Séminaire de topologie et géométrie différentielle

Nicolaas H. Kuiper

Sur les immersions à courbure totale minimale

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. nº 5, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
E GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Avril 1959

SUR LES IMMERSIONS A COURBURE TOTALE MINIMALE

par Nicolaas H. KUIPER

X^n est une variété différentiable de classe C^∞, connexe, compacte, de dimension n. E^N est l'espace (vectoriel) euclidien de dimension N. $f : X \to E$ est une immersion C^∞ de X dans E, c'est-à-dire une application différentiable de classe C^∞ et de rang n en chaque point de X.

Suivant Chern et Lashof [1] nous définissons la *courbure totale* $\tau(f) = \tau(X^n, f, E^N)$ de f comme suit : Soit M^{N-1} le fibré avec base X des vecteurs unitaires normaux de $f(X^n)$ dans E^N, et S^{N-1} la N-1-sphère des vecteurs unitaires de E^N. L'application canonique de M^{N-1} dans S^{N-1} est nommée γ. Sa duale γ^* applique l'élément de volume $d\sigma$ de S^{N-1} sur une N-1-forme $\gamma^* d\sigma$ de M^{N-1}.

Alors

$$\tau(f) = \tau(X^n, f, E^{N-1}) = \int_{M^{N-1}} \frac{|\gamma^* d\sigma|}{c_{N-1}}, \qquad c_{N-1} = \int_{S^{N-1}} d\sigma \tag{1}$$

Soit Φ la classe des fonctions réelles différentiables ϕ définies sur X, qui ne possèdent que des points critiques non-singuliers.

Un point critique d'une fonction est d'indice k si la fonction ϕ admet dans un voisinage de ce point la représentation en coordonnées locales $\phi_1, \dots \phi_n$:

$$\phi = K - \phi_1^2 - \dots - \phi_k^2 + \phi_{k+1}^2 + \dots + \phi_n^2, \ K \text{ constant.}$$

Le *nombre des points critiques d'indice k* sera $\beta_k(X^n, \phi)$.

Alors on définit : $\beta(X^n, \phi) = \Sigma_{k=0}^n \beta_k(X^n, \phi)$

$$\beta_k(X^n) = \min_{\phi \in \Phi} \beta_k(X \ , \phi)$$

$$\beta_*(X \ ) = (\beta_0(X^n), \ \beta_1(X^n), \dots \beta_n(X^n))$$

$$\beta\,(X^n) = \min_{\phi \in \Phi} \beta(X^n, \phi)$$

parce que $\beta_k(X^n, \phi) = \beta_{n-k}(X \ , -\phi)$ on a $\beta_k(X^n) = \beta_{n-k}(X^n)$

C'est évident que

(2) $$\beta(X^n) \geqq \Sigma_{k=0}^n \beta_k(X^n)$$

Dans [2] on trouve le *théorème*

(3) $$\tau(f) = \tau(X^n, f, E^{N-1}) \geqq \beta(X^n)$$

Si $\rho_k(X^n)$ est le rang maximal du k-ième groupe d'homologie par rapport à un anneau variable, on a les *inégalités de Morse*.

(4) $$\beta_k(X^n) \geqslant \rho_k(X^n)$$

La composition de (1), (2), (3), (4), donne (voir [2])

(5) $$\tau(f) \geqq \beta(X^n) \geqq \Sigma_{k=0}^n \beta_k(X^n) \geqq \Sigma \rho_k(X^n) = \rho(X^n)$$

DEFINITION. *Une immersion est nommée à courbure absolue totale minimale, ou brièvement, minimale si l'on a*

(6) $$\tau(f) = \beta(X^n)$$

On peut donner une autre définition des immersions minimales par la propriété caractéristique suivante :

Soit $z \epsilon S^{N-1}$ un vecteur unitaire de E^N, $x \epsilon X$; $z f(x)$ le produit scalaire des vecteurs z et $f(x)$. C'est la composition de f avec une fonction réelle linéaire $y \to zy$, $y \epsilon E^N$, qui applique E^N sur $\mathbb{R}$. Alors on sait que si f est une immersion arbitraire, obéissant aux conditions données au premier paragraphe, les vecteurs $z \epsilon S^{N-1}$ pour lesquels la fonction $z f(x) : X \to \mathbb{R}$ possède des points critiques singuliers, forment un ensemble clos et de mesure nulle. Pour les immersions minimales on a :

THEOREME 1 (Voir [2]). *Dans le cas, et seulement dans le cas, où l'immersion $f : X^n \to E^N$ est minimale, le nombre des points critiques non singuliers de la fonction $z f(x)$, $z \epsilon S^{N-1}$, est*

(7) $$\beta(X^n, z f(x)) = \beta(X^n) \text{ pour chaque } z f(x) \epsilon \Phi.$$

On peut dire (c'est équivalent) que si $z f(x) \epsilon \Phi$, alors dans le système des hyperplans orthogonaux au vecteur z, il existe $< \beta(X^n)$ hyperplans tangents par rapport à $f(X^n)$.

Si $\beta(X^n) = 2$, $N = n + 1$, f minimal, alors $f(X^n)$ est une hypersurface convexe. *Minimal est alors une généralisation de convexe.*

Une application $f : X^n \to E^N$ est dite proprement dans E^N si $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan de l'espace euclidien E^N.

PROBLEME. *Si X^n est donnée, quels sont les valeurs que N peut prendre si $f : X^n \to E^N$ est une immersion minimale, proprement dans E^N.*

Nous considérons une immersion minimale $f : X^n \to E^N$ d'une C^∞ - variété compacte connexe X^n, proprement dans E^N et avec *les conditions supplémentaires :*

(8) $$\beta(X^n) = \Sigma_{k=0}^n \beta_k(X^n)$$
$$\beta_o(X^n) = \beta_n(X^n) = 1$$

Je ne sais pas si les conditions (8) valent pout tout X

Soit $f|(x)|$ la longueur du vecteur $f(x)$ et soit $q = f(x_o)$, $x_o \epsilon X$, un vecteur pour lequel

$$|q| = |f(x_o)| = \max_{x \epsilon X} |f(x)|$$

V^{N-n} est l'espace vectoriel de toutes les fonctions linéaires, pas nécessairement homogènes, de E^N qui s'annulent sur q et sur l'espace tangent de q par rapport à $f(X)$.

Si $\phi \epsilon V^{N-n}$ la composition $\phi \circ f$ est une fonction réelle sur X^n dont le 0-jet (= valeur) et le 1-jet au point x_o s'annulent. Soit $W = W^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ l'espace vectoriel des 2-jets au point x_o, des applications différentiables de X^n dans $\mathbb{R}$, dont les 1-jets s'annulent. Si $\xi_1, \dots \xi_n$ sont les coordonnées locales de X^n et $x_o = (0,\dots 0)$, alors on peut identifier W avec le système des formes homogènes quadratiques dans $\xi_1 \dots \xi_n$. Ce système est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Soit $\pi(\phi) \epsilon W$ le 2-jets obtenu de $\phi \epsilon V^{N-n}$. C'est évident que π est un homomorphisme, mais dans les conditions données sur f et X, on a même :

LEMME. $\pi : V^{N-n} \to W^{\ n(n+1)}$ *est un monomorphisme*

C'est-à-dire $Ker\ \pi = 0$.

Du lemme on déduit immédiatement $N\text{-}n \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, ou :

COROLLAIRE . Dans les conditions (8) on a :

$$N \leq \frac{1}{2}n(n+3)$$

PREUVE DU LEMME. Si $Ker\ \pi \neq 0$, alors il existe un élément $\psi \epsilon V^{N-n}$, $\psi \neq 0$, qui obéit $\pi(\psi) = 0$. Soit $\phi \epsilon V^{N-n}$ une fonction linéaire avec gradient proportionnel au vecteur q. Par exemple la fonction $q(y\text{-}q)$ (produit scalaire, variable $y \epsilon E^N$). C'est évident que $\pi(\psi)$ est positif défini. Si est un nombre réel, on a

$$\pi(\phi + \lambda\psi) = \pi(\phi) + \lambda\pi(\psi) = \pi(\phi)$$

On sait que $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan. C'est pourquoi il existe une valeur λ telle que l'hyperplan $\phi + \lambda\psi = 0$ divise $f(X)$ en trois parties non vides $\phi + \lambda\psi = 0$, < 0 et > 0. La fonction $(\phi + \lambda\psi) \circ f$ possède un point critique d'indice n au point $x_o \epsilon X$, mais la valeur en ce point n'est pas la valeur maximum sur X. Alors il existe une fonction linéaire $\chi \epsilon \Phi$, suffisamment proche de la fonction $\phi + \lambda\psi$, dont la composition avec f possède au moins 2 points critiques non singuliers d'indice n : en tenant compte de (8) cela contredit la minimalité de f.

On dira qu'un système linéaire de formes quadratiques sur n variables $\xi_1, \dots \xi_n$ qui contient au moins une forme définie positive *tolère* un n+1-tuple de nombres

$\beta_* = (\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n)$, si pour chaque k avec $\beta_k = 0$, le système ne contient aucune forme d'indice k. Soit $g(\beta_*)$ la dimension maximale d'un tel système linéaire de formes quadratiques sur n variables, qui tolère β_*. Alors on a :

THEOREME 2. *Si f est une immersion minimale d'une variété compacte connexe X^n proprement dans l'espace euclidien E^N, et si X^n obéit les conditions (8), alors*

$$N \leqq n + g(\beta_*(X^n))$$

CAS SPECIAUX :

a) X^n, $g \leqq \frac{1}{2} n(n+1)$, $\quad N \leqq \frac{1}{2} n(n+3)$ $\quad$ (voir [2]).

b) $X^n = S^n$ le n-sphère, $\beta_* = (1, 0, 0, \dots 0, 1)$, $g = 1$, $N \leqq n+1$
(Fenchel $n = 1$; Chern-Lashof $n = n$ [1]).

c) $\beta_1(X^n) = 0$, $n = 2m$ ou $2m+1$, $g \leqq m^2$, $N \leqq n + m^2$
par exemple les espaces projectifs complexes.

d) $P^2(K)$, le plan quaternionnien $n = 8$, $\beta_* = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
$g = 6$, $N \leqq 14$.

e) Le plan des octaves de Cayley, $n = 16$, $\beta = \beta_8 = \beta_{16} = 1$,
$\beta_i = 0$ pour les autres i, $g = 10$, $N \leqq 26$.

Remarquons que dans les cas des plans projectifs c), d), e), on peut réaliser la limite pour N du théorème, par des immersions minimales.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2. Avec les notations plus haut il suffit de démontrer que $\pi(V^{N-n})$, un système linéaire de formes quadratiques, tolère $\beta_*(X)$. Si le système ne tolère pas $\beta_*(X)$, alors il existe $\psi \in V^{N-n}$ et k, ainsi que $\pi(\psi)$ a l'indice k, tandis que $\beta_k(X) = 0$. Alors pour une fonction linéaire sur E^N, χ, assez près de ψ on peut assurer que la composition $\chi \circ f$ est un élément de Φ, et que

$$\beta_k(X^n, \chi \circ f) > \beta_k(X^n) = 0$$

Cela contredit la minimalité suivant le théorème 1.

Pour démontrer les cas spéciaux, il faut calculer la fonction $g(\beta_*)$. Je ne connais la valeur de $g(\beta_*)$ que pour des cas spéciaux. Le cas a) est trivial. Dans le cas b) toutes les formes non singulières du système sont définies positives alors $g = 1$. Dans les cas d) et e), et plus généralement dans le cas $n = 2m$, $\beta_0 = \beta_n = 1$, $\beta_m \neq 0$, $\beta_i = 0$ pour $i \neq 0, m, 2m$, on trouve une représentation dss formes du système par des matrices symétriques de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ {}^tB & \mu \end{pmatrix}$$

dont les quatre symboles sont des matrices $m \times m$; λ et μ sont scalaires, c'est-à-dire multiples d'une matrice-unité, B est similaire c'est-à-dire une multiple scalaire d'une matrice orthogonale.
${}^tB$ est le transposé de B. Alors il faut déterminer les systèmes linéaires de dimensions maximales, des matrices $m \times m$ semblables B. Ces systèmes sont étudiés par Hurwitz [3]. Dans les cas $m = 2, 4, 8$, on trouve par exemple les systèmes de dimensions 2, 4, 8 :

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\
x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 \\
x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 \\
x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & -x_6 & -x_5 \\
x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\
x_6 & -x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\
x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\
x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1
\end{array}\right|$$

et dans ces $g(\beta_*)$ est $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$ et $8 + 2 = 10$.
Le cas spécial c) demande bien plus de calculs et je ne veux pas y insister dans cette conférence. Pour $n = 2m = 6$ on a un exemple d'un système de dimension maximale $m^2 = 9$,

$$\left|\begin{array}{cccccc}
a & 0 & p & q & r & s \\
0 & a & -q & p & -s & r \\
p & -q & b & 0 & u & v \\
q & p & 0 & b & -v & u \\
r & -s & u & -v & c & 0 \\
s & r & v & u & 0 & c
\end{array}\right|$$

Bibliographie

[1] CHERN S.S. and LASHOF R.K., On the total curvature of immersed manifolds I. Am. J. Math. 79 (1957), 396-318 ; II Mich. Math. J. 5 (1958), 5-12.

[2] KUIPER, Nicolaas H., Immersions with minimal total absolute curvature. Coll. de Géométrie Différentielle, Bruxelles, décembre 1958, à paraitre.

[3] HURWITZ, A., Math. Werke II p. 641 = Math. Ann. 88 (1923), 1-25.