : comme on le voit en considérant le cas II, correspondant au groupe engendré par r^2 et a : ce groupe devrait correspondre au revêtement bilatère de V.

B_2 se rattache à III : le revêtement bilatère, et à fortiori V, ont une composante unique ; Y met le revêtement universel en isomorphisme avec le plan : le domaine fondamental est celui correspondant à la variété métrique unilatère compacte, la seule condition d'existence est que a_0 soit différent de 0.

C) Ce cas est impossible : il se rattache à III, mais le groupe A du revêtement bilatère devrait n'avoir qu'un seul générateur.

D) D_1 est impossible pour la même raison que C. D_2 est impossible : dans le groupe A du revêtement bilatère, s'introduisent des valeurs propres négatives.

E) Si l'on introduit une métrique, il est évident que V n'a qu'une composante, qui métriquement est compacte. A est engendré par une rotation, et le produit d'une symétrie par une homothétie : le domaine fondamental est un secteur, peut-être de plus d'un tour, du revêtement de la couronne limitée à deux cercles homothétiques et concentriques.

Si l'on introduit des coordonnées polaires hyperboliques, le groupe A est engendré par une rotation hyperbolique, transformation de déterminant 1 laissant fixes les asymptôtes. il est aisé de construire une V à une seule composante métriquement compacte. Il existe des V à composantes non compactes : en franchissant la frontière d'une telle composante, une seule coordonnée change de signe : mais deux quadrants adjacents ne peuvent être invariants par la même transformation r, de déterminant négatif : il faut donc que les deux valeurs propres de a soient négatives, que ra serve à définir la composante voisine de celle que r définit ; à cette condition, l'on pourra construire une surface V, ayant pour nombre de composantes le double d'un nombre impair.

Les cas introduits à la fin du précédent chapitre se rattachent à IV ; si a a pour valeur propre 1, V peut n'avoir qu'une composante, qui par la structure métrique soit compacte ; si la valeur propre est -1, ceci est impossible. Dans le cas de plusieurs composantes, le domaine fondamental dans le revêtement de la couronne comprise entre deux cercles concentriques, est formé d'un ensemble de demi- couronnes : en nombre pair ou impair, selon que le signe est + ou -.

Le cas de deux directions distinctes parmi les quatre D, D', d, d' est un cas particulier du précédent : il y a des composantes non compactes, et pour recoller les rayons frontière du secteur, l'identité ou la symétrie à centre.

F) Le cas comprend en particulier le groupe translation symétrie ; si $e \neq 0$, les nouvelles coordonnées ramènent ce cas à une composante.

APPENDICE

Mas por qué es andar mas alargando....
Boscan

1. Points frontière de K. L'on peut aussi chercher à étudier K, considéré comme ouvert étalé au-dessus de R^n : nous dirons que K possède un point frontière au-dessus de p, s'il existe un arc C de R^n, d'extrémité p, et un relèvement de son intérieur qui ne puisse être étendu à p. Si K est un espace fibré, même propriété appartiendra à tout relèvement de C ; mais si K est proprement un ouvert étalé au-dessus de R^n, un relèvement de C peut exister, qui soit prolongeable à p. Si l'on a fait choix d'un domaine fondamental, à tout point de K correspond un élément du groupe A : quand on tend vers un point frontière, cet élément s'éloigne à l'infini sur le groupe : une certaine correspondance doit exister entre la frontière de K et l'infini de A : dans le cas d'une variété à deux dimensions possédant une seule composante torique, si K est le quart de plan, il est facile de préciser cette correspondance. En général, l'on peut proposer la conjecture suivante : tout point frontière de K est accessible en ligne droite de tout point intérieur, ou encore : la frontière de K a, localement, une structure polyédrale. De telles propriétés semblent probables, si l'on considère la suite des transformés d'un segment, par une transformation s'éloignant à l'infini sur A : si seulement une valeur propre ne tend pas vers 0, le segment convenablement orienté, vient s'appliquer sur la frontière.

2. Fibrations de V. Une transformation de A qui commute avec toutes les autres, correspond en tout point à un élément bien déterminé du groupe H/J, quotient des groupes fondamentaux de V et K ; l'on peut en général écrire a ou son carré sous forme exponentielle : e^{LA} ; alors e^{tLA} définit sur K une fibration qui, parce que a est un élément particulier, se projettera sur V en donnant un champ à une détermination ; (soit g un germe de K au-dessus de p ; $\hat{g}$ le germe d'application restreinte à la fibre associée à a passant par $ga'g$, $a'\hat{g}$ les transformés de ces germes par un élément a' de A : si $a'g = g'$, il faut montrer que $\hat{g}' = a'\hat{g}$: ce qui résulte de $a'e^{tLA} = e^{tLA}a'$, conséquence directe de $aa' = a'a$.) Parfois, le champ est formé de courbes fermées non homotopes à o, parfois la fibre s'enlace indéfiniment ; comme on peut le voir sur l'exemple des variétés à deux dimensions : sur une variété cylindrique, une seule transformation de A définit des fibres cycliques.

En tout cas, l'existence d'un champ continu prouve que la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.

Le dernier paragraphe contient un théorème vrai de toute variété munie ou non d'une structure localement affine.

3. Groupe fondamental. A la fin du chapitre 2, nous avons construit sur K un domaine fondamental pour le groupe A, et remarqué que le groupe A pouvait être engendré par un nombre fini de ses éléments : si l'on choisit pour système de générateurs les éléments qui transforment un domaine fondamental donné en un domaine, son homologue ayant avec lui un point frontière en commun, l'on associe biunivoquement les domaines accessibles par un chemin contenant moins de n points frontières, avec les éléments de A égaux à un monome de moins de n termes, formés avec les générateurs. Désignons par $E(n)$ le nombre de ces domaines : l'on peut montrer que le théorème suivant est vrai :

THEOREME I. *Si la caractéristique d'Euler-Poincaré n'est pas nulle, la fonction $E(n)$ croît au moins exponentiellement.*

En effet, la caractéristique d'E.P. de la réunion de l'ensemble des $E(n)$ domaines avec leurs frontières, est la caractéristique de la boule : si pourtant chaque q-simplexes servait de frontière à autant de $q+1$ - simplexes dans cette réunion que sur K triangulé, la caractéristique serait : $E(n)$ (E.P.), où (E.P.) désigne la caractéristique de la variété : or les seuls simplexes pour lesquels la situation soit différente sont ceux possédant un point sur la frontière de la réunion : leur nombre est au plus : $(E(n)\text{-}E(n\text{-}1))\,(F)$, où F désigne le nombre de simplexes de domaine fondamental pour la triangulation employée. Pour maintenir constante quand n croit la caractéristique de la réunion, le nombre de ces simplexes doit être au moins de l'ordre de $E(n)$ (E.P.). La fonction $E(n)$ vérifie donc une inégalité du type :

$$k\,E(n) < E(n) - E(n-1)$$

ce qui prouve que $E(n)$ croit au moins exponentiellement.

Bibliographie

C. Ehresmann : Sur les espaces localement homogènes, L'enseignement Mathématique 1936, p. 325.

C. Ehresmann : Structures locales, Annali di Matematica, 1954, p. 133.

N. Kuiper : On convex local projective spaces, Convegno internazionale di geometria differentiale 1953.

Tables des Matières

Résumé : I et II

Chapitre I Variétés localement affines : 1

1 Définition constructive 1

2 Germes d'application 1

3 Définition intrinsèque 2

4 Géométrie affine locale de V 3

5 Triangulation 4

Chapitre II Représentation du groupe fondamental : 6

1 Théorème de relèvement 6

2 Revêtement connexe 7

3 Représentation affine 8

4 Domaine d'affinité 9

5 Domaine fondamental 10

Chapitre III Genre topologique des surfaces localement affines : 12

1 Forme réduite du domaine fondamental 12

2 Rotation de la tangente à une courbe 13

3 Propriétés du domaine fondamental 14

4 Principe de la démonstration 16

5 Les surfaces unilatères 17

Chapitre IV Groupes Abéliens affines : 18

1 Théorèmes préparatoires 18

2 Représentations affines 20

3 Affinités commutant avec A 22

4 Invariante du groupe A 23

5 Le cas unilatère 24

Chapitre V Surfaces localement affines : 27

1 Décomposition de V 27

2 Structure des composantes de V 28

3 Classification des surfaces bilatères 29

4 Les surfaces unilatères 31

Appendice : 1 Points frontière de K 33

2 Fibrations de V 33

3 Groupe fondamental 34