Séminaire de topologie et géométrie différentielle

Guy Valette

Éléments de rubans d'ordres supérieurs

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 15, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A15_0>

Faculté des Sciences de Paris
Séminaire de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Juin 1960

ELEMENTS DE RUBANS D'ORDRES SUPERIEURS

par Guy VALETTE
Aspirant-chercheur au Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgique)

L'objet géométrique dont il est question ici est le ruban d'hypersurface, ou plus simplement ruban, défini dans une variété V de classe C^r à d dimensions $(r \geq 1,\ d \geq 3)$ par la donnée d'une courbe appelée support et, en chaque point de celle-ci, d'un élément d'hyperplan tangent variant continûment. On peut caractériser l'ordre du contact de deux rubans par deux indices m et n, m étant l'ordre du contact des supports (supposés de classe C^m) et n étant l'ordre du contact des familles d'éléments d'hyperplans (supposées de classe C^n). La définition du contact d'ordre (m, n) entraîne celle des éléments de contact, que nous appelons éléments de rubans d'ordre (m, n), et mène à la considération d'une famille de prolongements de V; les espaces d'éléments de rubans; l'étude de ceux-ci fait apparaître de nouveaux prolongements de V, dont les points représentent des objets géométriques jouissant des propriétés essentielles des éléments de rubans; nous sommes ainsi conduits à définir des éléments de rubans généralisés. Nous avons pu déterminer tous les types d'éléments de rubans généralisés lorsque la dimension de V est 3. C'est par quelques résultats valables dans ce cas que nous terminons cet article.

1. Les rubans paramétrés et leur contact.

DEFINITION. *Un ruban paramétré de classe $C^{m,n}$ est un objet géométrique formé :*

1°) d'une courbe paramétrée localement régulière et de classe C^m appelée support paramétré,

2°) pour toute valeur du paramètre, d'un élément d'hyperplan tangent au support au point correspondant à cette valeur; l'élément d'hyperplan est une fonction de classe C^n du paramètre.

Bien entendu, on a

$$1 \leq m \leq r, \qquad 0 \leq n \leq r-1, \tag{1.1}$$

et, de plus, on peut supposer

$$m \geq n, \tag{1.2}$$

parce que, si $n > m$, le support paramétré est aussi de classe C^n.

Si les x^i $(1 \leq i \leq d)$ sont des coordonnées locales valables dans un certain ouvert de V contenant l'image du support, les équations du ruban paramétré sont

$$(1.3) \qquad x^i = x^i(t), \qquad \sum_i \left| \frac{dx^i}{dt} \right| > 0, \qquad 1 \leq i \leq d,$$

$$(1.4) \qquad X_j = X_j(t), \qquad \sum_j | X_j | > 0, \qquad 1 \leq j \leq d,$$

les X_j étant les coordonnées homogènes d'éléments d'hyperplans, duales des coordon--nées homogènes de direction dx^j. Les fonctions x^i et X_i sont liées par l'équation différentielle

$$(1.5) \qquad X_i \, dx^i = 0$$

qui exprime que l'élément d'hyperplan est tangent au support.

Soit F l'ensemble des éléments d'hyperplans de V. Les coordonnées x^i (don--nées exactement) et X_i (données à un facteur près) munissent F d'une structure de variété de classe C^{r-1} à $2d-1$ dimensions. F possède une fibration dont l'espace de base est V, la projection s étant l'application qui, à tout élément d'hyperplan, fait correspondre son centre. Utilisant F et s, nous pouvons donner une seconde définition du ruban paramétré :

DEFINITION. *Deux rubans paramétrés de classe $C^{m,n}$ de V est une courbe paramétrée de classe C^n de F qui est solution de (1.5) et qui, composée avec la projection s, donne une courbe paramétrée localement régulière et de classe C^m de V, appelée support paramétré.*

Dès lors, on définit aisément le contact de deux rubans paramétrés :

DEFINITION. *Deux rubans paramétrés de classe $C^{m,n}$ ont en t_0 un contact d'ordre (m,n) s'ils ont même n-jet en t_0 et si leurs supports paramétrés ont même m-jet en t_0.*

On étend quelque peu la définition précédente en convenant que deux rubans paramétrés ont en t_0 un contact d'ordre $(0,0)$ s'ils ont même valeur en t_0 et ont en t_0 un contact d'ordre $(m,-1)$ si leurs supports paramétrés ont même m-jet en t_0. Les inégalités (1.1) sont ainsi remplacées par

$$(1.6) \qquad 0 \leq m \leq r, \qquad -1 \leq n \leq r-1.$$

Pour abréger l'énoncé des propriétés et théorèmes, il est commode d'introduire une structure d'ordre dans l'ensemble Z^2 des couples de nombres entiers; nous poserons

$$(a,b) \leq (a',b') \quad \text{lorsque} \quad a \leq a' \text{ et } b \leq b'.$$

Z^2 esr un ensemble réticulé et on peut énoncer

PROPRIETE. *Soient $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ trois rubans paramétrés; si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ont en t_0 un contact d'ordre (m,n) et si $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ ont en t_0 un contact d'ordre (m',n') $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_3$ ont en t_0 un contact d'ordre égal à $\inf((m,n),(m',n'))$.*

Cette propriété montre en particulier que la relation

(1.7) "*$\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ont en t_o un contact d'ordre (m,n)*" est une relation d'équiva-lence dans l'ensemble des rubans paramétrés de classe $C^{m,n}$. D'où la

DEFINITION. *Un élément de ruban paramétré d'ordre (m,n) et de source t_o est une classe d'équivalence pour la relation (1.7).*

Pour $n \geqq 0$, l'élément de ruban paramétré d'ordre (m,n) et de source t_o d'un ruban paramétré est connu en même temps que son n-jet β_o en t_o et le m-jet α_o en t_o de son support paramétré; il peut ainsi être identifié au couple (α_o, β_o). Pour $n = -1$, l'élément de ruban paramétré d'ordre (m,n) et de source t_o est connu en même temps que α_o; nous l'identifierons à cet m-jet.

La remarque précédente permet d'attribuer des coordonnées aux éléments de rubans paramétrés: supposant $n \geqq 0$, l'élément de ruban parametre d'ordre (m,n) en t_o du ruban paramétré d'équations (1.3) et (1.4) aura pour coordonnées la réunion de celles des jets α_o et β_o c'est-à-dire

$$(1.8) \qquad B^i_j = \left[\frac{d^j x^i}{dt^j}\right]_{t_o}, \qquad 0 \leq j \leq m, \qquad 1 \leq i \leq d,$$

$$(1.9) \qquad D_{ik} = \left[\frac{d^k X_i}{dt^k}\right]_{t_o}, \qquad 0 \leq k \leq n$$

Pour $n = -1$, les coordonnées d'un élément de ruban paramétré se réduisent aux valeurs de (1.8). Rappelons ici que les B^i_j et les D_{ik} ne peuvent pas être choisis arbitrairement, puisque les dérivées des fonctions x^i et X_i sont liées par les relations obtenues en différentiant l'identité (1.5).

On peut encore définir le représentant polynomial d'un élément de ruban para-métré d'ordre (m,n): c'est l'application à valeurs dans F dont les équations sont:

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} x^i &= B^i_o + B^i_j (t - t_o)^j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ x_i &= D_{io} + D_{ik} (t - t_o)^k, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq d,$$

2. Les Eléments de rubans.

On définit aisément les rubans (non paramétrés) et leur contact d'ordre (m,n) en s'inspirant de la définition des courbes comme classes de courbes paramétrées et de leur contact d'ordre n. La notion de contact de rubans conduit à celle d'éléments de contact de rubans, que nous appelons plus simplement éléments de rubans. Voici une autre definition de la même notion:

DEFINITION. *Deux éléments de rubans paramétrés d'ordre* (m,n), (α_1, β_1) *et* (α_2, β_2), *de sources respectives* t_1 *et* t_2 *sont équivalents s'il existe un m-jet en* X *de source* t_2 *et de et de but* t_1 *qui soit tel que*

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ X \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \beta_1 \circ X \ ;$$

un élément de ruban d'ordre (m,n) *est une classe d'équivalence pour cette relation.*

Le symbole $R(m,n)$ sera une abréviation de la locution "*élément de ruban d'ordre* (m,n)" et nous noterons $R_o(m,n)$, $R_2(m,n)$, ... , des $R(m,n)$ particuliers. La phrase "$R_1(m',n')$ *supporte* $R_1(m,n)$" signifiera que tout élément de ruban paramétré de la classe $R_1(m',n')$ peut être prolongé en un élément de ruban paramétré de la classe $R_1(m,n)$; analytiquement, on peut obtenir le tableau des coordonnées de $R_1(m,n)$ en prolongeant le tableau des coordonnées de $R_1(m',n')$.

Un même ruban peut être défini à partir de plusieurs rubans paramétrés. Si le support n'est pas tangent aux hypersurfaces d'équation x^1 = constante, on peut en particulier se donner un ruban par les équations du ruban paramétré pour lequel $x^1 = t$. D'autre part, si l'élément d'hyperplan du ruban n'est pas tangent aux d-ièmes lignes de coordonnées, on peut supposer $X_d = 1$. Les équations du ruban sont alors

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} x^i &= x^i(x^1) \quad , \quad 2 \leqslant i \leqslant d \\ X_j &= X_j(x^1) \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant d-1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, les coordonnées d'un $R(m,n)$ *sont*, pour $n \geqslant 0$,

B^1_o, B^i_j $(2 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant j \leqslant m)$ et D_{hk} $(1 \leqslant h \leqslant d\text{-}1,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$ *et*, pour $n = -1$, elles se réduisent à B^1_o et B^i_j $(2 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant j \leqslant m)$.

THEOREME 1. *Si V est une variété de classe C^r à d dimensions, l'ensemble des* $R(m,n)$ de V *a une structure naturelle de variété à* $(m+1)(d\text{-}1) + (n+1)(d\text{-}2) + 1 + \delta^m_n$ *dimensions. Pour $m = n$, cette variété est de classe $C^{r\text{-}n\text{-}1}$ et, pour $m > n$, elle est de classe $C^{r\text{-}m}$.*

Démonstration. Lorsque $m = n$, les relations qu'on obtient en différentiant (1 . 5) permettent d'exprimer $D_{10}, D_{11}, \ldots, D_{1,n\text{-}1}$ au moyen des B^i_j et des autres D_{hk} ; il y a donc $(n+1)(2d\text{-}3) + 2$ coordonnées indépendantes : B^1_o; B^i_j $(2 < i < d,\ 0 < j < n)$, D_{hk} $(2 < h < d\text{-}1,\ 0 < k < n)$ et D_{1n}. Lorsque $m > n$, on peut calculer $D_{10}, D_{11}, \ldots, D_{1n}$ en fonction des B^i_j et des autres D_{hk}; il y a par suite $(m+1)(d\text{-}1) + (n+1)(d-2) + 1$ coordonnées indépendantes. Pour déterminer la classe de la variété des $R(m,n)$, il suffit de voir comment se transforment les coordonnées d'un $R(m,n)$ lors d'un changement de coordonnées locales. Or, les nouvelles coordonnées B^i_j sont des fonctions de classe $C^{r\text{-}m}$ des anciennes et les nouvelles coordonnées D_{hk} sont des fonctions de classe $C^{r\text{-}n\text{-}1}$ des anciennes coordonnées B^i_j et D_{hk}. Si $m = n$, on a $r\text{-}m > r\text{-}n\text{-}1$ et l'on conclut que la variété des $R(n,n)$ est de classe $C^{r\text{-}n\text{-}1}$. Si $m > n$, on a $r\text{-}n\text{-}1 > r\text{-}m$ et l'on conclut que la variété des $R(m,n)$ est de classe $C^{r\text{-}m}$.

Désignons par $E(m,n)$ la variété des $R(m,n)$ de V; il s'agit d'un prolongement de V : $E(m,n)$ est un espace fibré de base V, la projection étant l'application qui fait correspondre, à tout $R(m,n)$, son centre; et tout automorphisme local de V s'étend de façon unique en un automorphisme local de $E(m,n)$ qui conserve les fibres.

COROLLAIRE. *L'ensemble des $R(m,n)$ supportés par un $R(m',n')$ donné a une structure naturelle de variété analytique à*

$(m - m')(d - 1) + (n - n')(d - 2) + \delta^m_n - \delta^{m'}_{n'}$, *dimensions*

DEFINITION. *L'ensemble des $R(m,n)$ supportés par un $R(m',n')$, muni de sa structure de variété analytique, est appelé espace des $R(m,n)$ au-dessus d'un $R(m',n')$ ou encore $E(m,n;\, m',n')$. L'$R(m',n')$ est dit de base et l'application canonique de $E(m,n)$ sur $E(m',n')$ se note $pr(m,n;\, m',n')$.*

Si $(m,n) > (m',n') > (m'',n'')$, on a visiblement

$$pr(m',n';\, m'',n'') \circ pr(m,n;\, m',n') = pr(m,n;\, m'',n''),$$

ce qui permet d'établir un diagramme des $E(m,n)$ et des $pr(m,n;\, m',n')$ Dans l'exemple ci-dessous, les $E(m,n)$ de même dimension ont été placés sur une même ligne; la colon--ne de gauche indique cette dimension.

$$\begin{tikzcd}
5d-6 & & & E(2,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
4d-4 & & E(1,1) \arrow[dr] & & E(2,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{matrix}3d-2\\3d-3\end{matrix} & & & E(1,0) \arrow[dll] \arrow[dr] & & E3\ E(2,-1) \arrow[dl] \\
2d-1 & E(0,0)=F \arrow[dr] & & & E(1,-1) \arrow[dll] & \\
d & & E(0,-1)=V & & &
\end{tikzcd}$$

Nous nous limiterons dans la suite de cet article à l'étude des éléments de rubans de centre donné. Nous pouvons alors choisir un système de coordonnées locales ayant son origine 0 au point considéré de V. Rappelons que, pour tout g tel que $1 \leqslant g \leqslant r$, il existe un groupe L^g_d d'isotropie infinitésimale d'ordre g en 0, formé des g-jets de rang d, de source et de but 0. Le représentant polynomial d'un tel g-jet a pour équations

$$x^j = a^j_{i_1 \dots i_d} (x^1)^{i_1} \dots (x^d)^{i_d} , \tag{2.2}$$

avec $1 \leq j \leq d$, $i_k \geq 0$, $\Sigma i_k \leq g$ et

$$(2.3) \quad \left| a^j{}_{10\ldots00} \quad a^j{}_{01\ldots00} \;\cdots\cdots\; a^j{}_{00\ldots10} \quad a^j{}_{00\ldots01} \right| \neq 0$$

La variété F des éléments d'hyperplans de V étant un prolongement d'ordre 1 de V, tout g-jet de L^g_d détermine en chaque point de la fibre au-dessus de 0, un g-1-jet dont le but est dans la même fibre. L^g_d agit donc sur les éléments curvilignes d'ordre inférieur ou égal à g-1 centrés sur la fibre au-dessus de 0 dans F; ce qui permet d'énoncer :

THEOREME 2. *Pour $g \geqq m$ et $g \geqq n+1$, le groupe L^g_d opère sur l'$E(m,n;0,-1)$ de base 0 de la même façon que le pseudo-groupe des automorphismes locaux conservant 0.*

Dans ce qui suit, la locution "*le groupe induit par L^g_d dans un $E(m,n;m',n')$*" valable pour $g \geqq m$ et $g \geqq n+1$, désigne le groupe quotient G/K où G est le sous-groupe de L^g_d conservant l'$R(m',n')$ de base et où K est le sous-groupe invariant de G conservant tous les $R(m,n)$ supportés par l'$R(m',n')$ de base.

3. Les espaces élémentaires d'élément de rubans.

DEFINITION. *Un espace élémentaire d'$R(m,n)$ est un $E(m,n;m',n')$ pour lequel il n'existe pas de couple d'entiers (a,b) tel que*

$$(m',n') \lneqq (a,b) \lneqq (m,n).$$

Un espace élémentaire est donc soit du type $E(m,n;m,n-1)$, soit du type $E(m,n;m-1,n)$.

Nous allons voir que, pour $g \geqq m$ et $g \geqq n+1$, le groupe induit par L^g_d dans les espaces élémentaires munit ceux-ci d'une structure d'espace homogène, c'est-à-dire que ce groupe opère transitivement et analytiquement sur les espaces élémentaires.

Il est bien connu que les espaces des directions et des éléments d'hyperplans de V sont des espaces fibrés dont les fibres sont des espaces projectifs à d-1 dimensions. Un simple changement de terminologie permet d'énoncer :

THEOREME 3. *Pour $g \geqslant 1$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(1, -1;0, -1)$ munit cet espace d'une structure d'espace projectif réel à $d-1$ dimensions.*

THEOREME 4. *Pour $g \geqslant 1$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(0,0;0, -1)$ munit cet espace d'une structure d' espace projectif réel à $d-1$ dimensions.*

L'identification des $R(1, -1)$ et des directions d'une part, des $R(0,0)$ et des éléments d'hyperplans de l'autre, permet de parler de l'incidence d'un $R(1, -1)$ et d'un $R(0,0)$ Les $R(1, -1)$ représentés par les points d'un hyperplan de l'espace projectif $3(1, -1;0, -1)$ étant tous incidents à un même $R(0,0)$, on a aussi :

THEOREME 5. *Pour $g \geqslant 1$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(1,0;0,0)$ munit cet espace d'une structure d'espace projectif réel à $d-2$ dimensions.*

Par dualité, on obtient le théorème suivant :

THEOREME 6. *Pour $g \geqslant 1$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(1,0;1, -1)$ munit cet espace d'une structure d'espace projectif réel à $d-2$ dimensions.*

Passons maintenant à l'étude des espaces d'éléments de rubans d'ordre supérieur à $(1, -1)$.

THEOREME 7. *Pour $g \geqslant m \geqslant 2$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(m, -1;m-1, -1)$ munit cet espace d'une structure d'espace affin réel à $d-1$ dimensions.*

DEMONSTRATION. Dans ce qui suit, appelons $R_0(m,n)$ *l'* $R(m,n)$ à l'origine du ruban d'équations $x^i = 0$, $(2 \leqslant i \leqslant d)$, $X_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant d-1)$. Nous allons d'abord prouver que *l'*action de L^g_d sur l'espace des $R(m, -1)$ au dessus de $R_0(m-1, -1)$ est donnée par

$$(3 . 1) \qquad \bar{B}^j{}_m = \frac{a^j{}_{01\ldots00}\, B^2{}_m + \cdots + a^j{}_{00\ldots01}\, B^d{}_m + a^j{}_{m0\ldots00}}{(a^1{}_{10\ldots00})^m}$$

$(2 \leqslant j \leqslant d)$, avec les inégalités

$$(3 .2) \qquad a^1{}_{10\ldots00} \neq 0 \quad \text{et} \quad | \, a^j{}_{01\ldots00} \;\; a_{001\ldots00} \cdots a_{00\ldots01} \, | \neq 0.$$

Nous raisonnerons par induction, supposant que, pour $2 < k < m$, *l'action* de L^g_d sur l'espace des $R(k, -1)$ au dessus de $R_0(k, -1, -1)$ est donnée par les relations (3 . 1) où m est remplacé par k. Avec cette nouvelle hypothèse, on montre aisément que les $(m-1)$-jets de L^g_d qui conservent $R_0(m-Q, -1)$ ont pour équations

(2.2) avec

(3.3) $a^j{}_{bo\ldots oo}=0$ pour $2 \leqq j \leqq d$ et $1 \leqq b \leqq m-1$.

Sous l'action d'un tel jet, l' $R(m,-1)$ générique supporté par $R_o(m-1,-1)$, dont le représentant polynomial a pour équations :

(3.4) $$x^j = B^j_m(x^1)^m, \qquad 2 \leqq j \leqq d.$$

est envoyé sur l' $R(m,-1)$ dont le représentant polynomial a pour équations :

(3.5) $$\bar{x}^j = \bar{B}^j_m\,(x^1)^m, \qquad 2 \leqq j \leqq d.$$

Si l'on porte (2.2), puis (3.4) dans (3.5), on obtient $d-1$ polynomes en x^1 identiques à 0 et l'on en déduit les équations (3.1). Autrement dit, les transformations de L^g_d font de l'espace des $R(m,-1)$ au-eessus de $R_o(m-1,-1)$ un espace affine à $d-1$ dimensions. Il en est de même pour tout $E(m,-1;\ m-1,-1)$ en vertu de l'homogénéité de l'espace des $R(m,-1)$ au-dessus de 0, (cette homogénéité vient de ce que, pour tout k compris entre 1 et $m-1$, les $E(k,-1;\ k-1,-1)$ sont des espaces homogènes).

Par des procédés semblables à celui employé pour le Théorème 7, on démontre encore :

THEOREME 8. *Pour $g \gtrsim m \gtrsim 2$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(m,0;\ m,-1)$ munit cet espace d'une structure d'espace projectif réel à $d-2$ dimensions.*

THEOREME 9. *Pour $g \geqq m \geqq 2$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(m,m-1;\ m-1,m-1)$ munit cet espace d'une structure d'espace affine réel à $d-2$ dimensions.*

THEOREME 10. *Pour $g \geqq m \geqq n+1 \geqq 2$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(m,n;\ m,n-1)$ munit cet espace d'une structure d'espace affine réel à $d-2$ dimensions.*

Appelons *espace affine fibré* tout espace affine concrétisé par une famille d'hyperplans parallèles. Les espaces affines fibrés sont des cas particuliers d'*espaces homogènes fibrés*, c'est-à-dire d'espaces homogènes pouvant être partagés en une famil-le infinie de sous-variétés fermées (les fibres), cette partition (la fibration) étant conservée par toute transformation du groupe fondamental de l'espace homogène.

Avec cette terminologie, les groupes induits par L^g_d *dans* les espaces $E(n,n;\ n,n-1)$ et $E(m,n;\ m-1,n)$ - les deux types d'espaces élémentaires dont nous n'avons pas encore parlé - sont précisés par les théorèmes suivants :

THEOREME 11. *Pour $g \geqq n+1 \geqq 2$, le groupe induit par L^g_d dans tout $E(n,n;\ n,n-1)$*

munit cet espace d'une structure d'espace affine fibré à d-1 dimensions.

THEOREME 12 *Pour $g \geq m \geq n+2 \geq 2$, le groupe induit par L_d^g dans tout $E(m, n; m-1, n)$ munit cet espace d'une structure d'espace affine fibré à d-1 dimensions.*

Divers corollaires peuvent être annexés aux théorèmes de ce paragraphe; ils s'obtiennent en traduisant dans le langage des éléments de rubans des propriétés de la géométrie projective, affine ou "affine fibrée", des espaces d'éléments de rubans. C'est ainsi qu'on peut parler d' $R(m, m-1)$ linéairement indépendants supportés par un même $R(m-1, m-1)$ et énoncer:

COROLLAIRE (au THEOREME 9). Pour $m \geq 2$, les automorphismes locaux conservant $d-1$ $R(m, m-1)$ supportés par un même $R(m-1, m-1)$ et linéairement indépendants conservent tous les $R(m, m-1)$ supportés par l' $R(m-1, m-1)$.

Voici un autre exemple.:

COROLLAIRE (au THEOREME 12). Pour $m \geq n+2 \geq 2$, trois $R(m, n)$ supportés par un même $R(m-1, n)$ ont un rapport de section invariant pour les amorphismes locaux.

Les théorèmes 3 à 12 montrent que les groupes induits par L_d^g dans les espaces élémentaires d'éléments de rubans opèrent transitivement sur les points de ces espaces. Om démontre par induction que la même propriété est valable pour les $E(m, n; 0, -1)$:

THEOREME 13. *Pour $g \geq m$ et $g \geq n+1$, le groupe induit par L_d^g dans tout $E(m, n; 0, -1)$ opére transitivement sur les points de cet espace.*

COROLLAIRE. Pour $g \geq m$ et $g \geq n+1$, le groupe induit par L_d^g *dans tout* $E(m, n, m', n')$ opère transitivement sur les points de cet espace.

COROLLAIRE. Les $E(m, n; m', n')$ sont déterminés, à un isomorphisme d'espace homogène près, par les quatre indices m, n, m' et n'.

4. Une nouvelle notion d'élément de ruban.

Supposons un instant que la variété V est munie éventuellement d'une structure additionnelle; nous pouvons convenir - il est naturel de le faire - qu'un invariant en un point p d'un ruban $\mathcal{R}$ est d'ordre (m, n) s'il est défini par l' $R(m, n)$ de $\mathcal{R}$ en p et non par un élément de ruban supportant cet $R(m, n)$. Mais une telle définition a un inconvénient: un invariant peut posséder deux ordres distincts; c'est le cas, en géométrie euclidienne tridimensionnelle, pour la courbure normale d'un ruban de surface, qui est à la fois d'ordre $(1,1)$ et $(2,0)$.

Pour éviter un tel résultat, nous avons été amenés à modifier la définition des éléments de rubans. Le choix de la nouvelle définition est basé sur la remarque suivante qui se rapporte aux éléments curvilignes de V: tout élément d'une partition de l'ensemble des éléments curvilignes d'ordre r de V, invariante pour les automorphismes locaux de V, est formé de tous les éléments curvilignes d'ordre r ayant, avec l'un quelconque d'entre eux, un contact d'ordre compris entre 0 et r. Cette propriété ne peut pas être transposée pour les éléments de rubans: s'il est vrai que, pour $(m',n')<(m,n)$, tout $R(m',n')$ peut être identifié à un élément d'une partition de $E(m,n)$ invariante pour les automorphismes locaux, l'inverse est faux. Pourtant, les éléments d'une partition invariante P de $E(m,n)$ sont des objets géométriques permutés par les automorphismes locaux et jouissant des trois propriétés suivantes, qui apparaissent comme essentielles pour les éléments de rubans :

1° Tout point p d'un ruban de classe $C^{m,n}$ détermine un tel objet: l'élément de P qui contient l' $R(m,n)$ du ruban en p ;

2° Cet objet dépend en plus des dérivés d'ordre m du support et des dérivés d'ordre n de la famille d'éléments d'hyperplans.

3° L'ensemble des éléments de P peut être muni d'une structure de variété de classe C^{r-m} (ou C^{r-n-1} si $m=n$) qui est un prolongement de V.

Ce qui précède nous conduit à élargir la définition primitivement donnée des éléments de rubans.

DEFINITIONS.

1° Appelons élément de ruban d'ordre inférieur à (m,n) la réunion de tous les $R(m,n)$ d'une fibre de $E(m,n)$, c'est-à-dire d'un élément d'une partition de $E(m,n)$ invariante pour les automorphismes locaux. Les $R(m,n)$ étant des classes d'éléments de rubans paramétrés, il en sera de même des nouveaux éléments de rubans. Nous identifierons les éléments de rubans définis par une fibration de $E(m,n)$ et les éléments de rubans définis par une fibration de $E(m',n')$ lorsque, dans l'espace $E(m'',n'')$ où

(m'', n'') est égal à max $((m, n), (m', n'))$, il existe une fibration qui, par les applica- -tions canoniques sur $E(m, n)$ et $E(m', n')$, est envoyée biunivoquement sur les deux fibrations considérées.

2° *Deux éléments de rubans seront dits* de même espèce *s'ils sont définis par deux fibres d'une même fibration ou de fibrations qu'on a identifiées comme ci-dessus.*

3° *Nous dirons que* l'élément de ruban X, *défini par une fibre de* $E(m, n)$, supporte l'élément de ruban Y, *défini par une fibre de* $E(m', n')$, *si la fibre représen- -tant X dans $E(m'', n'')$ contient la fibre représentant Y, (m'', n'') étant égal à max $((m, n), (m', n'))$.*

4° *Un* espace d'éléments de rubans *est formé de l'ensemble des éléments de rubans d'espèce donnée supportés par un élément de ruban donné; cet ensemble est muni de la structure d'espace homogène définie comme suit: soit H le sous-groupe de L_d^g conservant un élément de ruban de l'espèce envisagée (centré en 0); l'espace des éléments de rubans centrés en 0 et de l'espéce considérée est L_d^g/H. Les espaces d'éléments de rubans de l'espèce donnée supportés par un élément de ruban donné sont les fibres de L_d^g/H.*

Appelons *élément de ruban du premier type* tout élément de ruban répondant à la définition du paragraphe 2. Nous allons maintenant déterminer des espèces d'éléments de rubans qui ne sont pas du premier type.

Le théorème 11 nous montre que, pour $n \geq 1$, il existe un élément de ruban intermédiaire entre l'$R(n, n\text{-}1)$ et l'$R(n, n)$. Le théorème 12 nous apprend que, pour $m \geq n + 2 \geq 2$, il existe un élément de ruban intermédiaire entre l'$R(m\text{-}1, n)$ et l'$R(m, n)$. Cependant, les éléments de rubans définis au moyen des fibres des $E(n, n; n, n\text{-}1)$ doivent être identifiés aux éléments de rubans définis au moyen des fibres des $E(n + 1, n\text{-}1; n, n\text{-}1)$ en vertu du théorème suivant, qui se démontre pour les espaces d'éléments de rubans au-dessus de $R_0(n, n\text{-}1)$ en tenant compte des relations entre les B^i_j et les D_{ik} déduites de (1.5):

THEOREME 14. *Pour $n \geq 1$, soit $E_1(n, n; n, n\text{-}1)$, $E_1(n + 1, n\text{-}1; n, n\text{-}1)$ et $E_1(n + 1, n; n, n\text{-}1)$ trois espaces d'éléments de rubans ayant le même élément de* *ruban de base; alors,* $E_1(n+1, n\text{-}1; n, n\text{-}1)$ *possède une fibration qui se projette biunivoquement sur les fibrations des deux autres espaces.*

Les espèces d'éléments que bams que nous allons déterminer seront caractéri--sées par trois indices. Pour une raison qui apparaîtra au théorème 17, nous ferons les conventions suivantes:

1° Pour les éléments de rubans du *premier type*, nous remplacerons, si $m > n$, le couple d'indices (m, n) par le triple d'indices (m, m, n) et nous remplacerons le couple d'indices (n, n) par le triple d'indices $(n+1, n, n)$.

2° Nous conviendrons que les éléments de rubans obtenus grâce à la fibration des $E(m, n; m\text{-}1, n)$ où $m \geqq n+2 \geqq 2$ sont d'ordre $(m, m\text{-}1, n)$. En vertu du théorème 14, les éléments de rubans définis au moyen des fibres des $E(n, n; n, n\text{-}1)$ sont ceux d'ordre $(n+1, n, n\text{-}1)$.

Dans un souci de concision, nous indiquerons

1° un élément de ruban d'ordre (g, m, n) par $R(g, m, n)$,

2° l'espace de tous les $R(g, m, n)$ d'une variété par $E(g, m, n)$,

3° l'espace des $R(g, m, n)$ supportés par un $R(g', m', n')$ donné par $E(g, m, n; g', m', n')$.

D'autre part nous transfèrerons deux conventions faites pour les $R(m, n)$:

1° Nous utiliserons dans l'ensemble Z^3 des triples d'entiers la structure d'ordre définie en convenant que la relation $(a, b, c) \geqq (a', b', c')$ est équivalente à la conjonction de $a \geqq a'$, $b \geqq b'$ et $c \geqq c'$.

2° $R_o(g, m, n)$ est l'$R(g, m, n)$ du ruban d'équations:

$$x^i = 0\ (2 \leqq i \leqq d),\ X_j = 0\ (1 \leqq j \leqq d\text{-}1).$$

Le problème de la détermination d'éléments de rubans qui e sont pas du premier type est aussi celui de la détermination de fibrations des espaces d'éléments de rubans du premier type. Le théorème suivant va introduire de telles fibrations:

THEOREME 15. *Pour* $g' \geqq m+1 \geqq n+2 \geqq 3$, *le groupe induit par* $L_d^{g'}$ *dans tout* $E(m+1, m, n; m, m\text{-}1, n)$ *munit cet espace d'une structure d'espace affine réel à* $d\text{-}1$ *dimensions concrétisé par une famille d'hyperplans parallèles et par une famille de droites parallèles transversales aux hyperplans.*

DEMONSTRATION : Lorsqu'on choisit $R_o\,(m, m\text{-}1, n)$ comme élément de ruban de base, le groupe agissant sur l' $E\,(m+1, m, n;\ m, m\text{-}1, n)$ s'exprime par

$$\bar{B}^i{}_m = \frac{a^i{}_{01\ldots00}\,B^2{}_m + \ldots + a^i{}_{00\ldots10}\,B^{d\text{-}1}{}_m + a^i{}_{m0\ldots00}}{(a^1{}_{10\ldots00})^m} \quad (2 \leq i \leq d\text{-}1),$$

$$\bar{B}^d{}_{m+1} = \frac{a^d{}_{00\ldots01}\,B^d{}_{m+1} + a^d{}_{(m+1)0\ldots00}}{(a^1{}_{10\ldots00})^{m+1}}. \tag{4.1}$$

Il s'agit du groupe des affinités de l'espace numérique $(B^2{}_m, B^3{}_m, \ldots, B^{d\text{-}1}{}_m, B^d{}_{m+1})$, conservant la famille d'hyperplans $B^d{}_{m+1}=$ constantes et la famille de droites $B^i{}_m=$ constantes $(2 \leq i \leq d\text{-}1)$. C'est un groupe isomorphe qui agira sur tout $E\,(m+1, m, n;\ m, m\text{-}1, n)$ puisque les $E\,(m, m\text{-}1, n)$ sont tous équivalents. Le théorrème est ainsi démontré.

Les droites $B^i{}_m =$ constantes $(2 \leq i \leq d\text{-}1)$ forment une première fibration des $E\,(m+1, m, n;\ m, m\text{-}1, n)$; les fibres de cette fibration définissent des éléments de rubans qui sont identiques aux $R\,(m, m, n)$. Les hyperplans $B^d{}_{m+1} =$ constantes forment une seconde fibration, dont les fibres définissent de nouveaux éléments de rubans; nous convenons de leur attribuer l'ordre $(m+1, m\text{-}1, n)$.

Le théorème 15 permet de définir les $R\,(m+2, m, n)$ lorsque sont définis les $R\,(m+1, m, n)$ et les $R\,(m, m, n)$. Il peut être généralisé par le théorème suivant qui permet de définir les $R\,(g, m, n)$ lorsque sont définis les $R\,(g\text{-}1, m, n)$, *les* $R\,(g\text{-}2, m, n), \ldots,$ les $R\,(m, m, n)$.

THEOREME 16. *Pour* $g' \geq g \geq m+1 \geq n+1 \geq g-m$, *le groupe induit par* $L^{g'}_d$ *dans tout* $E\,(g, m+1, n:\ g\text{-}1, m, n)$ *munit cet espace d'une structure d'espace affine réel à* $d\text{-}1$ *dimensions concrétisé par une famille d'hyperplans parallèles et par une famille de droites parallèles transversales aux hyperplans.*

La démonstration est semblable à celle des théorèmes 7 et 15. La fibration dont les fibres sont des droites fournit des éléments de rubans qui sont identiques aux $R\,(g\text{-}1, m+1, n)$. La fibration dont les fibres sont des hyperplans détermine une nouvelle espèce d'éléments de rubans. *Nous convenons de* lui attribuer l'ordre (g, m, n).

On vérifie aisément que les entiers g, m et n ont la signification suivante :

1° g est la borne inférieure des ordres des jets infinitésimaux d'isotropie qui agissent sur les $R(g,m,n)$;

2° (m,n) est la borne supérieure des ordres des éléments de rubans du premier type qui supporte un $R(g,m,n)$.

Si (g,m,n) est un triple d'entiers qui est l'ordre d'un élément de ruban, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$g \geqq m \geqq n \geqq g - m - 1\,,$$
$$g \geqq n+1\,,\quad m \geqq 0\,,\quad n \geqq -1\,. \tag{4.2}$$

Inversement, tout $R(g',m',n')$ est supporté par un et un seul $R(g,m,n)$, pour tout (g,m,n) vérifiant (4.2) et inférieur à (g',m',n') (pour la structure d'ordre définie précédemment sur Z^3).

THEOREME 17. *Si V est une variété de classe C^r à d dimensions, l'ensemble des $R(g,m,n)$ de V a une structure naturelle de variété de classe C^{r-g} à $g+(m+n+2)(d\ 2)+2$ dimensions.*

DEMONSTRATION : $E(g,m,n)$ est l'ensemble des fibres d'une fibration de $E(g,n)$ qui est une variété de classe C^{r-g}; $E(g,m,n)$ est donc aussi une variété de classe C^{r-g}. Pour déterminer sa dimension, partons de la dimension de $E(m,m,n)$ où $m > n$, c'est-à-dire de la dimension de $E(m,n)$: $(m+1)(d-1)+(n+1)(d-2)+1$. D'après le procédé utilisé pour définir les $R(g,m,n)$, la dimension de $E(g,m,n)$ est supé-rieure de $g-m$ à celle de $E(m,m,n)$, donc donnée par $g+(m+n+2)(d-2)+2$. On vérifie que cette valeur est aussi la bonne lorsque $m=n$.

Les espaces d'éléments de rubans du second type peuvent être insérés dans les diagrammes établis pour les espaces d'éléments de rubans du premier type. Ainsi, on peut ajouter $E(2,1,0)$ au diagramme dressé au paragraphe 2; si l'on attribue trois indices aux espèces d'éléments de rubans du premier type, ce diagramme prend la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
5d-6 & & E(2,2,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
4d-4 & E(2,1,1) \arrow[dr] & & E(2,2,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
3d-2 & & E(2,1,0) \arrow[d] & & E(2,2,-1) \arrow[ddl] \\
3d-3 & & E(1,1,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
2d-1 & E(1,0,0)=F \arrow[dr] & & E(1,1,-1) \arrow[dl] & \\
d & & E(0,0,-1)=V & &
\end{tikzcd}$$

5. Résultats supplémentaires pour les variétés tridimensionnelles.

Les éléments de rubans du premier type et ceux du second type forment-ils ensemble tous les éléments de rubans d'une variété V? Nous pouvons répondre affirma- -tivement à cette question dans le cas où V possède trois dimensions:

THEOREME 18. *Tout élément de ruban d'une variété à trois dimensions est du premier ou du deuxième type.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux suivants:

THEOREME 19. *Dans une variété à trois dimensions, tout élément de ruban non réduit à un point est supporté par un $R(1,1,-1)$ ou par un $R(1,0,0)$* (par une direction ou par un élément plan).

THEOREME 20. *Dans une variété à trois dimensions, tout élément de ruban supporté par un $R(1,1,-1)$ ou par un $R(1,0,0)$ est du premier ou du deuxieme type.*

Le théorème 19 se prouve de la façon suivante: pour $(m,n) \geq (1,0)$, conve- -nons que deux $R(m,n)$ sont incidents si l'élément plan supportant l'un est incident à la direction supportant l'autre. Pour $(m,n) > (1,0)$, soit alors X un élément de ruban défini par une fibre de $E(m,n)$ et soit $R_1(m,n)$ un élément de ruban donné supporté par X. On montre qu'il est possible d'amener tout $R(m,n)$ non incident à $R_1(m,n)$ sur tout $R(m,n)$ non incident à $R_1(m,n)$ au moyen d'une opération de L_3^g conservant $R_1(m,n)$ $(g \geq m$ *et* $g \geq n+1)$. Par suite, les $R(m,n)$ supportés par X

sont incidents à $R_1(m,n)$ ou encore, puisque $R_1(m,n)$ est un élément de ruban quelconque supporté par X, les $R(m,n)$ supportés par X sont incidents entre eux. On en conclut que tous les $R(m,n)$ supportés par X ont même direction ou même élément plan.

La démonstration du théorème 20 s'appuie sur deux résultats auxiliaires:

1° Les seuls éléments de rubans qui peuvent être définis au moyen d'une fibra- -tion d'un espace d' $R(g,m,n)$ *à deux dimensions sont ceux du premier et du second type.*

On démontre ce premier résultat en déterminant les groupes induits par L_3^g dans tous les espaces d' $R(g,m,n)$ à deux dimensions.

2° Si X *est une fibre d'une fibration de l'espace des* $R(g,m,n)$ *au-dessus de* $R_o(1,0,0)$ (resp. $R_o(1,1,-1)$) *invariante pour les transformations telles que* $a^1{}_{010}=0$ (resp. $a^2{}_{001}=0$), *il existe une famille de fibres dont* X *est un élément et telle que les fibres aient toutes les dimensions comprises entre* 1 *et* $g+m+n-2$.

On arrive à ce second résultat en démontrant que les transformations du groupe fondamental de l'espace des $R(g,m,n)$ au-dessus de $R_o(1,0,0)$ (resp. $R_o(1,1,-1)$) qui sont telles que $a^1{}_{010}=0$ (resp. $a^2{}_{001}=0$) forment un groupe possédant une suite de sous-groupes invariants emboités dont les dimensions parcourent tous les naturels inférieurs à la dimension du groupe. On en déduit l'existence des fibres contenant X, tandis que les fibres contenues dans X s'obtiennent par intersection de X avec des fibres représentant des $R(g,m,n)$.

Appelons fibre indicée d'un espace d'éléments de rubans toute fibre représentant un élément de ruban du premier ou du deuxième type et passons à la démonstration du théorème 20. Le premier résultat auxiliaire énoncé ci-dessus servira de terme initial à la démonstration par récurrence qui suit:

Soit (g',m',n') un triple d'entiers strictement supérieur à $(0,0,-1)$; suppo- -sons que tous élément de ruban défini comme fibre d'un $E(g,m,n;g',m',n')$ de dimension strictement inférieure à s soit du premier ou du second type. Montrons qu'il en est encore ainsi lorsque l' $E(g,m,n;g',m',n')$ est de dimension égale à s.

Raisonnons avec l'espace des $R_o(g,m,n)$ au-dessus de $R_o(g',m',n')$, soit $E_o(g,m,n;g',m',n')$, et supposons qu'il existe dans cet espace une fibre X qui ne soit pas indicée. En vertu du second résultat auxiliaire, X appartient à une suite de fibres emboitées de fibrations invariantes, pour les transformations telles que $a^1{}_{010} = 0$ (resp. $a^2{}_{001} = 0$), fibres dont les dimensions parcourent les entiers compris entre 1 et $s-1$. Soit Y celle de dimensions $s-1$, qui ne peut être une fibre indicée car X le serait aussi (hypothèse de récurrence pour X intermédiaire entre Y et un point de $E_o(g,m,n;g',m',n')$). Soit encore Z une fibre indicée contenant un point de X et de dimension $s-1$. L'intersection de Y et de Z est une fibre indicée de dimension $s-1$ (hypothèse de récurrence pour $Y \cap Z$ intermédiaire entre Z et un point de $E_o(g,m,n;g',m',n')$). Mais alors, Y devrait être une fibre indicée puisque Y est intermédiaire entre $E_o(g,m,n;g',m',n')$ et $Y \cap Z$ qui sont des fibres indicées. Cette contradiction montre que toute fibre d'une fibration invariante de $E_o(g,m,n;g',m',n')$ pour les transformations telles que $a^1{}_{010} = 0$ (resp. $a^2{}_{001} = 0$) est indicée. A fortiori, toute fibre d'une fibration d'un espace d' $R(g,m,n)$ à s dimensions, invariante pour toutes les transformations de L_3^g est indicée, ce qui termine la démonstration.