Marie-Hélène Schwartz

Espaces pseudo fibrés

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. nº 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris

SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Avril 1959

ESPACES PSEUDO FIBRES

par Marie-Hélène SCHWARTZ

1 Définition

Nous avons été conduits à définir des espaces pseudo fibrés, non par un souci de généralisation, mais en étudiant l'obstruction à la construction d'un champ de vecteurs (ou de systèmes de vecteurs) tangents à une variété différentiable et assujettis à des conditions supplémentaires. Notre but, seulement partiellement atteint, est de déterminer un système de classes de cohomologie qui jouera dans un espace pseudo fibré un rôle analogue à celui de la classe obstructrice d'un espace fibré.

EXEMPLE. Soient dans $\mathbb{R}^3$ deux calottes sphériques $\overline{X}_2$ et $\overline{X}_3$ ayant pour bord commun un cercle X_1. Soient X_2 et X_3 les complémentaires de X_1 dans $\overline{X}_2$ et $\overline{X}_3$ et X_4 le complémentaire de $\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3$ dans $\mathbb{R}^3$. Les X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ forment une partition (X) de $X = \mathbb{R}^3$. Soient E l'espace fibré de tous les vecteurs non nuls issus de tous les points de $\mathbb{R}^3 = X$ et ϖ la projection de E sur X. En chaque point x de X, $x \in X_i$, considérons l'ensemble des vecteurs non nuls tangents à X_i. Soit $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble engendré lorsque x décrit X, par tous ces vecteurs, muni de la projection ϖ et de la topologie induite par celle de E. $\mathcal{E}$ est un espace pseudo fibré, la fibre $\mathcal{E}(x) = \varpi^{-1}(x)$, $x \in X_i$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{k*}$, k étant la dimension de X_i, chaque $\mathcal{E}(X_i)$ est un espace fibré.

Il n'existe pas de section globale de $\mathcal{E}$ au dessus de sa base $X = \mathbb{R}^3$ mais il en existe par exemple, au dessus de tout plan Π de $\mathbb{R}$ passant par l'axe du cercle X_1.

Il n'y a pas de relèvement des homotopies dans $\mathcal{E}$

Considérons la trace γ du plan Π sur $\overline{X}_2$, l'un des arcs γ' déterminés sur X_1 par Π, la boule $\beta \subset \overline{X}_2$ de bord $\gamma \cup \gamma'$ et un homéomorphisme du carré I^2 sur β de manière qu'un côté ait pour image γ ; considérons la section s de $\mathcal{E}$ au dessus de γ formée de vecteurs perpendiculaires à Π, elle n'est pas prolongeable au dessus de γ' donc à fortiori au dessus de β.

Base de $\mathcal{E}$

C'est une variété topologique X munie d'une partition (X_i) en sous-variétés topologiques (sans bords) X_i de façon que l'adhérence $\overline{X}_i$ de chaque X_i soit réunion d'une sous famille de la partition, et d'un complexe simplicial (K) tel que les $\overline{X}_i$ en soient des sous-complexes. Nous désignerons par K^h (resp $\overline{K}^h$) un simplexe ouvert (resp fermé) de dimension h, par N la dimension de X et nous ferons figurer au besoin, la dimension d'une sous-variété X_i en indice supérieur en supprimant l'indice inférieur s'il n'y a pas ambiguité. Les bords seront désignés par $\dot{X}_1$, $\dot{K}^h$ etc.

Hypothèse de finesse sur (K) : K est pris assez fin pour que, quelque soit K^h, $K^h \subset X_i$, $\bar{K}^h \cap X_i$ se réduise à un seul simplexe fermé vide ou non. Il en résulte aisément que $\bar{K}^h$ rencontre au plus un X_i de chaque dimension.

Parties L. Soit K^o un sommet de K^h, $U = \overset{o}{\text{et}}\,(K^o)$ son étoile ouverte dans (K) et $L = \bar{K}^h \cap \overset{o}{\text{et}}\, K^o$. L rencontre également au plus un X_i de chaque dimension, la plus petite est p tel que $K^o \in X^p$ et la plus grande k tel que $K^h \subset X^k$; on peut écrire :

$$L = \bar{K}^h \cap \overset{o}{\text{et}}\, K^o = \sum_{q=p}^{q=k} L \cap X^q \tag{1}$$

Fibres-type de $\mathcal{E}$

Une même fibre type F_k va correspondre à tous les X_i de même dimension k. F_k sera un espace topologique localement compact, et la famille des F_k sera munie d'une famille d'injections continues que nous appellerons les monomorphismes. Cette famille sera formée, pour tout couple k, k'(k' $\leqslant$ k) d'un ensemble de monomorphismes de $F_{k'}$ dans F_k (ensemble non vide si $F_{k'}$ et F_k sont non vides). On suppose que si $k'' \leqslant k' \leqslant k$, le composé d'un monomorphisme de $F_{k''}$ dans $F_{k'}$ et d'un monomorphisme de $F_{k'}$ dans F_k est un monomorphisme de $F_{k''}$ dans F_k.

Cartes de $\mathcal{E}$

Un espace pseudo fibré $\mathcal{E}$ de base X et dont les fibres types sont les F_k est un ensemble muni d'une projection ϖ sur X tel que pour tout L de X il existe une famille de cartes sur $\mathcal{E}$ (L) = $\varpi^{-1}(L)$, une carte étant définie par un espace $\mathcal{L}$ et une bijection g de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}$ (L) de la manière suivante :

Soit comme précédemment $L = \bar{K}^h \cap \overset{o}{\text{et}}\, K^o$, $K^o \in X^p$, $K^h \subset X^k$. Considérons toutes les dimensions q qui figurent dans la formule (1). On peut former une famille de monomorphismes μ_q de F_q dans F_k (soit $\alpha_q = \mu_q(F_q)$) telle que si $q' \leqslant q$, on ait $\alpha_{q'} \subset \alpha_q \subset \alpha_k = F_k$ et que $\mu_{q'}$ coïncide qvec l'application composée d'un monomorphisme de $F_{q'}$ dans F_q et de μ_q.

Formons alors l'espace $\mathcal{L}$ suivant :

$$\mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q \text{ ; on a } L \times \alpha_p \subset \mathcal{L} \subset L \times F_k \tag{2}$$

$\mathcal{L}$ est muni de la topologie induite par celle du produit $L \times F_k$.

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ définis par les familles de monomorphismes μ_{1q} et μ_{2q}. Un isomorphisme de $\mathcal{L}_1$ sur $\mathcal{L}_2$ est une application dont la restriction à $\mathcal{L}(x) = \{x\} \times \alpha_q$ (pour $x \in X^q$) est un monomorphisme sur $\{x\} \times \alpha'_q$.

Une carte sera définie par $\mathcal{L}$ et par bijection g de $\mathcal{L}$ sur $\varpi^{-1}(L)$ telle que $\varpi \circ g = \pi_L$ (π_L étant la projection sur L dans le produit $L \times F_k$).

L'ensemble des cartes définissant $\mathcal{E}$ devra satisfaire aux deux conditions de compatibilité suivantes :

1) Si deux cartes sont définies sur $\varpi^{-1}(L)$ par $\mathcal{L}_1$, g_1 et $\mathcal{L}_2$, g_2, l'application $\sigma_{12} = g_1^{-1} \circ g_2$ doit être un isomorphisme de $\mathcal{L}_2$ sur $\mathcal{L}_1$ au sens défini ci-dessus.

2) Si on a $L' \subset L$ et une carte de $\varpi^{-1}(L)$ définie par $\mathcal{L}$, g, la restriction de g à $\mathcal{L}(L') = \pi_L{}^{-1}(L')$ définit une carte de $\varpi^{-1}(L')$.

Topologie de $\mathcal{E}$. Les ouverts seront les parties $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\varpi(\mathcal{O})$ soit un ouvert de X et que, pour $\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, et pour toute carte de $\mathcal{E}(L)$ définie par $\mathcal{L}$ et g, $g^{-1}(\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O})$ soit un ouvert de $\mathcal{L}$.

$\mathcal{E}$ n'est pas localement compact. $\mathcal{E}(X_i^k) = \varpi^{-1}(X_i^k)$ est un espace fibré de fibre F_k et dont le groupe structural est celui des monomorphismes de F_k sur lui-même.

2 Espaces pseudo fibrés à fibres vectorielles et espaces associés.

Nous appellerons ainsi un espace pseudo fibré $\mathcal{E}$ dont les fibres F_k sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ et pour lequel les monomorphismes sont des applications linéaires (homogènes) injectives. Dans les deux cas, les dimensions que nous indiquerons seront prises par rapport à $\mathbb{R}$ (sauf dans l'expression abrégée ν -plan-complexe).

Espace Γ.

On suppose données une base X munie de la partition X_i et du complexe (K) et une famille de fibres-type vectorielles F_k, les monomorphismes étant les injections linéaires.

Soit Γ un espace topologique muni d'une application continue ϖ sur X et tel que $\Gamma(X^k) = \varpi^{-1}(X^k)$ possède une structure d'espace fibré de fibre F_k. Un espace pseudo fibré est un espace Γ.

EXEMPLE. Si X et tous les X_i sont des variétés différentiables (resp. presque-complexes) l'espace de tous les vecteurs tangents à tous les X_i est un espace Γ, la topologie étant induite par celle de l'espace fibré E de tous les vecteurs tangents à X. Le problème se pose de savoir si un tel espace, défini uniquement par la partition (X_i) possède une structure d'espace pseudo-fibré. Nous dirons dans ce cas, que c'est un espace pseudo fibré de type tangentiel (réel ou complexe). F_k sera isomorphe à $\mathbb{R}^k$ (resp $\mathbb{C}^{k/2}$). Dans le cas complexe tous les entiers k sont nécessairement pairs.

Applications φ.

Une famille d'applications φ, si elle existe, se compose relativement à chaque simplexe K^h d'un ensemble d'applications φ_h vérifiant les conditions φ_1 et φ_2 suivantes : Soit $U_h = \mathring{\mathrm{et}}\, K^h$ (étoile ouverte de K^h dans (K)) et $K^h \subset X^k$.

(φ_1) φ_h est une injection continue de $U_h \times F_k$ dans $\Gamma(U_h)$ dont la restriction à $\{x\} \times F_k$ est une application linéaire sur $\Gamma(x)$.

(φ_2) Soit $K^\ell \subset U_h \cap X^q$ et $U_\ell = \overset{\circ}{\text{et}}\, K^h \subset U_h$, $(K^h \subset \bar{K}^\ell)$ alors à une application donnée φ_h on peut associer une application φ_ℓ de $U_\ell \times F_q$ dans $\Gamma(U_\ell)$ telle que pour $x \in U_\ell$, $\varphi_\ell(\{x\} \times F_q)$ admette pour sous espace vectoriel $\varphi_h(\{x\} \times F_k)$.

Dans les espaces Γ de types tangentiels, une application φ_h correspond à un champ d'éléments de contacts de dimension h tangent en tout point x de $U(x \in X^m)$, à X^m.

PROPOSITION 1. Tout espace pseudo fibré possède une famille d'applications φ. De plus, si toutes les fibres sont munies d'une orientation, une telle famille vérifie la condition $(\varphi)'_1$ suivante :

$(\varphi)'_1$ Si φ_h et φ'_h sont deux injections de $U \times F_k$ dans $\mathcal{E}(U)$ définies par la condition (φ_1), elles sont strictement homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue de $U \times F_k \times [0,1]$ dans $\mathcal{E}(U)$ telle que pour $t \in [0,1]$, $U \times F \times \{t\} \to \mathcal{E}(U)$ soit une des applications définies par (φ_1), soit $\varphi_h(t)$ et que $\varphi_h(0) = \varphi_h$ et $\varphi_h(1) = \varphi'_h$.

Cette condition est donc réalisée pour tous les espaces pseudo-fibrés à fibres vectorielles sur $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 2. Si un espace Γ possède une famille d'applications φ, il possède une structure d'espace pseudo-fibré à fibres vectorielles et cette structure est unique.

Ces propositions se démontrent par des constructions suivant les squelettes de dimensions croissantes de $(K) \times U$ et par certains relèvements d'homotopies.

Espace ${}^r\mathcal{E}$ associé à un espace $\mathcal{E}$ à fibres vectorielles.

Appelons r-repère réel (resp. complexe) une suite ordonnée de r vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). L'espace ${}^r\mathcal{E}(x)$ des r-repères de $\mathcal{E}(x)$ engendre, lorsque x décrit X, un espace ${}^r\mathcal{E}$. ${}^r\mathcal{E}(X^k)$ est vide, dans le cas réel pour $k < r$ et, dans le cas complexe, pour $k < 2r$. La structure d'espace pseudo-fibré de ${}^r\mathcal{E}$ est établie par des cartes qui se définissent de manière évidente à l'aide de celles de $\mathcal{E}$. (on appelle ${}^r\alpha_q$ l'espace des r-repères de α_q on pose ${}^r\mathcal{L} = \bigcup (L \cap X^q) \times {}^r\alpha_q$ et g définit une application g' de ${}^r\mathcal{L}$ sur ${}^r\mathcal{E}(L)$).

La fibre F_k de ${}^r\mathcal{E}(X^k)$ ayant pour rétract une variété de Stiefel Whitney réelle (resp. complexe), son homologie est triviale jusqu'à la dimension $k - r$ (resp. $k - 2r + 1$) exclue .

L'exemple donné au début de cet exposé est un espace ${}^1\mathcal{E}$ associé à un espace de type vectoriel réel (c'est un espace Γ et l'existence de cartes résulte par exemple de la proposition 2.)

3 Sections dans les espaces pseudo fibrés, homologie et cohomologie sur X.

Complexe cellulaire (D), dual de K dans X.

On choisit une fois pour toutes un tel complexe (D) en fixant d'abord un de ses sommets dans chaque K^N (N dimension de X) puis un côté coupant canoniquement chaque K^{N-1}, etc,. Une cellule ouverte D^m coupera canoniquement chaque K^h, à fortiori chaque X_i. Soit (T) le complexe intersection de (K) et (D). On a :

$$T^n = D^{N-h+n} \cap K^h$$

chaque T^n est dans un X_i et on vérifie que chaque $\bar{T}^n$ est dans au moins un L.

On cherchera à construire des sections au dessus des squelettes de dimensions croissantes $(D)^m$ de (D). Si $\mathcal{E}$ n'est pas vide la fibre type F_N ne l'est pas et il existe des sections au dessus de $(D)^\circ$.

Dimension d'obstruction.

Nous la noterons $N - \rho + 1$

Définition de ρ. Soit $\nu(k)$ la dimension du premier groupe d'homotopie non nul de F_k ; considérons la relation suivante relative à un entier ρ' :

$$k \geqslant \rho' + 1 \text{ entraîne } F_k \neq \emptyset \text{ et } \nu(k) \geqslant k - \rho'$$

elle est trivialement vérifiée pour $\rho' = N$; si elle est vérifiée pour ρ' elle l'est à fortiori pour $\rho'' > \rho'$. ρ sera la borne inférieure des entiers vérifiant cette relation.

HYPOTHESE : On suppose que $k = \rho$ entraîne encore $F_k \neq \emptyset$, (cette hypothèse est trivialement vérifiée dans le cas des ${}^r\mathcal{E}$ à structure complexe, k étant paire et ρ impaire). On peut alors caractériser ρ par les relations :

$$(3) \qquad \begin{cases} k \geqslant \rho + 1 & \text{entraîne} \quad \nu(k) \geqslant k - \rho \\ \text{il existe } k \geqslant \rho \text{ tel que} & \nu(k) < k - \rho + 1 \end{cases}$$

Existence d'une section $s \mid (D)^{N-\rho}$

Soit $T^n = D^{N-h+n} \cap K^h \subset X^k$ avec $n - h \geqslant \rho$ donc $0 \leqslant n \leqslant h - \rho \leqslant k - \rho$; or $k \geqslant \rho$ entraîne $F_k \neq \emptyset$. On peut donc définir s au dessus des $T^\circ \in D^{N-h+n} \subset (D)^{N-\rho}$. Supposons, pour $n \geqslant 1$, $s \mid \dot{T}$ déterminée ; on a : $\bar{T}^n \subset L \subset \bar{K}^h$, soit $(\mathcal{L}, g)$ une carte sur $\mathcal{E}(L)$ g^{-1}. s définit une section au dessus de $\dot{T}^n$ dans $\mathcal{L}$ et à fortiori dans $L \times F_k$; $n \geqslant 1$ entraîne $k \geqslant \rho + 1$ donc $\nu(k) \geqslant k - \rho \geqslant n$ donc g^{-1}. s est prolongeable en une section de $L \times F_k$ au dessus de l'intérieur T^n de $\bar{T}^n$, mais $T^n \times F_k \subset K^h \times F_k \subset \mathcal{L}$ donc la section prolongée a, par g, une image qui définit $s \mid \bar{T}^n$. D'où l'existence de $s \mid D^{N-\rho}$.

D'après (3) nous pouvons choisir $K^k \subset X^k$ avec $k \geqslant \rho$ et $\nu(k) < k - \rho + 1$; Soit $T^{k-\rho+1} = D^{N-\rho+1} \cap K^k$, la dimension d'obstruction dans $L \times F_k$ étant $\nu(k) + 1$ il y a des sections sur le bord de $T^{k-\rho+1}$ qui ne sont pas prolongeables à l'intérieur.

Donc :

PROPOSITION 4. La dimension d'obstruction est $N - \rho + 1$, ρ étant défini par les relations (3).

PROPOSITION 5. Deux sections $s \mid (D)^{N-\rho}$ et $s' \mid (D)^{N-\rho}$ sont toujours homotopes au-dessus de $(D)^{N-\rho-1}$ par une homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$. La démonstration se conduit comme précédemment après avoir introduit les produits $L \times (0,1)$, $\mathcal{L} \times (0,1)$ etc...

EXEMPLES. Si $\mathcal{E}$ est à fibres vectorielles $\rho = 0$ et $N - \rho + 1 = N + 1$, il n'y a évidemment pas d'obstruction.

S'il est de type tangentiel, pour l'espace ${}^1\mathcal{E}$ associé, F_k est isomorphe à $\mathbb{R}^{k^*}$ ou $\mathbb{C}^{\frac{k^*}{2}}$ donc $\rho = 1$ et la dimension d'obstruction est N. Pour l'espace ${}^r\mathcal{E}$ sur le corps $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$), $\rho = r$ (resp $\rho = 2r - 1$) et la dimension d'obstruction est $N - r + 1$ (resp $N - 2r + 2$).

Si la partition (X_i) se réduit à la seule partie $X_1 = X$ on retrouve des résultats connus.

Homologie et cohomologie sur X.

Nous considérerons l'homologie simpliciale à coefficients entiers dont les chaînes de base sont les cellules D^m orientées et la cohomologie correspondante à valeurs entières.

REMARQUE. En fait la valeur d'une cochaine sur $D^m(D^m \cap K^{N-m} = T^\circ \in X^k)$ sera souvent définie par un élément du groupe d'homologie $H_{\nu(k)}(\mathcal{E}(T^\circ), Z)$, $\mathcal{E}(T^\circ)$ étant isomorphe à F_k. Tous ces groupes ne forment un faisceau de coefficients que moyennant certaines hypothèses sur les monomorphismes des F_k. Pratiquement, nous nous restreindrons aux cas suivants où il n'y a pas de nouvelles hypothèses à faire : ${}^r\mathcal{E}$ *est un espace associé à un espace* $\mathcal{E}$ *à fibres vectorielles complexes, ou, si* $r = 1$, *à fibres vectorielles réelles orientées.* Dans ces cas, chaque $H_{\nu(k)}(\mathcal{E}(T^\circ), Z)$ est bien canoniquement isomorphe à Z (Dans le cas réel, pour $r > 1$ il faudrait prendre la cohomologie à valeurs dans Z_2 ; nous laisserons donc ce cas de côté).

Homologie et cohomologie dans une partie X_i^k. Les chaînes de base pour la dimension k-h seront les $D^{N-\rho} \cap X_i^k$ (de sens bien déterminé puisque X_i^k est supposé orienté).

Les coefficients seront pris dans Z ainsi que les valeurs des cochaines correspondantes. Nous désignerons par :

$C_*(X)$, $C_*(X_i)$, $C^*(X)$, $C^*(X_i)$ les espaces des chaînes et cochaines ainsi définis, et par $H^*(X)$ et $H^*(X^i)$ les algèbres de cohomologie.

Homomorphismes λ_{i_*}, μ_{i_*}, λ_i^*, μ_i^*.

λ_{i_*} : $C_*(X_i) \to C_*(X)$ est l'homomorphisme injectif défini par $\lambda_{i_*}(D^{N-h} \cap X_i) = D^{N-h}$.

μ_{i_*} : $C_*(X) \to C_*(X_i)$ est l'homomorphisme surjectif défini par :

$$\mu_{i_*}(D^{N-h}) \begin{cases} = D^{N-h} \cap X_i, & \text{si } D^{N-h} \cap X_i \neq \emptyset \\ = 0 & \text{, si } D^{N-h} \cap X_i = \emptyset \end{cases}$$

$\mu_{i_*}\lambda_{i_*}$ = identité ; μ_{i_*} conserve les bords.

λ_i^* : $C^*(X) \to C^*(X_i)$ est l'homomorphisme transposé de λ_{i_*}.

μ_i^* : $C^*(X_i) \to C^*(X)$ est l'homomorphisme transposé de μ_{i_*}.

λ^* diminue les degrés de $N-k$, μ^* les augmente de $N-k$; $\lambda_i^* \mu_i^*$ = identité ; μ_i^* commute avec d opérateur cobord d'où l'homomorphisme : $\bar{\mu}_i^* : H^*(X_i) \to H^*(X)$.

Soit $c \in C^{k-h}(X_i)$, on a $< \mu_i^* c . D^{N-h} > = < c.(D^{N-h} \cap X_i) >$ ou zéro si $D^{N-h} \cap X_i$ est vide. Il y a isomorphisme entre $C^*(X_i)$ et le sous-module différentiel $C_i^*(X)$ de $C^*(X)$ formé de toutes les cochaines s'annulant sur toute chaîne dont le support ne rencontre pas X_i ; cet isomorphisme augmente les degrés de $N-k$.

4 Espaces pseudo fibrés, images réciproques par certaines applications.

Application f.

Soient $\underline{X}$ et X deux variétés de même dimension N munies des partitions $(\underline{X}_i)$ et (X_j). On suppose qu'il existe une application f de $\underline{X}$ sur X, continue, conservant les ouverts et possédant les propriétés suivantes :

Sa restriction à chaque $\underline{X}_i^k$ est une application sur une variété X_j^k qui est localement un homéomorphisme.

Il existe un complexe (K) qui triangule tous les $\overline{X}_i$, qui vérifie l'hypothèse de finesse, et qui est tel que la restriction de f à l'adhérence de chaque composante connexe de $f^{-1}(K^h)$ soit un homémorphisme.

On démontre alors :

PROPOSITION 6.

1°) Que l'image réciproque de (K) définit un complexe $(\underline{K})$ qui triangule tous les $\underline{X}_i$ et vérifie l'hypothèse de finesse.

2°) Que si (D) est une triangulation cellulaire duale de (K) dans X, son image réciproque définit une triangulation cellulaire duale de $(\underline{K})$ dans $\underline{X}$ (Nous avons démontré dans un travail antérieur que D^n coupant canoniquement tous les X_i, son image réciproque est une variété).

3°) Que le degré topologique local de f au voisinage de tout point de $\underline{X}_i$ est le même, $m(\underline{X}_i)$, et que les points où le degré topologique local est >1 forment un sous-complexe de (K) dont la dimension est N - 2.

Notons que f est une application simpliciale de $(\underline{K})$ dans (K) mais nullement de $(\underline{D})$ dans D.

On désignera par $\bar{m}(\underline{D}^h)$ le degré topologique de la restriction de f à $\underline{D}^h$ (laquelle est une application sur un D^h).

$$\text{Si } \underline{D}^h \cap K^{N-h} \subset \underline{X}^k \quad \text{on a } \bar{m}(\underline{D}^h) = m(\underline{X}^k) \tag{4}$$

Cette formule est un cas particulier de la suivante :

Si $\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q \neq \emptyset$ la restriction de f à cette partie est une application sur une partie $D^h \cap X^q$ dont nous désignerons le degré topologique par $\bar{m}(\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q)$; on vérifie que :

$$\bar{m}(\underline{D}^h) = \sum_j \bar{m}(\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q) \times m(\underline{X}_j^q) \tag{5}$$

pour tous les $\underline{X}_j^q \cap \underline{D}^h$ ayant même image.

Image réciproque $\underline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ par f.

$\mathcal{E}$ est un espace pseudo fibré dont la base est X munie de la partition (X_i) et du complexe (K). L'ensemble des points de $\underline{\mathcal{E}}$ sera la partie du produit $\underline{X} \times \mathcal{E}$ formée des couples $(\underline{x}, z)$ tels que $f(x) = \varpi(z)$. La projection $\underline{\varpi}$ du point $\underline{z}$ défini par le couple $(\underline{x}, z)$ sera $\underline{x}$, d'où l'isomorphisme canonique de $\underline{\varpi}^{-1}(\underline{x}) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x})$ sur $\varpi(x) = \mathcal{E}(x)$, $x = f(\underline{x})$ qui, à z défini par $(\underline{x}, z)$, fait correspondre z. Quand $\underline{x}$ décrit $\underline{X}$ on obtient une application canonique $\tilde{f}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$.

Cartes sur $\mathcal{E}$ $(\underline{L})$: La restriction de f à $\underline{L}$ est un homéomorphisme sur une partie L de même dimension ; en la composant avec l'identité, on obtient un homéomorphisme h de $\underline{\mathcal{L}} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (\underline{L} \cap \underline{X}^q) \times \alpha_q$ sur $\mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q$. Par ailleurs la restriction f' de $\tilde{f}$ à $\underline{\mathcal{E}}$ $(\underline{L})$ est une bijection, elle a donc un inverse f'^{-1}.

Si une carte sur $\mathcal{E}$ (L) est définie par l'application g de $\mathcal{L}$, on définira la carte correspondante sur $\mathcal{E}$ $(\underline{L})$ par l'application $f'^{-1}.g.h$ de $\underline{\mathcal{L}}$ sur $\underline{\mathcal{E}}$ (L).

On vérifie que la topologie définie sur $\underline{\mathcal{E}}$ par ces cartes, est la topologie induite par celle de $\underline{X} \times \mathcal{E}$.

Image réciproque d'une section.

L'isomorphisme canonique entre $\mathcal{E}$ (x) et $\underline{\mathcal{E}}$ $(\underline{x})$ pour $f(x) = \underline{x}$ permet d'associer canoniquement à une section s de $\mathcal{E}$ au-dessus de $A \subset X$, une section $\underline{s}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ au-dessus de $f^{-1}(A)$.

Image directe d'une chaîne.

Soit f_* l'homomorphisme de $C_*(\underline{X})$ dans $C_*(X)$ défini par

$$f_*(\underline{D}_i) = \bar{m}(\underline{D}_i)\, f(\underline{D}_i) \tag{6}$$

$\underline{D}^m$ étant orienté, $f(D)$ est une cellule orientée D_i. Cette chaîne simpliciale $\bar{m}(\underline{D}_i) = D_i$ coïncide avec la chaîne singulière définie par l'application f de $\underline{D}_i$ dans $\underline{X}$.

On vérifie que f_* commute avec l'opérateur bord :

$$f_*(\dot{\underline{D}}^\nu) = \sum_j f_*(\underline{D}_j^{\nu-1}) = \sum_j \bar{m}(\underline{D}_j^{\nu-1})\, f(\underline{D}_j^{\nu-1})$$

en groupant tous les $D_j^{\nu-1}$ qui ont même image $D_h^{\nu-1} \subset D^\nu$, la somme des $\bar{m}(\underline{D}_j^{\nu-1})$ étant le degré topologique global $\bar{m}(\underline{D}^\nu)$ de la restriction de f à $\underline{D}^\nu$ on a, avec les orientations des bords :

$$f_*(\dot{D}^\nu) = \sum_h \bar{m}(\underline{D}^\nu)\, D_h^{\nu-1} = \bar{m}(\underline{D}^\nu)\, \dot{D}^\nu = \text{bord } f_*(D^\nu)$$

Image réciproque d'une cochaine.

f^* est l'homomorphisme de $C^*(X)$ dans $C^*(\underline{X})$ transposé de f_* ; il conserve donc les degrés, commute avec l'opérateur cobord ($\underline{d}f^* = f^*d$) et induit un homomorphisme $\bar{f}^*$ de $H^*(X)$ dans $H^*(\underline{X})$. On a donc, si $c \in C^\nu(X)$:

$$< f^*(c).\, \underline{D}^\nu > = m(\underline{D}^\nu) < c.\, f(D^\nu) > \tag{7}$$

Homomorphisme f_{i*} de $C_*(\underline{X}_i)$ dans $C_*(X_i)$. Il est défini par :

$$f_{i*}(\underline{D}_j \cap \underline{X}_i) = \bar{m}(D_j \cap X_i)\, .\, f(\underline{D}_j \cap \underline{X}_i)$$

$f(\underline{D}_j \cap \underline{X}_i)$ est un $D_j \cap X_i$.

Homomorphisme f_i^* de $C^*(X_i)$ dans $C^*(\underline{X}_i)$. Il est défini pour $c \in C^*(X_i)$ par :

$$< f_i^*(c).\, \underline{D}_j^\nu \cap \underline{X}_i > = \bar{m}(\underline{D}_j^\nu \cap \underline{X}_j) < c.\, f(\underline{D}_j^\nu \cap \underline{X}_i) > \tag{8}$$

Appliquons la propriété 6 et les formules (5) et (8) avec $c \in C^\nu(X_i)$ et X_j tels que $f(\underline{D}^\nu \cap \underline{X}_j) = D^\nu \cap X_i$; il vient :

$$<f^* \mu_i^* c.\underline{D} > = \bar{m}(\underline{D}^\nu) < \mu_i^* c.D^\nu > =$$

$$\sum_j m(\underline{X}_j)\, \bar{m}(\underline{D}^\nu \cap \underline{X}_j) < c.\, D^\nu \cap X_i > = \sum_j m(\underline{X}_j) < f_j^*(c).\underline{D}^\nu \cap \underline{X}_i >$$

$$= \sum_j m(\underline{X}_j) < \underline{\mu}_j^* f_j(c).\underline{D}^\nu >$$

donc :

$$f^* \mu_i^* = \sum_j m(\underline{X}_j)\, \underline{\mu}_j^* f_j^* \quad \text{pour} \quad f(\underline{X}_j) = X_i. \tag{9}$$

5 Système obstructeur dans certains espaces pseudo fibrés.

Si $N-\rho+1$ est la dimension d'obstruction, le système obstructeur s'il existe se composera pour chaque X_i^k d'une classe $c(X_i^k) \in H^{k-\rho+1}(X_i)$. Les deux conditions suivantes devront être vérifiées :

(0_1) Pour qu'il existe une section de $\mathcal{E}$ au dessus de $(D)^{N-\rho+1}$, il faut et il suffit que tous les $c(X_i^k)$ soient nuls.

(0_2) Si f est une des applications de $\underline{X}$ dans X étudiées dans le paragraphe précédent, si $\underline{\mathcal{E}}$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}$ par f et si $\mathcal{E}$ et $\underline{\mathcal{E}}$ possèdent des systèmes obstructeurs, ceux-ci doivent être liés par les relations :

$$f_i^* \, c(X_i) = \underline{c}(\underline{X}_i) \qquad \text{avec } X_i = f(\underline{X}_i) \tag{10}$$

Système de cocycles obstructeurs attachés à une section $s \mid D^{N-\rho}$.

Un tel système, s'il est défini, sera formé par un cocycle $c(s, X_i)$ de chaque classe $c(X_i)$. Nous noterons :

$$\hat{c}(s, X_i) = \mu_i^* c(s, X_i) \in C^{N-\rho+1}(X)$$

CAS PARTICULIER. soit un espace ${}^r\mathcal{E}$ de type tangentiel, X étant différentiable et, dans le cas complexe, presque complexe. Il est plongé dans l'espace ${}^rE$ de tous les r - systèmes tangents à X, une section $s \mid D^{N-\rho}$ définit classiquement un cocycle obstructeur $c(s, X)$; la condition $(0'_3)$ suivante devra être vérifiée :

Condition $(0'_3)$:

$$c(s, X) = \sum_i \hat{c}(s, X_i) \tag{11}$$

Définition du système obstructeur pour un espace ${}^r\mathcal{E}$ *de type tangentiel complexe lorsque tous les* $\overline{X}_i$ *sont des sous-variétés presque complexes.*

On peut écrire $\overline{X}_i^k = \sum_j X_j^q$ pour $X_i^q \subset \overline{X}_i^k$; réciproquement à chaque X_i^k on peut faire correspondre un système d'entiers positifs ou négatifs θ_{ij} et $\theta_{ij'}$ tels que :

$$X_i^k = \sum_j \theta_{ij} \overline{X}_j^q + \sum_{j'} \theta_{ij'} \overline{X}_{j'}^{q'} \quad \text{avec } 0 \leqslant q' < \rho - 1 \leqslant q \leqslant k \tag{12}$$

On a $\theta_{ii} = 1$. Remarquons que si $X_j^q \subset \overline{X}_i^k$ toute cochaine de X qui s'annule sur les chaines ne rencontrant pas X_j^q s'annule à fortiori sur celles qui ne rencontrent pas X_i^k donc $\nu_{ij}^* = \mu_i^{*-1} \mu_j^*$ a un sens et est un homomorphisme de $C^*(X_j^q)$ dans $C^*(X_i^k)$ augmentant les degrés de k-q et conservant les bords ; il définit donc un homomorphisme $\overline{\nu}_{ij}^*$ de $H^*(X_j^q)$ dans $H^*(X_i^k)$.

Définition des classes $c(X_i^k)$ Soit $c(\overline{X}_j^q)$ la classe de Chern de $\overline{X}_j^q$ pour la dimension $q-\rho+1$, on pose :

(13) $$c(X_i^k) = \sum_j \theta_{ij}\, \bar{\nu}_{ij}^{*}\, c(\overline{X}_j^q) \in H^{k-\rho+1}(X_i^k)$$

Définition des cocycles $c(s, X_i)$ attachés à une section $s \mid (D)^{N-\rho}$. Cette section, par sa restriction à $(D) \cap \overline{X}_j^q$ (qui est une triangulation cellulaire de $\overline{X}_j^q$) définit une section de l'espace de tous les r-repères tangents à $\overline{X}_j^q$ au dessus du $(k-\rho)$-squelette donc aussi un cocycle obstructeur de la classe $c(\overline{X}_j^q)$. Posons :

$$\hat{c}(\overline{X}_j^q) = \mu_j^{*}\, c(s, \overline{X}_j^q) \in C^{N-\rho+1}(X) \text{ et :}$$

(14) $$\hat{c}(s, X_i^k) = \sum_j \theta_{ij}\, \hat{c}\,(s, \overline{X}_j^q) = \mu_i^{*\,-1}\, c\,(s, X_i^k)$$

la dernière égalité, justifiée par le fait que μ_i^{*} est injectif et que $\hat{c}(s, X_i^k)$ est dans son image, définit le cocycle obstructeur $c(s, X_i^k)$; sa classe est $c(X_i^k)$ définie par (13).

Définition des cochaines différence attachées à $s \mid (D)^{N-\rho}$, $s' \mid (D)^{N-\rho}$ et à l'homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$. Les restrictions de s, s' et ψ à $\overline{X}_j^q$ définissent la cochaine différence $\delta(s,s',\psi \,;\, \overline{X}_j^q)$ dont le cobord est $c(s',\overline{X}_j^q) - c(s,\overline{X}_j^q)$ (cf. [1]). On pourra écrire :

(15) $$\hat{\delta}(s,s'\ \psi \,;\, X_i^k) = \sum_j \theta_{ij}\, \mu_j^{*}\, \delta(s,s',\psi \,;\, \overline{X}_j^q) = \mu_i^{*\,-1}\, \delta(\, s,s',\psi \,;\, X_i^k).$$

Chaque cochaine différence $\delta(s,s',\psi \,;\, X_i^k) \in C^{*\,k-\rho}(X_i^k)$ est ainsi définie de manière unique, et l'on a :

(16) $$d\,\delta(s,s',\psi \,;\, X_i) = c(s',X_i) - c(s,X_i)$$

Vérification de la condition (O_1). S'il existe une section $s \mid (D)^{N-\rho+1}$, elle définit sur chaque $\overline{X}_j^q$ une section de l'espace fibré de tous les r-repères tangents à $\overline{X}_j^q$ au-dessus du squelette de dimension $q-\rho+1 = q-2r+2$; donc, d'après la théorie de l'obstruction :

$$c(\overline{X}_j^q) = 0,\ \ \nu_{ij}^{*}\ c(\overline{X}_j^q) = 0 \ \text{ et }\ c(X_i^k) = 0$$

Réciproquement supposons nuls tous les $c(X_i^k)$; il résulte de la formule (13) appliquée pour des dimensions croissantes de k, que tous les $c(\overline{X}_i^k)$ sont nuls ; en effet supposons $c(\overline{X}_{i'}^{k'}) = 0$ démontré pour $k' < k$, $k \geqslant \rho - 1$ (c'est toujours vrai pour $k = \rho - 1$) ; la formule (13) donne :

$$0 = c(X_i^k) = \theta_{ii}\ \nu^{*}_{ii}\ c(\overline{X}_i^k) + 0 = c(\overline{X}_i^k)$$

Définissons alors une section au dessus des $(D)^{N-\rho+1} \cap X_i^k$ en opérant par dimensions k croissantes : pour $k < \rho - 1$ la trace de $(D)^{N-\rho+1}$ est vide ; pour $k = \rho-1$ elle est formée de points en nombre $c(\overline{X}_i^{\rho-1}) = 0$. Supposons donc que $\dot{X}_i^k \cap (D)^{N-\rho+1} = \emptyset$ ou sinon, que s y est déjà déterminée ; c'est alors une section de l'espace fibré de tous les r-repères tangents à $\overline{X}_i^k$ au dessus d'un complexe de dimension $\leq k-\rho-1$; comme la classe de Chern $c(\overline{X}_i^k)$ de degré $k-\rho+1$ est nulle, cette section est prolongeable au dessus du $(k-\rho+1)$ - squelette $X^k \cap (D)^{N-\rho+1}$ et le prolongement étant fait au-dessus de X_i^k reste bien dans $\mathcal{E}\ (X_i^k)$. D'où la proposition.

Remarquons que le système des classes de Chern $c(\overline{X}_i^k)$ vérifie aussi (0_1) ; mais il ne vérifie ni (0_2) ni $(0'_3)$.

Vérification de la condition $(0'_3)$. La formule (12) donne :

$$\overline{X}^N = X = \sum_i X_i = \sum_i \sum_j \theta_{ij}\,\overline{X}_j + \sum_i \sum_{j'} \theta_{ij'}\,\overline{X}_{j'}$$

$$= \sum_j \Big[\overline{X}_j \sum_i \theta_{ij}\Big] + \sum_{j'} \Big[\overline{X}_{j'} \sum_i \theta_{ij'}\Big]$$

Le coefficient de $\overline{X}^N$ est 1 ; celui de chaque autre $\overline{X}_j$ ou $\overline{X}_j$ est zéro ; en effet raisonnons par récurrence pour des dimensions k décroissantes, supposons l'assertion vraie pour k' tel que $k < k' < N$ et considérons un point intérieur à X_j^k ; seuls interviennent alors le coefficient 1 de $\overline{X}^N$ et $\sum_i \theta_{ij}$ lequel est donc nul. D'après (14) on a donc :

$$\sum_i \hat{c}(s,x_i) = \sum_i \sum_j \theta_{ij}\,\hat{c}(s,\overline{X}_j) = \sum_j \hat{c}(s,\overline{X}_j) \sum_i \theta_{ij} = \hat{c}(s,\overline{X}^N) = c(s,X).$$

Condition (0_2). Soit f une des applications définies au § 4 et telle que les $\overline{X}_i$ et les $\underline{\overline{X}}_i$ soient presque complexes et que si ${}^r\mathcal{E}$ *et* ${}^r\underline{\mathcal{E}}'$ sont les espaces pseudo-fibrés des r-repères tangents, ${}^r\underline{\mathcal{E}}'$ soit l'image réciproque de ${}^r\mathcal{E}$ par f. Alors les $c(X_i)$ et $c(\underline{X}_i)$ étant définis par la formule (13), il faudra vérifier la formule (10). Nous ne donnerons pas cette vérification qui résulte d'une définition directe des $<\hat{c}(s,X_i)\ .\ D^{N-\rho+1}>$ par les classes d'homologie de certains cycles.

UNE FORMULE. Si $\underline{s}$ est l'image réciproque de s et X_i l'image directe de $\underline{X}_i$, on obtient aussi : $f_i^* c(s,X_i) = c(\underline{s},X_i)$. Désignons par $\underline{X}_j$ les images réciproques de X_i, on a, en vertu des formules (9) et (10) :

$$\hat{c}(s,X_i) = \sum_j m(\underline{X}_j)\,\hat{c}(\underline{s},\underline{X}_j) \quad \text{pour } f(X_j) = X_i \tag{17}$$

En sommant alors pour tous les X_i on obtient, compte tenu de $(0'_3)$:

$$(18)\quad \text{ou}\quad \begin{cases} f^* c(s,X) = \sum_{\ell} m(\underline{X}_\ell)\, \hat{c}(\underline{s},\underline{X}_\ell) & \text{pour } \underline{X}_\ell \subset X \\ f^* c(s,X) - c(\underline{s},\underline{X}) = \sum_{\ell} [\, m(\underline{X}_\ell) - 1\,]\, \hat{c}(\underline{s},\underline{X}_\ell) & \end{cases}$$

C'est de cette formule, démontrée dans un cas particulier que nous avons déduit les les classes de Chern d'une quadrique complexe.

Détermination du système obstructeur pour un espace ${}^1\mathcal{E}$ *de type tangentiel réel lorsque tous les* X_i *sont orientés.*

Nous avons vu que l'on peut encore prendre la cohomologie à valeurs entières Soit $c(\tilde{X}_i^k)$ la classe de degré k qui, sur le cycle fondamental défini par X_i^k orienté est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré du complexe $\tilde{X}_i^k$ (que l'on peut supposer connexe). La formule (12) est valable et l'on définira $c(X_i^k)$ par la formule (13). Les conditions (0_1) et $(0'_3)$ se vérifient comme précédemment et la condition (0_2) résulte d'un théorème déjà démontré (cf [2]), ou peut se vérifier par un décompte de simplexes.

REMARQUE. Mentionnons brièvement trois méthodes qui permettent de définir des systèmes obstructeurs pour des espaces ${}^r\mathcal{E}$ de type tangentiel complexe dans des cas moins restrictifs que le précédent.

1° Lorsqu'il existe une application f de $\underline{X}$ dans X par laquelle les espaces ${}^r\mathcal{E}$ des r-repères tangents se correspondent, si l'on connaît les $c(X_i)$ on peut dans certains cas démontrer que les $f^* c(X_i)$ vérifient la condition (0_1) et définir les $c(\underline{X}_i)$ par la formule (10).

2° Définition directe des cochaines différences et des cocycles obstructeurs : les $< \delta(s, s', \psi\ ; X_i).D^{N-\rho} >$ et les $< \hat{c}(s,X_i).D^{N-\rho+1} >$ sont définis directement par les classes d'homologie de certains cycles.

3° Détermination de sections s' particulières telles que, si $D^{N-\rho+1} \cap K^{\rho-1} \in X_j^p$ on ait nécessairement :

$$(19)\quad \begin{cases} < \hat{c}(s', X_i^k).\, D^{N-\rho+1} > = 0 & \text{si } X_i^k \neq X_j^p \\ < \hat{c}(s', X_j^p).\, D^{N-\rho+1} > = < c(s', X).\, D^{N-\rho+1} > & \end{cases}$$

Cette méthode généralise une méthode déjà employée dans [2] pour la structure réelle lorsque $r = 1$.

Bibliographie

[1] N. Steenrod, The topology of fibre bundles. Princeton University Press (1951).

[2] M.H. Schwartz, Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet. Acta Mathematica t. 91 (1954).

[3] M.H. Schwartz, Classes de Chern des quadriques complexes. Bull. Sci. Math. (Sept. Oct. 1956).

Les questions abordées dans cet exposé seront developpées dans un article à paraître [Bull. Soc. Math. 1960]