S. S. Cairns

Sur la triangulation des variétés

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. nº 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
Mai 1960

SUR LA TRIANGULATION DES VARIETES

par S. S. CAIRNS

1. APERCU HISTORIQUE. Comme on le sait bien, Henri Poincaré a inventé les complexes, introduit la théorie de l'homologie et en a défini les invariants numériques La représentation d'un espace compact comme complexe permet la représentation de ses groupes d'homologie comme groupes abéliens à un nombre fini de générateurs.

L'application de la théorie de l'homologie des complexes à un espace topologique compact Σ exige qu'on démontre la triangulabilité de Σ ou bien qu'on se serve d'une théorie des applications des complexes dans Σ. Il en est de même en ce qui concerne plusieurs questions d'intégration sur les variétés.

Poincaré a laissé à ses successeurs le problème de la triangulation. Il aurait été bien plus gentil de la part de M. Poincaré de résoudre ce problème fondamental et de nous laisser quelques-uns des problèmes plus amusants dont il s'est occupé.

Dans toute sa généralité, ce problème de la triangulation est le problème de la triangulabilité globale d'un espace localement triangulable, c'est-à-dire d'un espace Σ séparable et métrique sur lequel chaque point a un voisinage homéomorphe à un sous-espace ouvert d'un polyèdre fini.

Jusqu'ici, on a résolu ce problème affirmativement :

1°) pour les variétés différentiables de toute dimension [3] et, plus généralement, pour les espaces composés de telles variétés avec des relations d'incidence comme celles d'un complexe [2]. Je ne voudrais pas préciser la définition de ces espaces-ci, car je préfère me limiter ici aux variétés.

2°) pour les espaces localement triangulables de dimensions <4, sans condition de différentiabilité [8], [1], [9].

Il n'est guère nécessaire de mentionner que ce sont, pour la plupart, les variétés différentiables qui interviennent dans le géométrie et dans l'analyse. Aussi faut-il constater qu'on peut souvent se passer des triangulations, en se servant d'une théorie de l'homologie qui s'appuie sur les applications de complexes dans les espaces topologiques. Mais, à présent, je veux parler des triangulations, plutôt que des procédés introduits pour les éviter.

Lié avec le problème de la triangulation, est le problème de l'équivalence combinatoire, c'est-à-dire la question de l'existence de subdivisions isomorphes de deux triangulations quelconques d'un espace triangulable. Quoiqu'une réponse affirmative à cette question soit plausible, elle entraînerait, en tenant compte de quelques résultats de Milnor [7] et de Thom [11], la contradiction d'une affirmation qui me semble également plausible. Je vais éclaircir ce que je veux dire par là après avoir ajouté quelques mots sur le sujet de la triangulation.

Ma triangulation de la variété différentiable était assez compliquée J. H. C. Whitehead en a fait des améliorations importantes [12], mais les méthodes restaient encore si difficiles que bien des mathématiciens préféraient éviter les triangulations, malgré leur utilité pour l'intégration sur les variétés.

Récemment [15], H. Whitney a donné encore une triangulation de la variété différentiable, plongée dans un espace euclidien. Je vais indiquer ses méthodes, dont les idées géométriques sont assez simples.

En 1936 [14], Whitney démontra pour la première fois, le théorème suivant :

Théorème de Plongement. *Soit* M_0^m *une variete de classe** C^r, $(r \in (1, 2, \ldots, \infty))$. *Alors il existe un homéomorphisme* $f : M_0^m \to R^{2m+1}$ *de classe* C^r *tel que l'image* $M^m = f(M_0^m)$ *soit une sous-variété (analytique même) de* R^{2m+1}.

Whitney a aussi prouvé l'existence d'une application régulière $M_0^m \to R^{2m}$, qui conserve l'indépendance des vecteurs mais qui n'est pas nécessairement biunivoque [15, ch. IV]. Dans ce même chapitre se trouve exposée la triangulation que je vais esquisser.

Vu le théorème de plongement, on peut démontrer la triangulabilité de la variété differentiable en triangulant une sous-variété différentiable arbitraire $M^m \subset R^n$ d'un espace euclidien.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées cartésiennes, et soit $\delta > 0$ un nombre réel, sur lequel nous imposerons des limites. Commençons par diviser R^n en des cubes:

$$\{ c^n \} : \nu_i \delta < x_i < (\nu_i + 1)\delta \quad (i = 1, \ldots, n) \ \nu_i \in Z$$

avec leurs faces $\{ c^k \}$ de dimension k $(k = 0, \ldots, n-1)$ *soit :*

$$/\{ c \} = \bigcup_{k=0}^{n} \{ c^k \}$$

Donc $C^n = \{ c \}$ est un complexe infini qui recouvre R^n.

**c'est-à-dire, un espace métrique, séparable, localement euclidien et muni d'une structure différentielle de classe* C^r.

Naturellement, on tire profit de la presque linéarité locale de M^m, quand on le triangule. Comme préliminaires, considérons pour éclaircir les idées, au lieu de M^m, un sous-espace linéaire $L^m \subset R^m$ que j'appellerai un "*m-plan*" Chaque intersection $C^k \cap L^m$ est une cellule polyèdre convexe de dimension $j \in (-1, 0, 1, 2, \ldots, \min(k, m))$, où $j = -1$ correspond à l'ensemble vide. Or, il est possible de transformer le complexe C^n en un complexe $C^n_o = \{ c_o \}$, tel que chaque intersection $c^k_o \cap L^m$ soit de dimension -1 ou $(m + k - n)$. On peut faire cette transformation en remplaçant un nombre fini des $(n\text{-}1)$-plans $x_i = \nu_i \delta$ par des plans $x_i = \nu_i (1 + \epsilon) \delta$, où $|\epsilon|$ est arbitrairement près de zéro.

Considérons maintenant la sous-variété différentiable M^m de R^n. Comme cas non trivial le plus simple, soit $(m, n) = (1, 2)$. Désignons par $x = (x_1, x_2)$ un point quelconque de R^2, et par $\sigma(x^o, \delta)$ la région $\rho(x^o, x) < \delta$, *de* centre x^o et le rayon $\delta > 0$, où ρ est la fonction distance euclidienne. Etant donné un nombre $\eta > 0$, on voit aisément qu'on peut choisir $\delta_o > 0$ tel que 1°) pour chaque $x^o \in B$, l'intersection $B \cap \bar{\sigma}(x^o, \delta)$ soit un arc simple $\gamma(x^o, \delta)$ et que 2°) l'angle entre deux vecteurs positifs quelconques, tangents à $\gamma(x^o, \delta)$, soit plus petit que η.

Choisissons un nombre positif $\delta < \delta_o/5$, et considérons le complexe $C = \{ c \}$ défini plus haut, qui recouvre R^2. Notons par $\{ \bar{c} \}$ l'ensemble des adhérences des cellules $\{ c \}$, et de même $\{ \bar{c}^k \}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Soit x^o un point quelconque de R^2, et soit $\bar{c}^2$ un élément de $\{ \bar{c} \}$ qui contient p. Alors $\sigma(x^o, \delta)$ contient tous les éléments de $\{ \bar{c}^2 \}$ contigus à $\bar{c}^2$), comme conséquence de la condition $\delta \leq \delta_o/5$.

Maintenant, on voit facilement qu'il est possible de définir une modification $\{ c_o \}$ de $\{ c \}$ à l'égard de M^1 analogue à la modification que nous venons de faire pour un $L^1 \subset R^2$, c'est-à-dire telle que chaque intersection $c^k_o \cap M^1$ qui n'est pas vide soit une cellule γ^{k-1} *de dimension* k-1. L'ensemble de telles intersections est une triangulation $\{ \gamma \} = \{ \gamma^o \}$ $\{ \gamma^1 \tau$ de M^1. Cette modification de $\{ c \}$ se fait un peu différemment de celle que nous avons faite pour L^1. Dans le cas de L^1 *il* suffisait 1°) de déplacer la droite $x_j = \nu\delta$ tant soit peu, si elle coïncide avec L^1, 2°) autrement, de déplacer tant soit peu, ou bien la droite $x_1 = \mu\delta$, ou bien la droite $x_2 = \nu\delta$ si $(\mu\delta, \nu\delta) \in L^1$. Dans le cas de M^1, il faut aussi écarter chaque intersection $M^1 \cap \bar{c}^1$ qui contient plus d'un point, ou qui est point de contact de $\bar{c}^1$ et M^1. Pour écarter ces intersections-ci, il suffit de déplacer les côtés $\bar{c}^1$ dont il s'agit d'une distance moindre que $\delta \tan g \eta$

Cette triangulation, dans le cas où $(m, n) = (1, 2)$ *n*e diffère pas beaucoup de la triangulation dont s'est servi W. F. Osgood [10] pour faciliter sa preuve du théorème de Green à deux dimensions, qui est une identité entre une intégrale étendue à l'intérieur Σ de M^1 et une intégrale sur M^1. On triangule $\bar{\Sigma}$ par le procédé esquissé ci-dessus. On prouve le théorème pour chaque type de cellule de la triangulation, puis on le déduit pour Σ par une intégration cellule par cellule en tenant compte de l'orientation positive des frontières, il s'ensuit que les contributions des côtés intérieurs s'annulent.

O. D. Kellogg[6] a généralisé la triangulation de W. F. Osgood dans le cas où $(m, n) = (2, 3)$. Ainsi a-t-il démontré le théorème de Green pour les régions de R^3 à frontière différentiable.

Par un procédé analogue, on peut prouver le théorème généralisé de Stokes, qui égale une certaine intégrale $\int M^m$ étendue à une variété différentiable et orientable M^m à bord B^{m-1} à une certaine intégrale $\int_{B^{m-1}}$ [4]. On trouve aussi ce théorème dans le livre de Whitney [15], avec bien d'autres résultats qui mettent en évidence le rôle de la triangulation dans la théorie géométrique de l'intégration.

Quoique je trouve la triangulation de Whitney la plus simple jusqu'ici, je crois bien que la triangulation la plus simple reste à trouver.

Quant à la triangulation de Whitehead [12], son plus grand avantage par rapport à la mienne, c'est qu'elle s'adapte bien au traitement de l'équivalence combinatoire, que j'avais négligée. Whitehead a défini toute une classe de complexes, les *C^r-complexes* ($r = 1, 2, \ldots, \infty$), [12] et [13], qui jouissent de bien des propriétés des complexes linéaires. On peut trianguler une variété $M = M^n$ munie d'une structure differentiable de classe C^r en *C^r-complexes* K^n. Chaque complexe isomorphe à une telle triangulation est *compatible* avec M, dont la définition comprend la structure donnée.

Soit $\{ K \}$ l'ensemble des complexes compatibles avec M, et soit $K_j \in \{K\}$ $(j = 1, 2)$. Whitehead a démontré l'existence de subdivisions isomorphes de K_1 et de K_2, appartenant à $\{K\}$. Ainsi a-t-il vérifié, pour la catégorie des *C^r-complexes* la conjecture fondamentale de Poincaré pour la topologie combinatoire.

2. UN PROBLEME INVERSE. Après avoir triangulé la variété différentiable, j'ai eu l'idée qu'il serait intéressant de trouver, si possible, une variété différentiable homéomorphe à une variété polyèdre quelconque. En ce temps-là, Whitney avait exposé [14] une méthode ingénieuse d'approximation, par laquelle on peut définir, dans un voisinage quelconque d'une sous-variété différentiable $M \subset R^n$ une variété analytique homéomorphes à M. Ainsi, j'ai trouvé naturel d'essayer un procédé analogue pour les variétés triangulables. C'est de ce point de vue que j'ai abordé le problème inverse et que je l'ai introduit dans la littérature [15].

Au commencement de mes tentatives, j'attendais une solution affirmative au problème inverse. A présent, je sais bien qu'un exemple de Milnor entraîne ou bien qu'il existe une variété triangulable à huit dimensions qui n'admet aucune structure différentiable, ou bien que la conjecture fondamentale de Poincaré est fausse pour la dimension 8. C'est ici le dilemme dont j'ai parlé depuis peu.

Pour toute variété de dimension $m < 4$, Moïse [8] a vérifié la conjecture fonda-

-mentale de Poincaré. D'un autre côté, j'ai démontré [5], avec une correction due à Whitehead [13], que chaque variété combinatoire de dimension $m < 5$ est compatible avec une variété de classe C^{∞}. Pour $m = 5$, je crois au'on peut déduire le même résultat des recherches de J. Munkres (pas encore publiés) sur ce qu'il appelle "The Smoothing Problem". Comme pour la dimension 8, M. K. Srinivasacharyulu a démontré l'existense de variétés combinatoires de dimension 16 qui ne sont compatibles avec aucune structure différentiable. Le problème de l'existence de telles variétés pour les autres dimensions $(m = 6, 7, 9, 10, \ldots, 12, 15, 18, \ldots)$ n'est pas encore résolu *.

L'exemple d'une variété " incompatible" de dimension 8 s'appuie sur l'existence démontrée par Milnor [7] de deux structures différentiables sur la sphère de dimension 7, qui ne sont pas difféomorphes (voir aussi [*11*]).

Whitney, quand il a défini une approximation analytique à une sous-variété $M^n \subset R^{n+k}$ de classe $C^r(r>1)$, s'est servi du champ de *k-plans* orthogonaux à M^n. Comme notion analogue à l'orthogonalité et applicable à une classe $\{M^n\}$ plus générale que les sous-variétés différentiables de R^{n+k}, j'ai introduit la notion de *k-plan* N^k traverse à $M \in \{M^n\}$ au point x. La propriété caractéristique d'un tel N^k, est l'existence d'un $\alpha_o > O$ tel que $\alpha(\sigma, N^k) > \alpha_o$ pour chaque vecteur secant d'un voisinage assez petit de X sur M, où α désigne l'angle $(O \leq \alpha(\sigma, N^k) \leq {}^{\pi}/_{2})$ compris entre σ et sa projection orthogonale sur N^k.

Pour appliquer directement les méthodes de Whitney à une sous-variété topologique $M^n \subset R^{n+k}$ il suffirait de démontrer l' existence d' un champ différentiable ** de *k-plans* transverses à M^n. Bien sûr, un tel champ n'existe pas en général. En toute dimension $n > 3$ on peut définir une variété triangulée qui n'admet aucune représentation comme polyèdre P^n dans un espace R^{n+k}, tel qu'il existe un *k-plan* transverse à P^n à chaque sommet. Néanmoins, pour chaque variété combinatoire M^n il existe une subdivision K^n_o dont une certaine représentation polyèdrale $P^n \subset R^{n+k}$ admet un *k-plan* transverse à chaque sommet [5] et [13]. Pour la variété incompatible K^8 de Milnor, il n'y a aucune représentation $P^8 \subset R^{8+k}$ d'une subdivision de K^8 pour laquelle il existe une application continue de $Q_o : P^8 \to G_{8,k}$ telle que $Q(x) = Q_o(x) + x$ soit transverse à P^8 au point x, même s'il existe une telle application discontinue ([1], [11], [13]).

Jusqu'ici, nous n'avons que des résultats isolés pour le problème inverse. Vu l'intérêt actuellement porté à ce problème, nous pouvons espérer le développement d'une théorie plus complète.

---

* *Ajouté le 13 Juin 1960* : M. Kervaire vient de construire une variété à dix dimensions qui n'admet aucune structure différentiable.

** Pour la définition de ce terme et pour les autres détails, voir [5] et [13].

Bibliographie.

[1] R. H. BING, An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated, Annals of Math. 69 (1959).

[2] S. S. CAIRNS, On the triangulation of regular loci, Annals of Math. 35 (1934).

[3] S. S. CAIRNS, Triangulation of the manifold of class one, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935).

[4] S. S. CAIRNS, The generalized theorem of Stokes, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936)

[5] S. S. CAIRNS, Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds, Annals of Math. 41 (1940).

[6] O. D. KELLOGG , Potential theory (Springer, 1929).

[7] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Annals of Math. 64 (1956).

[8] E. E. MOÏSE, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, Annals of Math. 56 (1952).

[9] J. MUNKRES, The triangulation of locally triangulable spaces, Acta. Math. 97 (1957).

[10] W. F. OSGOOD, Funktionentheorie (Teubner, 1912).

[11] R. THOM, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Topologia algebraica, Mexico (1958). (Proceedings of symposium).

[12] J. H. C. WHITEHEAD, On C'-complexes, Annals of Math. 41 (1940).

[13] J. H. C. WHITEHEAD, Manifolds with transverse fields in euclidean space, Chicago (1959). (polycopié).

[14] H. WHITNEY, Differentiable Manifolds, Annals of Math. 37 (1936).

[15] H. WHITNEY, Geometric Integration Theory, (Princeton University Press, (1957).