Séminaire de topologie et géométrie différentielle

S. Dolbeault-Lemoine

Variétés réductibles plongées dans un espace à courbure constante

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Novembre 1958

VARIETES REDUCTIBLES
PLONGEES DANS UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

par S. DOLBEAULT-LEMOINE

Cet exposé résume un article à l'impression dans les «Rendiconti di Matematica» ; il a pour but l'étude des variétés V_{n-1}, de dimension n-1, plongées dans un espace V_n, de classe C^{ω}, à courbure constante K non nulle, lorsque ce plongement est partout régulier de classe C^r $(r > 3)$ et induit sur V_{n-1} une structure riemannienne réductible de classe C^r. Une étude locale permet d'abord de déterminer la métrique de V_{n-1} ; ensuite nous ferons une étude globale des V_{n-1} plongées soit dans la sphère S_n, soit dans l'espace projectif réel P_n.

1. Réductibilité locale. A tout point $x \in V_{n-1}$, associons un repère orthonormé constitué par n vecteurs $\vec{e}_1(x),\dots, \vec{e}_n(x)$ de l'espace vectoriel tangent en x à V_n, dont l'un, $\vec{e}_p(x)$, est normal en x à V_{n-1}.

La réductibilité de V_{n-1} se traduit localement par le fait que la métrique est décomposable [3], c'est-à-dire que les formes de Pfaff associées au repère mobile dans le formalisme de E. Cartan peuvent être séparées en au moins deux systèmes dont chacun est complètement intégrable ; nous supposerons d'abord qu'il existe seulement deux tels systèmes, désignés respectivement par ω^i, ω^{α}, où i et α sont des éléments des ensembles d'indices :

$$I = \{1,\dots, p\text{-}1\}, \qquad A = \{p+1,\dots, n\} ;$$

ceci se traduit par la condition

$$\omega_i^{\alpha} = 0, \tag{1}$$

portant sur la forme de connexion. Par différentiation extérieure de (1), il vient :

$$\omega_i^p \wedge \omega_p^{\alpha} + \Omega_i^{\alpha} = 0 \tag{2}$$

où Ω_i^{α} désigne la restriction à V_{n-1} de la forme de courbure de V_n, relative aux mêmes indices i et α. La variété V_{n-1} étant supposée de classe C^r, le calcul précédent exige $r \geq 3$.

Considérons la forme asymptotique ϕ de V_{n-1} pour le plongement envisagé dans V_n. Exprimée à l'aide de K, des composantes de ϕ et des symboles de Kronecker, la condition (2) est, par suite de l'indépendance des formes ω^i, ω^α, équivalente au système suivant :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{ik}\phi_{\alpha j} - \phi_{ij}\phi_{\alpha k} = 0, \qquad \phi_{i\beta}\phi_{\alpha\gamma} - \phi_{i\gamma}\phi_{\alpha\beta} = 0, \\ \qquad \phi_{ik}\phi_{\alpha\beta} - \phi_{i\beta}\phi_{\alpha k} - K\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} i, j, k \in I, \\ \alpha, \beta, \gamma \in A. \end{pmatrix}$$

Pour $n > 3$, il résulte du système (3) d'une part qu'il existe deux ensembles d'indices I et A, et deux seulement et, d'autre part, qu'il existe deux constantes r et ρ, liées à K par la relation

$$(4) \qquad r\rho = K,$$

et telles que

$$(5) \qquad \phi_{ik} = r\delta_{ik}, \qquad \phi_{\alpha\beta} = \rho\delta_{\alpha\beta}$$

Pour $n = 3$, le système (3) se réduit à une seule équation qui, jointe à un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre (équations de Codazzi) montre que ϕ dépend de deux fonctions arbitraires d'une variable.

En résumé, on a obtenu le

LEMME 1. *Soit* V_{n-1} *une variété régulièrement plongée dans un espace* V_n *à courbure constante non nulle, et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable ; si, de plus,* $n > 3$, *la forme asymptotique de* V_{n-1} *se décompose en la somme de deux formes quadratiques dont chacune est proportionnelle à la partie correspondante de la métrique ; si* $n = 3$, *la variété* V_{n-1} *est localement déformable.*

Pour $n > 3$, considérons, au point $x \in V_{n-1}$, la variété intégrale $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) du système $\omega^\alpha = 0$ (resp. $\omega^i = 0$) ; une étude locale montre que $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est munie par son plongement dans V_n d'une structure de variété riemannienne de dimension $p-1$ (resp. $n-p$) à courbure K_I (resp. (K_A) constante. On trouve en effet :

$$(6) \qquad K_I = K + r^2, \qquad K_A = K + \rho^2 ;$$

l'élimination de r et ρ entre les équations (4) et (6) donne

$$(7) \qquad K_I K_A - K(K_I + K_A) = 0.$$

REMARQUE. Le calcul de K_I et K_A suppose essentiellement que les ensembles I et A ne sont pas réduits à un seul élément et que K n'est pas nul. Si I (resp. A) est réduit à un seul élément, il suffit de remarquer que $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est localement isométrique à la droite réelle R^1. Pour $K = 0$, voir [1].

Compte tenu du signe de K, on obtient le

THEOREME 1. *Soit V_{n-1} une variété de dimension n-1, munie d'une métrique décomposable par un plongement de classe $C^r (r \geqq 3)$ dans un espace V_n de dimension n et de courbure constante K.*

1° Si K est positif et si n est supérieur ou égal à quatre, la métrique de V_{n-1} est la somme :

- soit de deux métriques à courbures constantes positives,

- soit d'une métrique à courbure constante positive et du carré d'une différentielle exacte.

(Au cas $n = 3$ correspond évidemment une métrique localement euclidienne).

2° Si K est négatif, V_{n-1} peut être une variété localement euclidienne, sinon sa métrique est la somme :

- soit de deux métriques à courbures constantes, l'une positive, l'autre négative,

- soit d'une métrique à courbure constante (positive ou négative) et du carré d'une différentielle exacte.

2. Réductibilité dans la sphère S_n. Supposons que V_n *est la sphère* S_n de courbure riemannienne K ; alors, d'après la première partie du théorème 1, $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est localement isométrique à la sphère S_{p-1} (resp. S_{n-p}) de courbure K_I (resp. K_A). Or l'existence d'un plongement isométrique et régulier du produit topologique et riemannien $S_{p-1} \times S_{n-p}$ dans S_n est un fait bien connu que nous mettrons suffisamment en évidence en considérant, comme espace auxiliaire, l'espace numérique réel R^{n+1}. Un choix convenable d'axes de coordonnées rectangulaires permet de définir ce produit par les équations :

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1/K_I, \qquad \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 = 1/K_A. \tag{8}$$

Il est plongé dans la sphère S_n d'équation :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1/K. \tag{9}$$

Cette construction donne en particulier le plongement du tore T_2 dans S_3.

Inversement, soit V_{n-1} la plus générale des variétés de dimension n-1, connexes par arcs, régulièrement plongées dans S_n, et munies par ce plongement de métriques partout décomposables. Alors, chacun des systèmes de Pfaff $\omega^i = 0$, $\omega^a = 0$, définit sur V_{n-1} une structure feuilletée [2] et toute variété intégrale maximale de l'un d'eux est une feuille ; restreignons la notation $V_{p-1}(x)$, $V_{n-p}(x)$ à la composante connexe de x des deux feuilles passant par x.

Supposons $n > 3$. Une étude locale de la variété $V_{p-1}(x)$ montre que tout point $y \epsilon V_{p-1}(x)$ possède un voisinage $U(y)$ qui est non seulement isométrique à la sphère $S_{p-1}(y)$ de courbure K_1 qui lui est tangente en y, mais encore admet les mêmes formes asymptotiques que $S_{p-1}(y)$, relativement au plongement dans S_n, de sorte que, d'après un théorème de rigidité [1],

$$U(y) \subset S_{p-1}(y)\,; \tag{10}$$

si, de plus, V_{n-1} est supposée complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n, $V_{p-1}(x)$ l'est aussi (car c'est une variété intégrale maximale d'un système de Pfaff complètement intégrable sur V_{n-1}, donc une variété complète pour son plongement dans V_{n-1}) et l'on peut constituer un atlas sur $V_{p-1}(x)$ à l'aide de cartes telles que $U(y)$, de sorte que

$$V_{p-1}(x) = S_{p-1}(x). \tag{11}$$

En général, nous ne pouvons affirmer que $V_{p-1}(x)$ soit une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n, mais nous pouvons toujours constituer un atlas sur $V_{p-1}(x)$ à l'aide de cartes $U(y)$ vérifiant (10) ; alors, dans la relation (11), l'égalité est remplacée par l'inclusion.

Une étude semblable peut être faite pour la feuille $V_{n-p}(x)$.

La variété V_{n-1} pouvant être considérée comme la réunion des feuilles de chacun des deux systèmes, on a ainsi obtenu le

THEOREME 2. *Il existe des variétés de dimension n-1, régulièrement plongées dans la sphère de dimension n et munies, par ce plongement, de métriques partout décomposables ; pour n > 3, chaque composante connexe d'une telle variété est contenue dans le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives p-1 et n-p.*

REMARQUES. a) Ce théorème n'exclut pas la possibilité, pour les feuilles de l'un des systèmes, d'être de dimension un, c'est-à-dire homéomorphes à un cercle ou contenues dans un cercle, suivant qu'elles sont complètes ou non.

b) Pour $n = 3$, on a trouvé un plongement du tore T_2 dans S_3, mais on ne peut pas affirmer que toute V_2 régulièrement plongée dans S_3 et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable soit contenue dans T_2, car nous avons vu, au n° 1, qu'une telle V_2 est localement déformable.

c) Des relations entre holonomie et réductibilité, il résulte que parmi les V_{n-1} régulièrement plongées dans S_n, les seules variétés à groupe d'holonomie homogène réductible sont celles qui sont munies par leur plongement d'une métrique partout décomposable ; chaque composante connexe d'une telle variété a un groupe d'holonomie homogène isomorphe à un sous-groupe du produit direct de deux groupes de rotations ; si, de plus, l'une de ces composantes connexes est une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n, son groupe d'holonomie homogène est isomorphe au produit direct de deux groupes de rotations. Cette dernière remarque est à rapprocher de résultats obtenus par Kobayashi [4].

3. Réductibilité dans l'espace projectif réel P_n. Considérons la sphère S_n, de courbure K, plongée dans R^{n+1}, et désignons par $d(x,x')$ la distance de deux points, x et x', mesurée dans R^{n+1}. Soit $\Re$ la relation d'équivalence suivante dans S_n : les deux points x et x' sont équivalents s'ils sont diamétralement opposés sur S_n (autrement dit, si $x, x' \in S_n$ et si $d(x, x') = 2K^{-1/2}$). On sait que P_n est homéomorphe à $S_n / \Re$. Supposons P_n muni d'une métrique localement sphérique.

Considérons le produit $V_{n-1} = S_{p-1} \times S_{n-p}$, plongé dans S_n, et montrons qu'il est saturé pour $\Re$. En effet, soient successivement le point $x \in V_{n-1}$, le point y diamétralement opposé à x sur $S_{p-1}(x)$ et le point x' diamétralement opposé à y sur $S_{n-p}(y)$; on a :

$$d(x, y) = 2K_I^{-1/2}, \qquad d(y, x') = 2K_A^{-1/2} ; \tag{12}$$

Des formules (7) et (12), il résulte :

$$d(x, x') = 2K^{-1/2} ; \tag{13}$$

mais x' est un point de S_n, puisque $V_{n-1} \subset S_n$. Donc V_{n-1} est bien saturé pour $\Re$. Passons aux quotients : à S_n correspond P_n, à V_{n-1} correspond un ensemble W_{n-1} ; ceci se résume dans le diagramme commutatif suivant :

(14)
$$\begin{tikzcd} V_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & W_{n-1} \arrow[d, dotted] \\ S_n \arrow[r, dashed] & P_n \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent l'inclusion et les flèches horizontales l'application naturelle de S_n sur P_n et sa restriction à V_{n-1}.

L'étude du diagramme (14) montre que :

a) W_{n-1} est une variété différentiable de dimension $n-1$, régulièrement plongée dans P_n,

b) la métrique induite sur W_{n-1} est partout décomposable,

c) W_{n-1} est complète pour cette métrique.

Il en résulte le

LEMME 2. *Il existe des W_{n-1} munies, par un plongement régulier dans P_n, de structures riemanniennes complètes à métriques partout décomposables ; chacune de ces variétés admet pour revêtement le produit topologique et riemannien $S_{p-1} \times S_{n-p}$.*

Inversement, *pour $n > 3$*, par un raisonnement analogue à celui fait pour les variétés à métrique décomposable plongées dans $\dot{S}_n$, on montre que la rigidité de W_{n-1} dans P_n *a pour conséquence le*

LEMME 3. *Pour $n > 3$, toute W_{n-1} connexe par arcs, régulièrement plongée dans P_n et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable peut être prolongée en une variété qui est complète pour son plongement dans P_n et qui admet pour revêtement le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives p-1 et n-p.*

Reprenons le diagramme (14) où V_{n-1} est supposée complète pour son plongement dans S_n, et considérons un couple de feuilles de V_{n-1} équivalentes pour $\Re$: ce couple s'applique sur un ensemble contenu dans W_{n-1}. Posons :

$$(15) \qquad \begin{cases} (S_{p-1}(x), S_{p-1}(x')) \longrightarrow \Sigma_{p-1}(\xi), \\ (S_{n-p}(x), S_{n-p}(x')) \longrightarrow \Sigma_{n-p}(\xi). \end{cases}$$

Du diagramme (14), il résulte que les ensembles $\Sigma_{p-1}(\xi)$, (resp. $\Sigma_{n-p}(\xi)$ sont des variétés de dimension p-1 (resp. n-p), complètes pour le métrique induite par plongement dans P_n ; par chaque point ξ de W_{n-1} passe un couple et un seul de ces variétés, car ce point ξ correspond biunivoquement à un couple de points x, x' équivalents pour $\Re$ sur V_{n-1}. Ainsi les $\Sigma_{p-1}(\xi)$, $\Sigma_{n-p}(\xi)$ définissent sur W_{n-1} une structure doublement feuilletée.

Cherchons l'intersection de deux feuilles de systèmes différents. Pour cela, considérons sur V_{n-1} les points x, x' et y vérifiant les formules (12) et adjoignons-leur le point y' équivalent à y pour $\Re$. L'étude de (14) montre que, si η désigne le point de W_{n-1} qui correspond au couple (y, y'), on a :

$$(16) \qquad \Sigma_{p-1}(\xi) \cap \Sigma_{n-p}(\xi) = \{\xi, \eta\},$$

de sorte que W_{n-1} n'est pas homéomorphe à un produit topologique.

Résumons :

THEOREME 3. *Il existe des variétés W_{n-1} régulièrement plongées dans P_n et munies par ce plongement de métriques partout décomposables ; pour $n > 3$, chaque composante connexe d'une telle variété est contenue dans une variété de même dimension et complète* *pour son plongement dans* P_n *; cette dernière variété n'est pas homéomorphe à un produit topologique, mais admet un revêtement à deux feuillets qui est le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives* p-1 *et* n-p.

REMARQUES. a) Le revêtement précédent est le revêtement universel de W_{n-1} si et seulement si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$n-2 \geq p \geq 3.$$

Dans tous les autres cas, le revêtement universel de W_{n-1} est le produit de S_{n-2} par R^1.

b) Indépendemment de toute question de plongement, il est possible de construire, à partir d'une W_{n-1} connexe par arcs et complète, une variété $\underline{W}_{n-1}$ qui est elle-même connexe par arcs, complète et qui, de plus, est homéomorphe à un produit topologique : cette $\underline{W}_{n-1}$ est la variété quotient de W_{n-1} par la relation d'équivalence qui identifie les deux points d'intersection, ξ et η, de deux feuilles de systèmes différents de W_{m-1}. Ceci constitue un exemple d'un théorème dû à A.G. Walker ; une variété à métrique partout décomposable qui n'est pas réductible admet un revêtement réductible et est elle-même un revêtement d'une variété réductible [5].

4. Remarque sur le plongement d'une variété localement euclidienne dans un espace de Riemann à courbure constante négative.

a. Soit V_n un espace de Riemann de dimension n, à courbure constante négative K. En cherchant à déterminer des variétés plongées dans V_n et munies par ce plongement de métriques partout décomposables, on a fait apparaître des V_{n-1} localement euclidiennes. On en déduit, par restriction, l'existence de variétés V_q $(q < n-1)$ localement euclidiennes et plongées dans V_n. De l'étude locale, il résulte encore que l'une des formes asymptotiques de V_q, obtenue par restriction sur celle de V_{n-1}, peut être :

- soit une forme quadratique proportionnelle à la métrique,
- soit la somme de deux formes quadratiques dont chacune est proportionnelle à la partie correspondante de la métrique,

et que les coefficients de proportionnalité ne sont pas nuls si $q > 1$,

Plus généralement, *pour* $q > 1$, considérons une variété V_q, plongée dans V_n par un plongement de classe $C^r (r = 3)$ et munie par ce plongement d'une structure localement euclidienne. Alors, si l'on associe à tout point x de V_q un repère orthonormé de l'espace vectoriel tangent en x à V_q, dont les q premiers vecteurs appartiennent à l'espace vectoriel tangent en x à V_q, les équations de Gauss relatives au plongement de V_q dans V_n s'écrivent :

$$\delta_{\alpha\beta}(\phi_i{}^\alpha{}_k\, \phi_j{}^\beta{}_h - \phi_i{}^\alpha{}_h\, \phi_j{}^\beta{}_k) = K(\delta_{ih}\,\delta_{jk} - \delta_{ik}\,\delta_{jh}),$$

avec $i, j, h, k \in \{1, \ldots, q\}$, $\alpha, \beta \in \{q+1, \ldots, n\}$.

Le second membre n'étant pas identiquement nul, le premier ne peut pas l'être : il existe donc des coefficients $\phi_i{}^\alpha{}_k$ non nuls, d'où le lemme : *si une variété localement euclidienne de dimension supérieure à un est plongée, par un plongement de classe* $C^r(r \geq 3)$, *dans un espace à courbure constant négative, ses formes asymptotiques* $\phi^\alpha = \phi_i{}^\alpha{}_k \omega^i \omega^k$ *ne peuvent être toutes identiquement nulles.*

b. Soit R^N l'espace numérique réel de dimension N. On sait que pour $N = \frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$, toute variété riemannienne de dimension n, de classe $C^r(r > 3)$ admet un plongement isométrique global, de classe C^r, dans R^N. [6].

Considérons donc :

$$V_q \subset V_n \subset R^N$$

et complétons le repère associé au point $x \in V_q$ de manière à obtenir un repère de R^N. Parmi les formes asymptotiques de V_q pour son plongement dans R^N figurent les formes ϕ^α précédentes. Donc *les formes asymptotiques de* V_q *pour son plongement dans* R^N *ne sont pas toutes identiquement nulles.*

D'autre part, considérons l'espace numérique réel R^q plongé dans R^N. A tout point de R^q, associons un repère orthonormé de R^q, dont les q premiers vecteurs appartiennent à R^q ; *les* N-q *formes asymptotiques de* R^q *pour son plongement dans* R^N *sont identiquement nulles.* Ainsi apparait une contradiction entre les propriétés de V_q et celles de R^q, d'où :

THEOREME. *Il n'existe pas de plongement isométrique et régulier de classe* $C^r(r > 3)$ *de l'espace numérique réel* $R^q(q > 2)$ *dans un espace de Riemann à courbure constante négative.*

Ce résultat ne figure pas dans mon article des «Rendiconti di Matematica».

Bibliographie.

[1] S. DOLBEAULT-LEMOINE. Sur la déformabilité des variétés plongées dans un espace de Riemann, Ann. Sci. E.N.S. 73, 1956, p. 357-438.

[2] C. EHRESMANN. Sur la théorie des variétés feuilletées, Rend. di Mat. e delle sue Appli. (V), X, 1951, p. 1-19.

[3] F.A. FICKEN. The riemannian and affine differential geometry of product spaces Ann. of Math., 40, 1939, p. 892-913.

[4] S. KOBAYASHI. Holonomy groups of hypersurfaces ; Induced connections and imbedded riemannian spaces, Nagoya Math. J., 10, 1956.

[5] A.G. WALKER. The fibring of Riemannian manifolds, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 3, 1953, p.1-19.

[6] J. NASH. The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. 63, 1956, p. 20-63.