N. H. Kuiper

La courbure d'indice K et les applications convexes

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 14, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A14_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Avril 1960

LA COURBURE D'INDICE K ET LES APPLICATIONS CONVEXES

par N. H. KUIPER *

1. Introduction. La géométrie différentielle globale s'occupe, entre autres choses, des relations entre les propriétés locales d'une variété différentiable X munie d'une structure supplémentaire, par exemple d'une métrique Riemanienne, et les propriétés topologiques de X.

Le théorème le plus connu dans cette direction est le théorème de Gauss-Bonnet qui affirme, entre autres choses, que l'intégrale de la forme de courbure de Lipschitz-Killing (pour la dimension 2 est la courbure de Gauss divisée par 2π) sur une variété compacte orientée, munie d'une métrique Riemanienne multipliée par une constante connue, est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré.

$$(1.1) \qquad \int \frac{K\delta\mu}{2\pi} = \chi \quad \text{(Gauss-Bonnet)}$$

Ce théorème, connu depuis longtemps pour les surfaces, est généralisé par MM. Allendoerffer, Fenchel, Weil pour les variétés X dans un espace euclidien, et finalement pour X intrinsèque par Chern, qui a donné sa fameuse démonstration en utilisant les formes différentielles extérieures.

Un autre théorème de la géométrie différentielle globale qui est bien connu est le théorème de Fenchel. Soit X une C^∞*-variété* compacte connexe de dimension 1, c'est-à-dire un cercle. Une application différentiable $f : X \to E^N$ *s'appelle* une immersion si elle est de rang maximum en chaque point de X. L'image $f(X)$ est alors une C^∞*-courbe* fermée. Si $2\pi\tau_0(x, f)$ est la valeur absolue de la (densité de la) coubure de $f(X)$ au point x et ds la différentielle de la longueur, alors :

$$\tau_0(X, f) = \int \tau_0(x, f)\, ds \geqslant 1 \quad \text{(Fenchel)}$$

* Landbouwhogeschool, Wageningen, Pays-Bas.

De plus, si $\tau_0(X, f) = 1$, $f(X)$ est une courbe plane et convexe, Milnor et Fary ont démontré que, pour un noeud dans E^3, $\tau_0(X, f) > 2$. Le théorème de Fenchel est généralisé pour X de dimension arbitraire par Chern, Lashof et Kuiper.

Dans les paragraphes qui suivent, nous introduisons une nouvelle notion, *la courbure d'indice k d'une application de X dans* E^N. Cette notion nous permet de présenter une théorie dans laquelle figurent des analogues assez généraux des théorèmes de Gauss-Bonnet et Fenchel. Nous allons exposer assez brièvement cette théorie sans insister sur les détails et les démonstrations; nous espérons donner plus tard des résultats plus complets.

2. Points critiques d'une fonction. Inégalités de Morse. Soit $X = X^n$ une C^∞*-variété* de dimension n, et φ une C^r*-fonction* $\varphi: X \to R$, $r \geqslant P$.

Un point $x_o \in X$ est dit C^r*-Critique* (non dégénéré) d'indice p de φ, si des C^r*-coordonnées* locales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ existent, $\varphi_i(x_o) = {}_c$ et si on a dans un ouvert U de x_o :

$$\varphi = c - \varphi_1^2 \ldots\ldots - \varphi_p^2 + \varphi_{p+1}^2 \ldots\ldots + \varphi_n^2 \qquad c = \varphi(x_o) \tag{2.1}$$

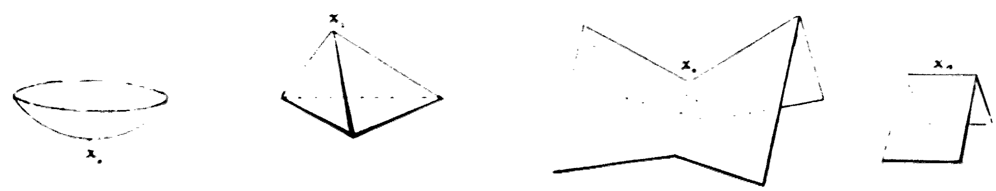
Au lieu de C^o*-critique*, nous dirons " critique" tout court.
x_o s'appelle C^r*-ordinaire* (non dégénéré) si, de façon analogue, on a :

$$\varphi = \varphi_1 \tag{2.2}$$

Autrement, x_o est dit C^r*-dégénéré*. Une fonction φ est dite non-dégénérée si chaque point x est non-dégénéré pour φ.

Dans la fig. 1, nous donnons quelques exemples de points critiques, de la fonction *hauteur* = φ, sur des surfaces dans l'espace euclidien E^3.

fig. 1



index 0 index 2 index 1 dégénéré

Dans les conditions citées plus haut, soit un point critique d'indice p,

(2.3) $$U_1 = \{x \mid \varphi(x) < c\}$$

$$U_2 = \{x \mid \varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2 < \epsilon^2\}$$

Alors on a les *polynômes de Poincaré*, $P(..) = \Sigma\, t^q H_q(..)$.

(2.4) $$P(U_2) = 1,\ P(U_1 \cap U_2) = P(S^{p-1}) = 1 + t^{p-1}$$

En général si $U_1\ U_2$, U_1, U_2 est une triade propre suivant le sens donné dans le livre du "*Eilenberg-Steenrod*" et si on écrit :

$$N = ker\ [i_1 : H_*(U_1 \cap U_2) \to H_*(U_1)] \cap ker\ [i_2 : H_*(U_1 \cap U_2) \to H_*(U_2)]$$

on a la formule de Mayer-Victoris (Eilenberg-Steenrod p. 53 exercise 4):

(2.5) $$dim\ H_q(U_1 \cup U_2) + dim\ H_q(U_1 \cap U_2) = dim\ H_q(U_1) + dim\ H_q(U_2)$$
$$+ dim\,(N_q) + dim\,(N_{q-1})$$

Dans notre cas $N = ker\ i_1$ et

$$dim\ N_q = \begin{cases} O & pour\ q \neq p-1 \\ e & pour\ q = p-1 \end{cases}$$

$$e = O \ \ ou\ \ 1$$

Alors on déduit de (2.4) et (2.5)

(2.6) $$P(U_1 \cup U_2) - P(U_1) = (e-1)\, t^{p-1} + e\, t^p$$

Remarquons que $e \geq 0$, $e - 1 \leq 0$

(On peut aussi donner une autre définition de point critique d'indice p par l'équation (2.6).

Pour un point ordinaire on a

(2.7) $$P(U_1 \cup U_2) - P(U_1) = 0$$

Si x est une variété compacte et φ une fonction non-dégénérée et qui par conséquent n'a qu'un nombre fini de points critiques non-dégénérés, alors on peut recouvrir x par un nombre fini d'ouverts U_1, $i = 1, \dots, L$, tel que dans chaque ouvert il n'existe au plus qu'*un seul* point critique de φ;

$$x_m = \cup_{i=1}^{m} U_i$$

est connexe pour $m = 1, \ldots, L$, et

$$(2.8) \qquad P(x_{m+1}) - P(x_m) = \begin{cases} (e-1)\,t^{p-1} + e\,t^{p} \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}$$

e et p dépendant de m.

Pour chaque ouvert $Z \subset x$ définissons $\beta_k(Z, \varphi)$ comme le nombre des points critique d'indice k de φ dans Z, et

$$(2.9) \qquad M(Z, \varphi) = \Sigma_k\, \beta_k(Z, \varphi)\, t^k$$

le polynôme de Morse de φ *sur* Z.

En vue de (2.8) et les conditions sur les ouverts U_i, on a

$$(2.10) \qquad M(x_{m+1}, \varphi) - M(x_m, \varphi) = \begin{cases} (1-e)\,t^{p-1} + e\,t^{p} \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}$$

où e et p ont la même signification que dans (2.8).

On verra que

$$\beta_k(x_m, \varphi) - \dim H_k(x_m)$$

et

$$\Sigma_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, [\, \beta_j(x_m, \varphi) - \dim H_j(x_m) \,]$$

sont des fonctions non décroissantes de m, et

$$\Sigma_j (-1)^j\, [\, \beta_j(x_m, \varphi) - \dim H_j(x_m) \,]$$

est la fonction zéro. Alors pour $m = L$ on obtient les *inégalités de Morse :*

$$(2.11) \qquad \beta_k(x, \varphi) - \dim H_k(x) \quad 0$$

$$(2.12) \qquad \Sigma_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, [\beta_j(x, \varphi) - \dim H_j(x)\,] \quad 0$$

$$(2.13) \qquad \Sigma_j (-1)^j\, \beta_j(x, \varphi) = \Sigma_j (-1)^j \dim H_j(x) = \chi(x)$$

$\chi(x)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de χ.

Puisque le polynôme $\beta(X, \varphi) - P(X)$ est zéro pour $t = -1$, on peut diviser par $1 + t$, et on peut résumer les inégalités de Morse (2.11) (2.12) et (2.13) dans la Proposition suivante:

PROPOSITION:

(2.14)
$$\frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1 + t}$$

est *un polynôme en* t *avec des coefficients non-négatifs.*

NOTATION:

(2.15)
$$\frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1 + t} \succ 0$$

3. La courbure d'indice k et le polynôme des courbures. Soit X^n une C^∞-*variété*, f une C^∞-*immersion* $f : X \to E^N$ de X dans un espace vectoriel euclidien de dimension N. Soit S^{N-1} la $(N-1)$-sphère des vecteurs unitaires dans E^N. On considère le fibré M^{N-1} de base X des vecteurs normaux de $f(X^n)$ dans E^N. L'application canonique de M^{N-1} dans S^{N-1} est nommée ν. Sa duale ν^+ applique l'élément de volume $d\sigma$ de S^{N-1} sur une $(N-1)$-forme $\nu^+ d\sigma$ de M^{N-1}. Alors suivant Chern on peut définir la courbure totale absolue de (X, f):

(3.1)
$$\tau(X, f) = \int_{M^{N-1}} \frac{|\nu^+ d\sigma|}{c_{N-1}}$$

Si : $\beta(X, \sigma) = \sum_k \beta_k(X, \varphi)$ est le nombre des points critiques de φ;
$c_{N-1} = \int_S |d\sigma|$, $z \in S^{N-1}$; $zf(x)$; est le produit scalaire des vecteurs z et $f(x)$,

alors on trouve que :

$$\tau(X, f) \text{ est égal à } \underset{\text{avec multiplicités}}{\int_{\nu(M)} \frac{|d\sigma|}{c_{N-1}}} = \int_{z \in S} \beta(X, zf) \frac{|d\sigma|}{c_{N-1}}$$

on sait que les $z \in S^{N-1}$ pour lesquels la fonction zf a des points dégénérés forment un ensemble de mesure nulle. L'intégrale (3.1) est bien définie

Dans le même ordre d'idées, nous disons qu'une *application continue* $f : X^n \to E^N$ d'une variété X^n de dimension n dans l'espace euclidien E^N est non-dégénérée si :

$$(3.2) \qquad \tau_k(U, f) = \int_{z \in S^{N-1}} \beta_k(U, z f_U) \frac{|d\sigma_{N-1}|}{c_{N-1}}$$

existe pour chaque ouvert $U \subset X^n$ *et si* elle définit *une mesure non-négative* sur X^n *pour* $k = 0, 1, \ldots, n$,

Si nous écrivons $\mathcal{E}_z$ à la place de l'opérateur

$$\frac{1}{c_{N-1}} \int_{z \in S^{N-1}} \ldots \ |d\sigma_{N-1}|$$

(L' *espérance* par rapport à un vecteur aléatoire avec distribution de probabilités homogène sur S_{N-1}), on peut résumer (3.2) dans la formule:

$$(3.3) \qquad \tau_k(U, f) = \mathcal{E}_z \ \beta_k(U, z f_U)$$

DEFINITION : La mesure τ_k définie par (3.3) pour une application non-dégénérée f d'une variété X^n dans E^N, est *la courbure d'indice* k *de* f *dans* X. La mesure $T = \Sigma_k t^k \tau_k$ avec valeurs dans l'espace vectoriel des polynômes en t, est *le polynôme des courbures dans* X. Pour $t=1$ on obtient *la courbure totale dans* X. Pour $t=-1$ on obtient *la courbure alternée dans* X. Les valeurs de cette mesure sur X sont respectivement: $\tau_k(X, f)$, la courbure d'indice k de f sur X; $T(X, f)$, *le polynôme des courbures sur* X; $\Sigma_k \tau_k(X, f)$, *la courbure totale sur* X; $\Sigma_k (-1)^k \tau_k(X, f)$, *la courbure alternée sur* X.

Si l'on peut obtenir la mesure τ_k en intégrant une forme différentielle, cette forme est aussi appelée courbure d'indice k etc.

LEMME. *Si* f *est une* C^∞*-immersion, alors* f *est non-dégénérée, et si* $d\mu$ *est l'élément de volume dans* $f(X)$, *on peut écrire* $\tau_k(U, f) = \int_U \tau_k(x, f) \, |d\mu|$.

La fonction $\tau_k(x, f)$ est *la densité de courbure d'indice* k. C'est un invariant local intéressant qui n'est pas étudié jusqu'à maintenant.

THEOREME: *Si* $f: X^n \to E^{n+1}$ *(hypersurface est une* C^∞*-immersion, alors* $\tau_k(x, f)$ *est un invariant intrinsèque.*

Si $f: X^n \to E^n$ est une C^2-immersion alors $\Sigma(-1)^k \tau_k(x, f)$ est un invariant intrinsèque, la (densité de la) courbure de Lipschitz-Killing.

EXEMPLES:

$n = 0$. Si X est un point on définit $T(X, f, t) = 1$.

$n = 1$. a) Si $f(X)$ est une C^{∞} - courbe, alors

$$\tau_o = \tau_1 = \frac{1}{2\pi}\int |\,courbure\,|\, ds$$

b) Si $f(X)$ est l'union de deux demi-droites qui se rencontrent en un point B d'un angle φ, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, alors la mesure $\tau_0 = \tau_1 = \frac{\pi - \varphi}{2\pi}$ est concentrée au point B. fig. 2.

c) voir fig. 3 $\tau_o(X) = 1$; voir fig. 4 $\tau_o(X) = 2$

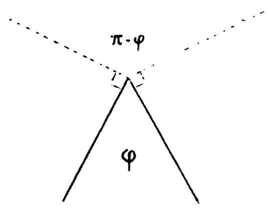


fig. 2

fig. 3

fig. 4

$n = 2$. a) Si f est une immersion dans E^3, K la courbure de Gauss, alors

$$\tau_o = \tau_2 = \int max\,(K, O)\ \frac{|d\mu|}{4\pi}$$

$$\tau_1 = \int 2\ max\,(-K, O)\ \frac{|d\mu|}{4\pi}$$

par conséquent: $\tau_o - \tau_1 + \tau_2 = \int K\ \frac{|d\mu|}{2\pi}$

b) fig. 5 $T = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}t^2$. La mesure est concentrée en un point.

$n = 2$. c) fig. 6 $T = \frac{1}{4} t$

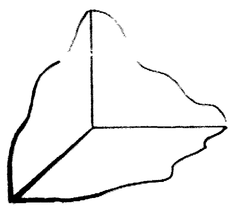


fig. 5

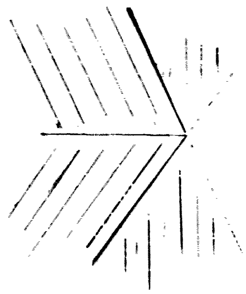


fig. 6

d) *Double pli*: L'application f du plan euclidien à coordonnées x, y dans ce plan est donnée par $f : (x, y) \to (|x|, |y|)$. La mesure est concentrée au point (O, O):

$$T = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{4} t^2$$

Pour $t = -1$ on obtient la valeur zéro, comme il le fallait.

4. Le théorème de Gauss-Bonnet.

THEOREME : *Si X^n est compact et l'application $f : X^n \to E^N$ est non-dégénérée, alors*

$$\Sigma_k (-1)^k \tau_k (X, f) = \chi(X)$$

REMARQUE : on n'a pas besoin de supposer X^n orienté

DEMONSTRATION :

$$\Sigma_k (-1)^k \tau_k (X, f) = \Sigma_k (-1)^k \mathcal{E}_z \beta_k (X, zf)$$
$$= \mathcal{E}_z \Sigma_k (-1)^k \beta_k (X, zf) = \mathcal{E}_z \chi(X) = \chi(X)$$

EXEMPLES :

a). Soit X le plan projectif réel, C^∞– immergé dans E^3. Alors :

$$\int_X \frac{K}{2\pi} |d\mu| = \chi(X) = 1$$

b). Soit X la 2-sphère usuelle dans E^3. Soit f la composition de l'application orthogonale dans le plan équatorial de X et une C^∞- immersion de ce plan dans E^3. Soit U_1 et U_2 les deux hémisphères, S l'équateur. Alors on trouve que l'intégrale suivante consiste en deux contributions :

$$2 = \chi(X) = \Sigma_k (-1)^k \tau_k(X, f) = 2 \int_{U_1} \frac{K}{2\pi} |d\mu| + \int_S \rho_g \left|\frac{ds}{\pi}\right|$$

ρ_g est la courbure géodésique de $f(S)$ par rapport à $f(U_1)$. On obtient la formule de Gauss-Bonnet pour un disque :

$$\int K \, |d\mu| + \int \rho_g \, |ds| = 2\pi$$

Plus généralement on obtient le théorème d'Allendoerfer-Weil pour une variété à bord dans E^N.

c). On peut aussi trouver comme une application du théorème de Gauss-Bonnet la formule de Hurwitz sur l'application conforme p avec des points de ramification d'une surface de Riemann X sur une autre Y :

$$\chi(X) = K \chi(Y) + \Sigma (m_i - 1)$$

qui vaut aussi pour des surfaces non-orientées.

5. Le polynôme des courbures du produit de deux C^∞- immersions.

THEOREME. *Si* X *et* Y *sont compacts,* $f: X \to F^M$ *et* $g: X \to E^N$ *sont des* C^∞*-immersions, alors* $h = f \times g: X \times Y \to E^M \times M^N$ *est une immersion, et les polynômes des courbures satisfont à la relation suivante :*

$$T(h) = T(f \times g) = T(f).\, T(g) \tag{5.1}$$

DEMONSTRATION. Supposons que $a \in S^{M-1}$ et $b \in S^{N-1}$ sont des vecteurs unitaires. Alors $\cos \varphi . a + \sin \varphi \cdot b$ est un vecteur unitaire de $E^M \times E^N$. Soit $\varphi \neq 0 \mod (\frac{\pi}{2})$. Alors on a au point (x, y): $d(\cos \varphi .\ af(x) + \sin \varphi .\ bg(y)) = 0$ (le covecteur 0) si et seulement si

$$d\,af(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad d\,bg(y) = 0$$

En négligeant des vecteurs a et b un ensemble de mesure 0, on peut exprimer localement en un point où $d\,af(x) = d\,bg(y) = 0$:

$$af = af(x) - \varphi_1^2 \dots - \varphi_p^2 + \varphi_{p+1}^2 + \dots + \varphi_m^2$$
$$bg = bg(y) - \psi_1^2 \dots + \psi_q^2 + \psi_{q+1}^2 + \dots + \psi_n^2$$

et alors la fonction

$$\cos\varphi . af + \sin\varphi . bg \qquad \text{au point } (x, y) \text{ a l'indice :}$$

$$\begin{cases} p+q & \text{pour} \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \\ m-p+q & \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi \\ m-p+n-q & \pi<\varphi<3\frac{\pi}{2} \\ p+n-q & 3\frac{\pi}{2}<\varphi<2\pi \end{cases}$$

l'intégration sur φ et la sommation sur (a, b), $(-a, b)$, $(a-b)$, *et* $(-a, -b)$, *nous* apportent la même contribution des points (x, y) dans les deux membres de (5.1) et le théorème en découle.

APPLICATIONS : Y un point $\Longrightarrow T(h) = T(f)$

$$t = 1 \Longrightarrow \tau(f \times g) = \tau(f) . \tau(g) \text{ courbure totale absolue (locale et globale)}$$

$$t = -1 \Longrightarrow \chi(X \times Y) = \chi(X) . \chi(Y)$$

Nous énonçons aussi un théorème sur les "applications de révolution". Voir Chern-Lashof II cor. 1, p. 12. Si $f(x) = [\,2 f_1(x), \varphi(x)]$, $\varphi(x) > 0$, X compact, $\beta_{k_N}(X, zf)$ *fonction constante* de $z \in S^{M-1}(!)$; g: l'injection de S^{N-1} dans E^N.

$$S^{N-1} = \{ z \mid z^2 = 1 \} ; \; h(x, y) = \{ f_1(x), \varphi(x)\, g(y) \}$$

Alors

$$T(h) = T(f) . T(S^{N-1}) = T(f) . (1 + t^{N-1}).$$

6. Les inégalités sur les courbures d'une application $f : X^n \to E^N$, X^n compact. Applications convexes.

En tenant compte de (3.3) et des définitions dans § 3, nous avons, si $f : X \to E^N$ est une application non-dégénérée :

$$T(X, f) = \mathcal{E}_z\, M(X, zf)$$

Pour X *compact* on a de plus, si $\varphi = zf : X \to IR$ est non-dégénérée :

$$(2.14) \qquad \frac{M(X, \varphi) - P(X)}{1+t} \succ 0$$

Par conséquent en appliquant l'opérateur $\mathcal{E}_z$:

$$(6.1) \qquad \frac{T(X, f) - P(X)}{1+t} \succ 0$$

c'est-à-dire l'expression à gauche est un polynôme en t avec des coefficients non-négatifs. (6.1) exprime les *inégalités sur les courbures.* En détail:

(6.2) $$\tau_k(X,f) - \dim H_k(X) \geqq 0$$

(6.3) $$\Sigma_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\,[\tau_j(X,\varphi) - \dim H_j(X)] \geqq 0$$

(6.4) $$\Sigma_j(-1)^j\,\tau_j(X,\varphi) = \Sigma_j(-1)^j \dim H_j(X) = \chi(X)$$

(6.4) est de nouveau le théorème de Gauss-Bonnet.

On peut obtenir d'autres inégalités qui peuvent être plus fortes, comme suit: Soit Φ la classe de toutes les fonctions réelles non-dégénérées sur X

Soit $$\beta_k(X^n) = \inf_\varphi \beta_k(X^n,\varphi) \;.....\; \varphi\in\Phi$$

$$\beta(X^n) = \inf_\varphi \Sigma\, \beta_k(X^n,\varphi)$$

alors $$\beta(X^n) \quad \Sigma\,\beta_\varkappa(X^n)$$

Pour X^n connexe compact $\beta_o(X) = \beta_n(X) = 1$ (M. Morse [3]).

THEOREME. *Si* f *est une application non-dégénérée* $f: X^n \to E^N$ *d'une* C^∞*-variété compacte* X^n, *alors*

(6.5) $$\tau_k(X,f) \geqq \beta_k(X) \geqq \dim H_k(X)$$

er $$\tau(X,f) = \Sigma_k\,\tau_k(X,f) \geqq \Sigma_k\,\beta_k(X) \geqq \Sigma_k \dim H_k(X)$$

DEFINITION: *Une application* $f: X^n \to E^N$ *d'une variété* C^∞, compacte *est dite* convexe d'indice k *si* f *est non-dégénérée et*

$$\tau_k(X,f) = \beta_k(X)$$

et convexe *si elle est convexe pour* k = 0, 1, ..., n.

THEOREME. *Si* X *est compact et* n *est pair et* $f: X^n \to E^N$ *est convexe d'indice* k *pour* k *pair (* k *impair) et si* $\beta(X^n) = \Sigma_k\,\beta_k(X^n)$, *alors* f *est convexe.*

DEMONSTRATION : De $$\Sigma(-1)^k\,[\tau_k(X,f) - \beta_k(X)] = 0$$

on déduit dans les conditions du théorème:

$$0 = \Sigma\,[\tau_{2p+1}(X,f) - \beta_{2p+1}(X)] \quad \text{ou} \quad \Sigma\,[\tau_{2p}(X,f) - \beta_{2p}(X)] = 0$$

Alors, puisque la somme ne contient pas de termes non-négatifs,

$$\tau_k(X,f) - \beta_k(X) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

APPLICATION AUX HYPERSURFACES:

Soit $f : X^n \to E^{n+1}$ une C^∞ - immersion, $n = 2p$ et X compact. Soit de plus pour chaque $x \in X : K(x) = k_1 k_2 .. k_n \geqq 0$.

Cela implique que la mesure $\tau_{2k+1} = 0$ pour $k = 1, \dots \frac{n-1}{2}$, *Alors* $\tau_{2k+1}(X, f) = 0$, et f est convexe : $\tau_k(X, f) = \dim H_k(X)$.

Alors X n'a pas de torsion (Chern-Lashof) parce que les égalites restent valables pour l'homologie à coefficients dans un corps arbitraire.

7. Un théorème sur les C^∞ - applications convexes.

DEFINITION. *On dira qu'une forme (réelle) quadratique* ψ *sur* n *variables* $\xi_1, \dots, \xi_n$) *tolère un* $n+1$ *- tuple de nombres* $\beta_* = (\beta_o, \dots, \beta_n)$ *si* $\beta_k \neq 0$ *pour* $k = \text{index}\ \psi$. *On dira qu'un système linéaire de formes réelles quadratiques sur* n *variables* $\xi_1, \dots, \xi_n$, tolère β_*, *si : (a) au moins une forme est définie positive et (b) chaque forme tolère* β_*.

Soit $g(\beta_*)$ la dimension maximale des systèmes linéaires qui tolèrent β_*.

DEFINITION. *L'application* $f : X \to E^N$ *est dit* proprement dans E^N *si* $f(X)$ *n'est pas contenu dans aucun hyperplan.*

DEFINITION. $$\beta_*(X) = \{\beta_o(X), \dots, \beta_n(X)\}$$

THEOREME. *Soit* $f : X^n \to E^N$ *une* C^∞ *- application* convexe *d'une* C^∞ *- variété* X^n *compacte connexe,* proprement dans E^N;

$$\beta(X) = \Sigma_k \beta_k(X); \tag{7.1}$$

et soit $r_{max} = max_{x \in X}$ *(rang de* f *à* x*), alors*

$$N \leqq r_{max} + g(\beta_*(X)) \tag{7.2}$$

DEMONSTRATION: Soit $|f(x)|$ la longueur du vecteur $f(x)$ et soit $q = f(x_o)$, $x_o \in X$, *un vecteur pour lequel*

$$|q| = |f(x_o)| = max_{x \in X} |f(x)|$$

Soit $r \leqq r_{max}$ le rang de f à x_o. V^{N-r} est l'espace vectoriel de toutes les fonctions linéaires, pas nécessairement homogènes, de E^N qui s'annulent sur q et sur l'espace tangent de q par rapport à $f(X)$.

Si $\varphi \in V^{N-r}$, la composition $\varphi o f$ est une fonction réelle sur X^n dont le o-jet

(= valeur) et le 1-jet au point x_o s'annulent. Soit W l'espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ des 2-jets au point x_o, des applications differentiables de X^n dans $\mathbf{R}$, dont les o-jet et 1-jets s'annulent. Si $\xi_1, \dots \xi_n$ sont les coordonnées locales de x^n et $x_o = (0, \dots, 0)$, alors on peut identifier W avec le système des formes homogènes quadratiques dans $\xi_1, \dots, \xi_n$. Ce système est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.
$\pi(\varphi) \in W$ le 2-jet obtenu de $\varphi \in V^{N-n}$. Il est évident que π est un homomorphisme, mais dans les conditions données sur f et X, on a même:

LEMME. $\pi: V^{N-r} \to W^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ *est un monomorphisme.*

D'un lemme que nous démontrerons plus tard on déduit que $\pi(V^{N-r})$ est un sous-espace de W de dimension $N-r$. Ce sous-espace contient un 2-jet défini positif, et il ne contient que des 2-jets ou des formes quadratiques qui tolèrent $\beta_*(X)$. Alors :

$$N-r \leqq g(\beta_*(X))$$

et

$$N \leqq r + g(\beta_*(X)) \leqq r_{max} + g(\beta_*(X))$$

Remarquons que pour une *immersion* convexe on a $r = r_{max} = n$ et

$$N \leqq n + g(\beta_*(X))$$

Pour tout X on a $\beta_*(X) \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$, alors

$$N \leqq n + \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n(n+3)$$

Pour la n-sphère $X = S^n$ on a $g(\beta_*(X)) = 1$, alors

$$N \leqq r_{max} + 1 \leqq n + 1$$

Si $\beta_1(X^n) = 0$, $n = 2m$ ou $n = 2m+1$, on peut démontrer que $g\,\beta_*(X^n) \leqq m^2$, alors, dans ce cas :

$$N \leqq r_{max} + m^2$$

EXEMPLE : les espaces projectifs complexes.

Si $X = S^k \times S^k$ alors $g = 3$

et $N \leqq r_{max} + 3$

PREUVE DU LEMME. Si $Ker\ \pi \neq 0$, alors il existe un élément $\psi \in V^{N-n}$, $\psi \neq 0$ qui obéit à $\pi(\psi) = 0$. Soit $\varphi \in V^{N-n}$ une fonction linéaire avec un vecteur gradient proportionnel au vecteur q. Par exemple la fonction $q(q-y)$ produit scalaire variable $y \in E^N$). Il est évident que $\pi(\varphi)$ est défini positif. Si λ est un nombre réel, on a

$$\pi(\varphi + \lambda\psi) = \pi(\varphi) + \lambda\,\pi(\psi) = \pi(\varphi)$$

On sait que $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan. C'est pourquoi il existe une valeur λ telle que l'hyperplan $\varphi + \lambda\psi = 0$ divise $f(X)$ en trois parties non vides $\varphi + \lambda\psi = 0$, < 0, et > 0. La fonction $(\varphi + \lambda\psi) \circ f$ possède un point critique d'indice n au point $x_o \in X$, mais la valeur en ce point n'est pas la valeur maximum sur X. Alors il existe une fonction linéaire $\chi \in \Phi$, suffisamment près de la fonction $\varphi + \lambda\psi$, dont la composition avec f possède au moins 2 points critiques non singuliers d'indice n: En vue de (7.1) et $\beta_o(X) = \beta_n(X) = 1$ cela contredit la minimalité de f.

Bibliographie.

[1] CHERN, S.S. and LASHOF, R.K. On the total curvature of immersed manifolds
I. Am. J. Math. 79 (1957) 396-398;
II. Mich. Math. J. 5 (1958), 5-12.

[2] KUIPER, NICOLAAS H.

a). Immersions with minimal total absolute curvature. Centre Belge R.M. (1958) 5-12.

b). Sur les immersions à courbure totale minimale. Séminaire Ehresmann, Paris, 1958-59, 5 pages.

c). On surfaces in euclidean three-space, Bulletin de la Société Math. de Belgique (à paraître).

d). Convex immersions of compact surfaces in E^3. Commentarii Math. Helv. (à paraître).

[3] MORSE, MARSTON. The existence of polar non degenerate fonctions on differentiable manifolds. Annals of Math 71 (1959), 352-383.