K. Srinivasacharyulu

Les classes caractéristiques et leurs applications

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 10, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A10_0>

Faculté des Sciences de Paris

SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Mai 1960

LES CLASSES CARACTERISTIQUES ET LEURS APPLICATIONS

par K. SRINIVASACHARYULU

L'exposé qui suit contient divers résultats indiqués dans deux exposés précédents(*) ; on démontre d'une part l'existence de certaines variétés *triangulables* qui n'admettent aucune structure différentiable compatible avec leur triangulation (cf.[4], [5]) ; d'autre part seront énoncés quelques «théorèmes de divisibilité» des classes caractéristiques et leurs applications. Dans une conversation avec Mr. F. Hirzebruch, l'auteur a appris que les résultats de la deuxième partie sont partiellement connus à Mr. F. Hirzebruch (cf.[1], [2]).

I. 0) Soit $V = (K, f)$ une variété triangulée, c'est-à-dire une variété topologique V qui admet une subdivision simpliciale K au sens de Seifert-Threlfall. Une seconde triangulation (K_1, f_1) de $V = (K, f)$ est une subdivision de (K, f) si $f^{-1}f_1 : |K_1| \to |K|$ est semi-linéaire, c'est-à-dire linéaire dans chaque simplexe.

Deux variétés triangulées $V_1 = (K_1, f_1)$ et $V_2 = (K_2, f_2)$ sont isomorphes si K_1 est isomorphe à K_2 au sens simplicial. V_1 et V_2 sont combinatoirement équivalents s'il existe des subdivisions qui soient isomorphes.

Une variété triangulée V est une n-cellule combinatoire (resp. $(n-1)$ - sphère combinatoire) si V est équivalente combinatoirement à un n-simplexe (resp. son bord). Une variété triangulée $V = (K, f)$ est une n-variété combinatoire si l'étoile ouverte de chaque sommet de K est une n-cellule combinatoire. Ce qui suit énonce quelques problèmes non résolus bien connus.

1.) Problème de triangulation d'une variété (topologique).

2.) Est-ce que toute variété triangulée est une variété combinatoire ?

3.) Problème de l'unicité de triangulation (Hauptvermutung).

4.) Conjecture de Poincaré : chaque n-variété simplement connexe et triangulée M, qui est une n-sphère homologique, est une n-sphère.

La résolution de ces problèmes est extrêmement difficile et une réponse affirmative de 1), 2), 3), pour $n = 3$ se trouve dans des mémoires récents. D'autre part, si on suppose que V est une variété différentiable (compacte ou non), on trouve une réponse affirmative de 1), 2), 3) dans les travaux de J.H.C. Whitehead [6].

....

(*) La deuxième partie a été exposée en juillet 1959.

Donc un problème naturel dans ce cadre est le suivant : « Toute variété triangulée peut-elle être munie d'une structure différentiable ? » Il semble que la réponse soit négative et il faudrait sans doute de nouveaux invariants pour la solution de ce problème dans toute sa généralité.

I. 1) Etant donné un difféomorphisme $f : S_m \times S_n \to S_m \times S_n$,

posons $$E = D^{m+1} \times S_n \cup S_m \times D^{n+1} \qquad \text{(Réunion disjointe)};$$

si on identifie $(x, y) \in S_m \times S_n$ (considérée comme un point de $D^{m+1} \times S_n$) avec $f(x,y) \in S_m \times D^{n+1}$ on obtient une variété différentiable M_f de dimension $m+n+1$. Soit k la fonction définie par $k(y) = y_n$, $y \in S_n$ (y_n les coordonnées de y). Si $f : (x, y) \to (x', y')$ est tel que $k(y) = k(y')$ pour tout (x, y), M_f est homéomorphe à S_{m+n+1}.

CONSTRUCTION DE f. Soit $f_1 : S_m \to SO(n+1)$, $f_2 : S_n \to SO(m+1)$.

Posons $x' = f_2(y^{-1})x$, $y' = f_1(x)y$ $(x \in S_m,\ y \in S_n)$: f défini par $(x, y) \to (x', y')$ est un difféomorphisme et la variété M_f, désignée par $M(f_1, f_2)$, est un bord, c'est-à-dire qu'il existe une variété à bord (différentiable) W telle que $\partial W = M_f$ [3].

INVARIANT $\lambda(M)$ DE MILNOR. Soit M une variété différentiable de dimension $4k-1$ telle que (i). M a les mêmes groupes d'homologie rationnelle que S_{4k-1}. (ii). M est un bord. Alors un nombre rationnel $mod. 1$, $\lambda(M) \in Q/Z$ est défini comme suit : l'homomorphisme naturel $j : H^i(W, M; Q) \to H^i(W, Q)$ est un isomorphisme pour $0 < i < 4k-1$. $\lambda(M)$ est la classe de

$$(I(W) - L_k(j^{-1}p_1, \ldots, j^{-1}p_{k-1}, 0)[W]) / s_k \quad mod. 1 \quad \text{où} \quad s_k = 2^{2k}(2^{2k-1} - 1) B_k / (2k)$$

($I(W)$ est l'indice de forme quadratique $x \to (\alpha \cup \alpha)[W]$, $\alpha \in H^{2k}(W, M; Q)$); $\lambda(M)$ est indépendant de W.

Soient $f_1 : S_{4r-1} \to SO(4(k-r)-1)$, $f_2 : S_{4(k-r)-1} \to SO(4r-1)$.

THEOREME (MILNOR). $M(f_1, f_2)$ est une sphère topologique et $\lambda(M) = p_r(f_1)\, p_{k-r}(f_2) \dfrac{s_r s_{k-r}}{s_k}$ $mod. 1$, où $p_r(p_{k-r})$ est l'homomorphisme $p_r : \pi_{4r-1}(SO(q)) \to Z$ défini comme suit : chaque $f : S_{4r-1} \to SO(q)$ induit un espace fibré ξ de groupe structural $SO(q)$ sur S_{4r} (classification de Feldbau) et $p_r(f_1) = p_r(\xi)[S_{4r}]$ ($p_r(\xi)$ la classe de Pontrjagin de ξ). Soit T l'espace dans lequel le bord M est identifié avec un point; alors une c^1-triangulation de W donne une triangulation de T. On a $H^i(T, Z) = Z$ pour $i = 4r, 4(k-r), 4k$ et les homomorphismes $H^{4k}(S_{4k}; Z) \to H^{4k}(W; Z) \leftarrow H^{4k}(T; Z)$ sont des isomorphismes. Soient $\alpha' \in H^{4k}(W; Z)$, $\alpha'' \in H^{4k}(T; Z)$ correspondant à $\alpha \in H^{4k}(S_{4k}; Z)$.

Il est facile à démontrer [cf. Milnor 3(b)] que $I(T) = 0$. La classe de Pontrjagin $p_k(T)$ est la classe rationnelle correspondant à $\alpha'' \in H^{4k}(T; Z)$. Puisque $I(T) = L_k(p_1, \ldots p_k)[T]$ où L_k est un polynôme, on a

$$0 = \pm p_r(f_1)\, p_{k-r}(f_2)(s_r s_{k-r} - s_k) + s_k p_k[T] \quad \text{où} \quad s_k = 2^{2k}(2^{2k-1} - 1) B_k / (2k).$$

Mais d'après Milnor [3. b)], $p_k[T] \equiv \pm p_r(f_1) p_{k-r}(f_2) s_r s_{k-r} / s_k$ $mod. 1$ est un nombre rationnel Si $s_r s_{k-r} / s_k$ est un multiple d'un entier avec facteurs premiers $< 2(k-r)$.

THEOREME 1. Soit k un entier tel que $4 \leq k \leq 14$; alors les variétés triangulées T^{4k} n'admettent aucune structure différentiable compatible avec leurs triangulations.

Supposons que les sphères de Milnor $M(f_1, f_2) = M^{4k-1}$ soient difféomorphes à S_{4k-1}; alors T^{4k} peut être muni d'une structure différentiable compatible avec la triangulation, ce qui est une contradiction. On a donc :

COROLLAIRE : Les sphères de Milnor $M(f_1, f_2) = M^{4k-1}$ ne sont pas différentiablement équivalentes à S_{4k-1} pour $k = 2$ ou $14 \geq k \geq 4$.

II. 1) Soit V_{4k} une variété (compacte et connexe) différentiable de dimension $4k$, qui est presque parallélisable, c'est-à-dire que si elle est plongée dans R^{4k+m}, il existe un point x_0 tel que le fibré normal ν induit sur $V-\{x_0\}$ soit trivial. Une section s de ν définit une application $s : S_{4k-1} \to SO(m)$ (cf.[3,a)]), donc l'obstruction à l'extension de s est une classe

$$\sigma(s, \nu) = \sigma \in H^{4k}(V; \pi_{4k-1}(SO(m)))$$

telle que $j\sigma = 0$, où j est l'homomorphisme de Hopf-Whitehead

$$j : \pi_{m-1}(SO(m)) \to \pi_{m+4k-1}(S_m).$$

Soit ν' l'extension complexe de ν par l'inclusion canonique $j : SO(m) \to U(m)$ et ν'' l'espace fibré de base V associé de ν' de fibre $U(m)/U(2k-1)$: s induit une section s'' de ν'' et la classe $\sigma(s'', \nu'')$ est la classe de Chern $c_{2k}(\nu')$ de ν'.

On a $c_{2k}(\nu') = p_* j_* \sigma(s, \nu)$ où p_* est induit par $p : U(m) \to U(m)/U(2k-1)$.

On sait que $\pi_{4k-2}(U(2k-1) = Z_{(2k-1)!}$ (Bott). Donc on a

$$c_{2k}(\nu') = (2k-1)!\ \sigma(s, \nu) \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_k(\nu) = (2k-1)!\ \sigma(s, \nu).$$

Soit ξ un espace fibré principal de groupe $U(m)$ sur $V_{2k} (m > k)$ et soit $ch(\xi)$ le caractère de Chern de ξ (cf.[1]); alors on sait ([1] cf. II) que $2^s ch(\xi)[V]$ est un entier.

Si $c_i (1 < i < k)$ sont les classes de Chern de ξ, on a

$$k!\ ch(\xi)_k = (-1)^{k+1} k c_k + P(c_1, \dots, c_{k-1})$$

où $ch(\xi)_k$ désigne la composante de dimension $2k$ de $ch(\xi)$ et P est un polynôme avec coefficients entiers en $(k-1)$ variables. Donc

THEOREME 2. Soit ξ un espace fibré de groupe structural $U(m)$ sur une variété presque parallélisable V_{2k}, tel que les classes de Chern $c_1, \dots, c_{k-1}$ soient nulles : alors $c_k[V]$ est divisible par $(k-1)!$.

Soit ξ un espace fibré principal de fibre $O(m)$ (resp. $Sp(m)$) sur V_{4k} ; soit ξ' l'extension complexe de ξ par $O(m) \to U(m)$ (resp. $Sp(m) \to U(2m)$). Puisque la classe de Chern c_{2k} de ξ' est divisible par $(2k-1)!$, nous avons

COROLLAIRE . Soit ξ un espace fibré principal de fibre $O(m)$ (resp. $Sp(m)$) sur V_{4k}, tel que les classes de Pontrjagin $p_1, \dots, p_{k-1}$ soient nulles ; alors la classe de Pontrjagin p_k (resp. classe symplectique) de ξ est divisible par $(2k-1)!$.

Soit ξ un espace fibré principal de fibre $SO(4k)$ sur V_{4k}, tel que les classes de Stiefel-Whitney $w_1, \dots, w_{4k-1}$ soient nulles. Il résulte, d'après Wu [7], que la $k^{\text{ème}}$ classe de Pontrjagin p_k *mod.4* est donnée par $(p_k)_4 = i_* w_{4k}$ où i_* est induit par $i : Z_2 \to Z_4$. Puisque p_k est divisible par $(2k-1)!$, w_{4k} est divisible par 2 seulement si $k > 2$. Donc

COROLLAIRE. Soit ξ un espace fibré de groupe structural $SO(4k)$ sur V_{4k} tel que les classes de Stiefel-Whitney $w_1(\xi), \dots, w_{4k-1}(\xi)$ et les classes de Pontrjagin $p_1(\xi), \dots, p_{k-1}(\xi)$ soient nulles ; alors $w_{4k}(\xi)$ est divisible par 2 seulement si $k \neq 1, 2$.

II. 2) Soit $P_{n-1}(K)$, $n > 1$, l'espace projectif quaternionien ; on sait que la classe totale de Pontrjagin est
$$p(P_{n-1}(K)) = (1+u)^{2n}(1+4u)^{-1}, \tag{1}$$
u étant un générateur de $H^4(P_{n-1}(K)) = Z$. Si $P_{n-1}(K)$ admet une structure presque complexe, on aura seulement c_{2n-2} = *classe d'Euler* et $c(\xi)\bar{c}(\xi) = p(\xi)$ où ξ désigne le fibré tangent de $P_{n-1}(K)$, ce qui est contraire à (1) pour $n > 3$. Donc l'espace projectif quaternionien $P_{n-1}(K)$, $n > 1$, n'admet aucune structure presque complexe pour $n \geq 3$.

Considérons le quadrique complexe $Q_n = SO(n+2) / SO(n) \times SO(2)$, qui est l'espace des plans orientés passant par l'origine dans R^{n+2}. Soit $\widetilde{Q}_n$ l'espace des plans (non orientés) dans R^{n+2}; l'application naturelle $\pi : Q_n \to \widetilde{Q}_n$ est un revêtement, et pour la classe de Pontrjagin totale de $\widetilde{Q}_n$, on a
$$p(Q_n) = \pi^* p(\widetilde{Q}_n) = (1+u^2)^{n+2}(1+4u^2)^{-1}$$
où $u \in H^2(Q_n, Z)$ est un générateur ; donc, pour $n = 2m$, les nombres de Pontrjagin de $\widetilde{Q}_n$ sont égaux à ceux de $P_m(K)$. Le même raisonnement que précédemment conduit au

THEOREME 3. $\widetilde{Q}_{2m}$ n'admet pas de structure presque complexe pour $m \geq 2$.

Bibliographie.

[1] A. BOREL et F. HIRZEBRUCH. Characteristic classes and homogeneous spaces, I. II, Amer. Math. 80 (1958), 458-538, 81 (1959), 315-382.

[2] F. HIRZEBRUCH. Komplexe Mannigfaltigkeiten, Proc. Inter. Congr. Math. Edinburgh, 110-136.

[3] J. W. MILNOR. a) On the Whitehead homomorphism J. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1959), 19-82.
b) Differentiable structures on spheres, Amer. Jour. Math. 81(1959), 962-972

[4] K. SRINIVASACHARYULU. Sur certaines variétés triangulables, Comptes Rendus, 250 (1960), 2316-17.

[5] R. THOM. Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées. Symposium Intern. de Mexico, 54-67.

[6] J. H. C. WHITEHEAD. On C^1-complexes. Ann. of Math. 41 (1940), 809-824.

[7] W. T. WU. On Pontrjagin classes III. Translations Amer. Math. Society Vol.II (Series 2) 155-172

ERRATA

Exposé 3 : page 2, ligne 7 : $f : S_{2n-1} \to S_n$

page 3, ligne 4 (en partant du bas) : $\omega^n \neq o$ only if S_{n-1} is parallelisable.

page 4, ligne 20 : $(o, \pm 2)$

Exposé 10 :
ligne 10 ajouter : pour une subdivision convenable.