Carlos A. A. de Cahvalho

Sur les deuxièmes obstructions

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. nº 13, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A5_0>

-:-:-:-

Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)
Année 1957/1958

11 mars 1958

-:-:-:-

SUR LES DEUXIÈMES OBSTRUCTIONS.

par Carlos A. A. de CARVALHO.

1. Introduction.

Soit E un espace fibré localement trivial, de projection φ, dont la base K est un complexe localement fini connexe et dont la fibre F est un complexe fini asphérique en dimensions $< n$, $n \geqslant 2$. On utilise le symbole (E, φ, K).

Soit G un groupe abélien. On désigne par $\overline{G}$ le faisceau, localement simple, de base K et de fibre G utilisé pour construire la cohomologie de Čech dans (E, φ, B). Le plus souvent $\overline{G} = \pi_i$ où $\pi_i = \pi_i(F)$ pour $i = n, n+1$.

Soit K_o un sous-complexe de K. Soit f_o une section de E sur K_o. Supposons que l'obstruction (dans le sens d'Eilenberg-Steenrod) $C^{n+1}(f_o) \in H^{n+1}(K, K_o; \pi_n)$ soit nulle. Soit f l'extension de f_o à $K_o \cup K_{n+1}$, où K_n désigne le squelette de dimension $n > 0$ d'une subdivision cellulaire S de (K, K_o). La <u>deuxième obstruction</u> à l'extension d'une section qui coïncide avec f sur $K_o \cup K_n$ est $C^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_o : \pi_{n+1})$. Nous devons exprimer $C^{n+2}(f)$ à l'aide des invariants définis pour des dimensions plus petites.

Dans le cas où $F = S^n$ $(n \geqslant 2)$, S. D. LIAO [1] a trouvé des formules qui généralisent des résultats de STEENROD, BALTYANSKII et HOPF. La méthode de LIAO consiste à plonger d'une façon convenable (E, φ, K) dans un espace fibré associé à (E, φ, K) dont la fibre est $S^n * S^n$ car $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$ (cf. paragraphe 4).

Pour étudier le cas général avec la même méthode on utilise les résultats de J. H. C. WHITEHEAD [3] comme ils ont été présentés par LIAO en [2], p. 545-549. On introduit une obstruction réduite $O^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_o; \Gamma_{n+1})$ où $\Gamma_{n+1} = \pi_{n+1}/\eta\pi_n$, $\eta : \pi_n(F) \to \pi_{n+1}(F)$ étant définie d'une façon naturelle (cf. paragraphe 4). La condition $O^{n+2}(f) = 0$ remplace $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$.

Nous nous bornons à démontrer le théorème d'extension de Liao.

REMARQUE. - Nous ne revenons pas sur les hypothèses qui ont été faites dans ce paragraphe. Ainsi

1° (E, φ, K) désigne toujours un espace fibré dont la base K et dont la fibre F ont les propriétés indiquées ci-dessus ;

2° $C^{n+1}(f_o) = 0$; si $K_o = 0$ alors la classe fondamentale $C^{n+1}(E) = 0$;

3° La section f est une extension de f_o à $K_o \cup K_{n+1}$; si $K_o = 0$ alors f est une section de E sur K_{n+1} ;

4° F désigne toujours un complexe fini asphérique en dimensions $< n$, $n \geq 2$;

5° K est un complexe localement fini connexe.

2. Plongement régulier.

Soit (E^2, φ^2, K^2) l'espace produit (cartésien) de (E, φ, K) par lui-même. Soit $(\tilde{E}^2, \tilde{\varphi}^2, K)$ l'espace fibré, de fibre F^2, restriction de (E^2, φ^2, K^2) à l'image de K par l'application diagonale $K \to K^2$. Le groupe cyclique Z_2 opère sur $\tilde{E}^2$ de façon à induire l'identité sur la base. Par passage au quotient on obtient un espace fibré $(\tilde{E}^{[2]}, \tilde{\varphi}^{[2]}, K)$ dont la fibre est le produit cyclique $F^{[2]} = F * F$ et dont le groupe structural est isomorphe à celui de E.

Soit $\pi : F^2 \to F^{[2]}$ la projection canonique de F^2 sur l'espace des orbites $F^{[2]}$. Soit z un point donné de F. Désignons par $z(F)$ la partie de $F^{[2]}$ formée de tous les points $\pi(y, z)$, $y \in F$. L'application $y \to \pi(y, z)$ est un homéomorphisme de F sur $z(F)$. Elle définit un plongement régulier de F dans $F^{[2]}$.

Le groupe Z_2 qui opère sur F^2 est engendré par la transformation $t : (y_1, y_2) \to (y_2, y_1)$, $y_i \in F$. Soit $t^* : H^q(F^2 ; G) \to H^q(F^2 ; G)$ l'homomorphisme induit par t. Soit $1_F \in H^0(F ; Z)$ l'unité de l'anneau de cohomologie de F. La classe $u \times 1_F \in H^q(F^2 ; G)$ pour chaque $u \in H^g(F ; G)$. Soit $T : H^q(F ; G) \to H^q(F^2 ; G)$ l'homomorphisme qui à chaque classe u associe la classe $F(u) = (1 + t^*)(u \times 1_F)$ élément d'un sous-groupe de $H^q(F^2 ; G)$. Soit $\pi^* : H^q(F^{[2]} ; G) \to H^q(F^2 ; G)$ l'homomorphisme induit par la projection π. La considération des groupes de cohomologie (de Čech) invariants par Z_2 permet d'assurer que π^* est un isomorphisme de

$H^q(F^{[2]} ; G)$ sur $F\, H^q(F ; G)$. Soit $\mu : H^q(F ; G) \to H^q(F^{[2]} ; G)$ l'homomorphisme $u \to \mu(u) = \pi^{*-1} F(u)$. Soit $i^* : H^q(F^{[2]} ; G) \to H^q(F ; G)$ l'homomorphisme induit par le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$. Pour montrer que l'homomorphisme μ possède la propriété $i^* \mu$ = l'identité, il suffit de considérer le diagramme :

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
H^q(F^{[2]} ; G) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\pi^*"'] & H^q(s(F) ; G) \arrow[d, "\pi^* h_s^*"] \\
H^q(F^2 ; G) \arrow[r, "h_s^*"'] & H^q(F ; G) \arrow[ul, "\mu"']
\end{tikzcd}
$$

où h_s^* est l'homomorphisme induit par l'application $h_s : y \to (y , s)$, $y \in F$.

En général le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$ ne s'étend pas à tout l'espace E . Pour qu'il en soit ainsi il faut l'existence d'une section g de E sur K . En effet, soit $h : E \to \tilde{E}^2$ l'application définie par $z \to (z , g\, \varphi(z))$, $z \in E$. Le plongement régulier i de E dans $\tilde{E}^{[2]}$ est défini par $i = \pi h : E \to \tilde{E}^{[2]}$ où $\pi : E^2 \to E^{[2]}$ est la projection canonique. Le plongement i est compatible avec les structures fibrées de E et de $\tilde{E}^{[2]}$.

La condition $C^{n+1}(f_o) = 0$ donne une section f de E sur $K_o \cup K_{n+1}$. On est obligé, si on veut utiliser le i , d'introduire un plongement partiel particulier.

Supposons que $\dim K = n + 2$. Soit S' une subdivision simpliciale de S (cf. paragraphe 1) définie de la façon suivante : pour chaque $(n+2)$-simplexe σ_i^{n+2} de S , $\sigma_i^{n+2} \notin K_o$, il existe deux $(n+2)$-simplexes σ_{i-}^{n+2} et σ_{i+}^{n+2} tels que : σ_{i-}^{n+2} , $\sigma_{i+}^{n+2} \subset \mathrm{Int}\, \sigma_i^{n+2}$; $\sigma_{i+}^{n+2} \cap \sigma_{i-}^{n+2} = 0$. Soit K_- le sous-complexe de K obtenu en enlevant en K les intérieurs de tous les σ_{i-}^{n+2} . De même, pour K_+ . Le bord de chaque σ_i^{n+2} $(\sigma_i^{n+2} \notin K_o)$ est un rétract de déformation de $\sigma_i^{n+2} - \mathrm{Int}\, \sigma_{i-}^{n+2}$. Le relèvement des homotopies donne une extension f_- de f qui est une section de E sur K_- . On a de façon analogue une section f_+ de E sur K_+ . Alors (E_- , φ , K_-) peut être plongé régulièrement dans $(\tilde{E}_-^{[2]} , \tilde{\varphi}^{[2]} , K_-)$.

Soit K'_- le sous-complexe de K_- obtenu comme réunion de tous les $\partial \sigma_{i-}^{n+2}$ $(\sigma_i^{n+2} \notin K_o)$. L'homomorphisme $i^* : H^q(F^{[2]} ; G) \to H^q(F ; G)$ admet une extension naturelle : $i^* : H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F^{[2]} ; G)) \to H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F ; G))$.

LEMME 1. - Il existe un homomorphisme

$$\mu : \quad H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F ; G)) \longrightarrow H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F^{[2]} ; G))$$

qui, composé avec i^*, donne l'identité. Pour $q = 0$, μ, ainsi que i^*, sont des isomorphismes.

DÉMONSTRATION. - En effet, l'homomorphisme $\mu : H^q(F ; G) \longrightarrow H^q(F^{[2]} ; G)$ donne un isomorphisme $\mu' : H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F ; G)) \approx H^q(K_- , K'_- ; \mu\overline{H}^q(F ; G))$. L'inclusion $\mu H^q(F ; G) \subset H^q(F^{[2]} ; G)$ donne l'homomorphisme

$$\mu'' : H^p(K_- , K'_- ; \mu\overline{H}^q(F ; G)) \longrightarrow H^p(K_- , K'_- ; \overline{H}^q(F^{[2]} ; G)) \quad \text{et} \quad \mu = \mu'' \circ \mu'$$

3. <u>Extension de l'homomorphisme</u> μ.

Supposons désormais que tous les faisceaux de coefficients sont simples. On pose pour simplifier la notation $\tilde{\varphi}^{[2]} = \psi$; $\tilde{E}^{[2]} = \varphi^{-1}(K)$.

Si $F = S^n$ $(n \geqslant 2)$ la suite de Gysin généralisée par THOM et CHERN-SPANIER, donne :

$$(2) \qquad \ldots \xrightarrow{d^{n+1}} H^p(K , K_o , G)) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(E , \varphi^{-1}(K_o) ; G) \xrightarrow{\beta} H^{p-n}(K , K_o ; H^n(F ; G)) \xrightarrow{d^{n+1}} H^{p+1}(K , K_o ; G) \longrightarrow \ldots$$

Comme $C^{n+1}(f_o) = 0$ et comme K est connexe, un raisonnement classique permet d'écrire la suite exacte :

$$(3) \quad 0 \longrightarrow H^p(K , K_o ; G) \xrightarrow{\psi^*} H^p(E , \varphi^{-1}(K_o) ; G) \xrightarrow{\beta} H^{p-n}(K , K_o ; H^n(F , G)) \longrightarrow 0$$

On sait que pour $p = n$, (3) est une suite exacte même si $F \neq S^n$.

Encore sans l'hypothèse $F = S^n$, soit $1_K \in H^o(K ; Z) \approx H^o(K ; H^n(F ; Z))$ l'unité de l'anneau de cohomologie de K. D'après (3) il existe $\theta \in H^n(E ; Z)$ tel que $\beta(\theta) = 1_K$. On sait que (3) donne la décomposition de $H^p(E , \varphi^{-1}(K_o) ; G)$ en somme directe due à CHERN-SPANIER :

$$(4) \quad H^p(E , \varphi^{-1}(K_o) ; G) = \varphi^* H^p(K , K_o ; G) \oplus \theta \cup \varphi^* H^{p-n}(K , K_o ; G)$$

où le cup-produit est défini de façon naturelle (G est un Z-module à droite).

Comme pour deux espaces de même type d'homotopie leurs produits cycliques ont aussi le même type d'homotopie et comme F est un complexe fini et asphérique en dimensions $< n$ il en résulte que $F^{[2]}$ est un complexe fini asphérique en dimensions $< n$. Sous l'unique hypothèse de l'asphéricité de F, on sait que pour $p = n$, (2) contient une partie d'une suite exacte. On a donc :

$$(5)\quad \begin{array}{l} 0 \to H^n(K, K_o ; G) \xrightarrow{\psi^*} H^n(\psi^{-1}(K), \psi^{-1}(K_o) ; G) \xrightarrow{\beta} H^o(K, K_o ; H^n(F^{[2]}, G)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{d^{n+1}} H^{n+1}(K, K_o ; G) . \end{array}$$

Supposons que $\dim K = n + 2$. On fait en (3) et en (5) : $K = K_-$ et $K_o = 0$; $p = n$ et $G = Z$. Le plongement régulier i de $(\varphi^{-1}(K_-), \varphi_2 K_-)$ dans $(\psi^{-1}(K_-), \psi_2 K_-)$ induit un homomorphisme entre les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to H^n(K_- ; Z) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^n(\varphi^{-1}(K_-) ; Z) & \xrightarrow{\beta} & H^o(K_- ; H^n(F ; Z)) \to 0 & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle i^*} & & {\scriptstyle i^*}\uparrow \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \\ 0 \to H^n(K_- ; Z) & \xrightarrow{\psi^*} & H^n(\psi^{-1}(K_-) ; Z) & \xrightarrow{\beta} & H^o(K_- ; H^n(F^{[2]} ; Z)) & \xrightarrow{d^{n+1}} & H^{n+1}(K_- ; Z) \end{array}$$

où μ est l'homomorphisme du lemme 1. Soit $J = \mu\, H^o(K_- ; H^n(F ; Z))$. $d^{n+1}(J) = 0$ car $d^{n+1}\, i^* J = d^{n+1}(H^o(K_- ; H^n(F ; Z))) = 0$. Il existe donc un sous-groupe J' de $H^n(\psi^{-1}(K_-) ; Z)$ tel que $\beta(J') = J$. Pour $F = S^n$, soit $\theta \in H^n(\varphi^{-1}(K_-) ; Z)$ tel que $\beta(\theta) = 1_K$. Il existe $\mu_1 \theta \in J'$ tel que $i^* \mu_1 \theta = \theta$.

LEMME (fondamental) 2. - Si $F = S^n$ $(n \geq 2)$ il existe un homomorphisme $\mu : H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-) ; G) \to H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-) ; G)$ tel que

a. $\mu\varphi^*(u) = \varphi^*(u)$ pour chaque $u \in H^p(K_-, K'_- ; G)$;

b. $\mu(\theta \cup \varphi^*(u)) = \mu_1 \theta \cup \varphi^*(u)$ pour chaque $u \in H^{p-n}(K_-, K'_- ; G)$;

c. $i^*\mu =$ l'identité.

DÉMONSTRATION. - La suite (3) avec $K = K_-$ et $K_o = K'_-$ montre que l'homomorphisme $\varphi^* : H^p(K_-, K'_- ; G) \to H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-) ; G)$ est injectif. La commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & H^p(K_-, K'_- ; G) & \\ {\scriptstyle \varphi^*}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \psi^*} \\ H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-) ; G) & \xleftarrow[i^*]{} & H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-) ; G) \end{array}$$

donne alors : $i^* : \psi^* H^p(K_- , K'_- ; G) \approx \varphi^* H^p(K_- , K'_- ; G)$ et $\varphi^*(u) = i^* \psi^*(u)$ pour chaque $u \in H^p(K_- , K'_- ; G)$. Ainsi

$$i^*(\mu_1 \theta \cup \psi^*(u)) = i^* \mu_1 \theta \cup i^* \psi^*(u) = \theta \cup \varphi^*(u)$$

pour chaque $u \in H^{p-n}(K_- , K'_- ; G)$. On a donc

$$i^* : \mu_1 \theta \cup \psi^* H^{p-n}(K_- , K'_- ; G) \approx \theta \cup \varphi^* H^{p-n}(K_- , K'_- ; G) .$$

D'après (4) i^* définit alors un isomorphisme :

$$i^* : \psi^* H^p(K_- , K'_- ; G) \oplus \mu_1 \theta \cup \psi^* H^{p-n}(K_- , K'_- ; G) \approx H^p(\varphi^{-1}(K_-) , \varphi^{-1}(K'_-) ; G) . \tag{6}$$

Il suffit maintenant de définir μ comme l'inverse de l'isomorphisme (6). Il est évident que les propriétés (a), (b) et (c) sont vérifiées.

4. Obstructions réduites.

Soit $w : S^{n+1} \to S^n$ une application donnée qui représente un générateur de $\pi_{n+1}(S^n)$, avec l'invariant de Hopf 1 dans le cas où $n = 2$ (S^n et S^{n+1} sphères orientées). A chaque application $\kappa : S^n \to F_{n+1}$ on associe l'application $w\kappa : S^{n+1} \to F_{n+1}$ où F_n désigne la squelette de dimension n d'une subdivision cellulaire du complexe fini, asphérique en dimensions $< n$, F . L'ensemble des classes $[w\kappa]$ forme un sous-groupe $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}(F)$ de $\pi_{n+1}(F_{n+1})$, et est un invariant topologique de F . J. H. C. WHITEHEAD a étudié en [3] des opérations cohomologiques $H^n(X , X_o ; \pi_n) \to H^{n+2}(X , X_o ; \gamma_{n+1})$. Il s'agit du carré de Pontrjagin p_1 pour $n = 2$ et du carré S^2_g pour $n > 2$.

Soit $\nu : \gamma_{n+1}(F) \to \pi_{n+1}(F)$ la restriction à γ_{n+1} de l'homomorphisme induit par l'inclusion $F_{n+1} \subset F$. Soit

$$\bar\nu : H^{n+2}(X , X_o ; \gamma_{n+1}) \to H^{n+2}(X , X_o ; \pi_{n+1})$$

l'homomorphisme induit par ν . Soit $P_\omega = \bar\nu p_1$ et soit $Sq^2_\omega = \bar\nu S^2$. LIAO a montré en [2] , p. 545-549 que $P_\omega(K_2) = 0$ et que, pour $n > 2$, $Sq^2_\omega(K_n) = 0$ où $K_n \in H^n(F , H_n)$ est la classe fondamentale (obstruction à la construction) de l'espace F . Soit :

(7) $\quad \ldots \to H^q(F^{[2]}, F ; G) \xrightarrow{j^*} H^q(F^{[2]} ; G) \xrightarrow{i^*} H^q(F ; G) \to \ldots$

la suite exacte associée au couple $(F^{[2]}, F)$ obtenu par le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$. Pour $n > 2$, $Sq^2_\omega \mu(K_n) \in H^{n+2}(F^{[2]} ; \pi_{n+1})$ est tel que $i^* Sq^2_\omega \mu(K_n) = Sq^2_\omega(K_n) = 0$. De même pour $P_\omega \mu(K_2) \in H^4(F^{[2]} ; \pi_3)$. D'après (7) il existe $K_{n+2} \in H^{n+2}(F^{[2]}, F ; \pi_{n+1})$ tel que : $j^*(K_{n+2}) = Sq^2_\omega \mu(K_n)$ pour $n > 2$, et $j^*(K_4) = P_\omega \mu(K_2)$.

Comme (par l'asphéricité de F en dimensions $< n$) $\pi_n(F_{n+1}) \approx \pi_n(F)$, chaque classe $[\alpha] \in \pi_n(F_{n+1})$ détermine univoquement une classe de $\pi_n(F)$. L'application ω définit un homomorphisme $\omega^* : \pi_n(F) \to \gamma_{n+1}(F)$ qui, composé avec ν donne l'homomorphisme $\eta = \nu\omega^* : \pi_n(F) \to \pi_{n+1}(F)$. Désignons encore par $\gamma_{n+1} = \eta\pi_n(F)$ et soit $\Gamma_{n+1} = \pi_{n+1}(F)/\eta\pi_n(F)$. De la suite exacte :

$$0 \to \gamma_{n+1} \to \pi_{n+1} \xrightarrow{\xi} \Gamma_{n+1} \to 0$$

on déduit la suite exacte :

$$0 \to H^{n+2}(K, K_o ; \gamma_{n+1}) \to H^{n+2}(K, K_o ; F_{n+1}) \xrightarrow{\xi^*} H^{n+2}(K, K_o ; F_{n+1}) \to 0$$

On appelle <u>obstruction réduite</u> [1] $0^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_o ; F_{n+1})$ l'image par ξ^* de la deuxième obstruction $c^{n+2}(f)$. Lorsqu'on suppose que $0^{n+2}(f) = 0$, essentiellement on ne considère que les deuxièmes obstructions à coefficients en $\gamma_{n+1}(F)$.

Supposons que $F = S^n$ $(n \geqslant 2)$. Pour $n = 2$, $P_\omega = p_1$ est remplacé par le cup-produit défini (avec les hypothèses usuelles sur l'invariant de Hopf) par l'accouplement $\pi_n \otimes \pi_n \to \pi_{n+1}$ (qu'on utilise aussi pour $n > 2$). Sq^2_ω est remplacé par le carré de Steenrod Sq^2. $K_n \in H^n(S^n, H_n)$ est un générateur de $H^n(S^n, Z)$ et K_{n+2} est un générateur de $H^{n+2}(S^n * S^n, S^n ; \pi_{n+1})$. $F_{n+1} = 0$, et l'obstruction réduite $0^{n+2}(f) = 0$. <u>On a</u> : $\pi_{n+1}(S^n * S^n) \neq 0$ (c'est ici que la condition $n \geqslant 2$ est essentielle). En effet, $S^2 * S^2$ est le plan projectif complexe et $\pi_3(S^2 * S^2) = 0$. Pour $n \geqslant 3$ on utilise la subdivision de $S^n * S^n$ en cellules ouvertes due à STEENROD : $C_o \cup C_n \cup C_{2n}$. Soit $W^n = C_o \cup C_n$ qui est homéomorphe à S^n. Il est évident que $H_g(S^n * S^n, W^n ; Z) = 0$ pour $q < n+2$. L'isomorphisme de Hurewicz donne $\pi_{n+1}(S^n * S^n, W^n) = 0$.

---

(1) Cette notion résulte d'une suggestion qui nous a été faite par S. D. LIAO.

L'homomorphisme $d : \pi_{n+2}(S^n * S^n, W^n) \to \pi_{n+1}(W^n)$ est surjectif. La suite exacte d'homotopie donne alors $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$. Ceci permet d'énoncer :

LEMME (fondamental) 3. - Soit $f_\sigma : d\sigma^{n+2} \to S^n$ l'application qu'on obtient à partir de la restriction de la section f à $d\sigma^{n+2}$ pour chaque $(n+2)$-cellule orientée σ^{n+2} de K, $\sigma^{n+2} \notin K_0$. f_σ se prolonge dans $S^n * S^n$ sur σ^{n+2}. Si f'_σ est une telle extension, alors $f'^{*}_\sigma(K_{n+2}) \in H^{n+2}(\sigma^{n+2}, d\sigma^{n+2} ; \pi_{n+1})$ est l'élément représenté par la cochaîne $\alpha_f(\sigma^{n+2})$ où α_f est la classe de $\pi_{n+1}(S^n)$ représentée par f_σ.

Le cas général peut être obtenu à partir du lemme 3 en y ajoutant la condition $O^{n+2}(f) = 0$.

5. La classe $\theta(f)$.

Pour chaque $x \in K$, soit $K_x^n \in H^n(\varphi^{-1}(x) ; \pi_n)$ la classe fondamentale de $\varphi^{-1}(x)$ où φ est la projection de (E, φ, K). Soit $K^n \in H^0(K ; H^n(F ; \pi_n))$ la classe dont la valeur en chaque sommet $x \in K$ est K_x. La suite (3) avec $K_0 = 0$, $p = n$ et $G = \pi_n$, permet d'assurer l'existence de $a \in H^n(E ; \pi_n)$ tel que $\beta(a) = K^n$. Par définition : $\theta(f) = a - \varphi^* f^* a \in H^n(E ; \pi_n)$. La classe $\theta(f)$ est indépendante de $a \in H^n(E ; \pi_n)$ tel que $\beta(a) = K^n$. Il est évident que $\theta(f)$ est l'unique élément de $H^n(E ; \pi_n)$ qui satisfait aux conditions : $f^* \theta(f) = 0$ et $\beta(\theta(f)) = K^n$. (f est définie sur K_{n+1}).

Soit $\rho^* : H^n(E ; \pi_n) \to H^n(\varphi^{-1}(x) ; \pi_n)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\rho : \varphi^{-1}(x) \subset E$, $x \in K$. On peut remarquer que la condition $\beta(a) = K^n$ où $a \in H^n(E ; \pi_n)$ est équivalente à $\rho^*(a) = K_x^n$ pour un point arbitraire (K est connexe) $x \in K$.

Supposons désormais que $F = S^n$ $(n \geq 2)$ et que $\dim K = n + 2$. Cette dernière hypothèse n'est pas essentielle. En effet, tous les invariants topologiques : $\theta(f)$, $c^{n+2}(f)$, etc., ainsi que les opérations cohomologiques dont il sera question commutent avec l'homomorphisme induit par l'inclusion $K_{n+2} \subset K$. D'un autre côté, l'inclusion $i : K_{n+1} \subset (K_+)_{n+1}$ donne $i^* f_+^* = f^*$. Alors $\theta(f)$ et $\theta(f_+)$, ainsi que $c^{n+2}(f)$ et $c^{n+2}(f_+)$ sont chaque couple, deux cocycles de la même classe de cohomologie. On peut donc raisonner comme si f était définie sur K_+.

Soit K'' le sous-complexe de K réunion de tous les σ_{i-}^{n+2}. Soit $E^* = E \cup \psi^{-1}(K_-)$. E et $\psi^{-1}(K_-)$ sont des sous-ensembles fermés de E^*. On peut alors considérer le diagramme :

$$(8)\qquad \begin{tikzcd}
 & H^p(\varphi^{-1}(K_-),\varphi^{-1}(K'_-);G) \arrow[dr, shift left, "\mu"] & \\
H^p(E,\varphi^{-1}(K'');G) \arrow[ur, "i^*"] \arrow[d, "i'^*"'] & H^p(E^*,\varphi^{-1}(K'')\cup\psi^{-1}(K'_-);G) \arrow[l] \arrow[r, "h^*"'] \arrow[d, "j_1^*"] & H^p(\psi^{-1}(K_-),\psi^{1}(K'_-);G) \arrow[ul, shift left] \\
H^p(E;G) \arrow[d, "i^*"'] & H^p(E^*;G) \arrow[l, "i_1^*"'] \arrow[d, "i_2^*"] & H^p(E^*,E;G) \arrow[l, "j^*"'] \\
H^p(\varphi^{-1}(K_-);G) \arrow[r, shift right, "\mu"'] & H^p(\varphi^{-1}(K_-);G) \arrow[l, shift right, "i_3^*"'] &
\end{tikzcd}$$

où : $G = \pi_n(S^n)$ ou $G = \pi_{n+1}(S^n)$. Les homomorphismes μ de (8) dont définis dans le lemme 2. Tous les autres homomorphismes de (8) sont induits par des inclusions. On a donc la commutativité dans les carrés et dans les triangles du diagramme (8). L'excision donne :

$$i^* : H^p(E\,,\varphi^{-1}(K'')\;;G) \approx H^p(\varphi^{-1}(K_-)\,,\varphi^{-1}(K'_-)\;;G)$$

$$h^* : H^p(E^*\,,\varphi^{-1}(K'')\cup\psi^{-1}(K'_-)\;;G) \approx H^p(\psi^{-1}(K_-)\,,\psi^{-1}(K'_-)\;;G)$$

L'application des homomorphismes de la dernière ligne de (8) donne, d'après la condition (c) du lemme 2, $i_3^*\,\mu\, i^*\,\theta(f) = i^*\,\theta(f)$. Un argument usuel permet d'assurer l'existence d'un $\theta_o(f) \in H^n(E^*\,;\pi_n(S^n))$ tel que $i_1^*\,\theta_o(f) = \theta(f)$ et $i_2^*\,\theta_o(f) = \mu\, i^*\,\theta(f)$. Il en résulte que : $i_1^*\,Sq^2\,\theta_o(f) = Sq^2\,\theta(f)$ et $i_2^*\,Sq^2\,\theta_o(f) = \mu\, i^*\,Sq^2\,\theta(f)$ pour $n > 2$. De façon analogue pour le cup-produit. On suppose, pour simplifier que Sq^2 représente aussi le cup-produit lorsque $n = 2$.

Soit $i'^* : H^{n+2}(E\,,\varphi^{-1}(K'')\;;\pi_{n+1}(S^n)) \approx H^{n+2}(E\;;\pi_{n+1}(S^n))$.

$$(i^*\,i'^{*-1})\,Sq^2\,\theta(f) \in H^{n+2}(\varphi^{-1}(K_-)\,,\varphi^{-1}(K'_-)\;;\pi_{n+1}(S^n)) .$$

D'après la commutativité de (8), $i_1^*\,j_1^*\,h^{*-1}\,\mu\,(i^*\,i'^{*-1})\,Sq^2\,\theta(f) = Sq^2\,\theta(f)$ et alors $i_1^*[Sq^2\,\theta_o(f) - j_1^*\,h^{*-1}\,\mu\,(i^*\,i'^{*-1})\,Sq^2\,\theta(f)] = 0$. Il existe donc $v^{n+2} \in H^{n+2}(E^*\,,E\;;\pi_{n+1}(S^n))$ tel que

$$j^*\,v^{n+2} = Sq^2\,\theta_o(f) - j_1^*\,h^{*-1}\,\mu\,(i^*\,i'^{*-1})\,Sq^2\,\theta(f) .$$

Soit f la section de $K_o \cup K_+$. Comme $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$, la restriction de

f à $K_+ \cap K_-$ se prolonge à une section f' de $\psi^{-1}(K_-)$ sur K_-. Soit f'' l'application $K \to E^*$ qui coïncide avec f sur K'' et qui coïncide avec f' sur K_-. f'' coïncide alors avec f sur K_+ et définit des applications $(K, K_+) \to (E^*, E)$ et $(K, K_o) \to (E^*, E)$. On obtient ainsi le diagramme commutatif :

$$\text{(9)} \qquad \begin{tikzcd}
 & H^{n+2}(E^*, E; \pi_{n+1}(S^n)) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dl, "f''^*"'] \arrow[dr, "f''^*"] & H^{n+2}(E^*; \pi_{n+1}(S^n)) \\
H^{n+2}(K, K_+; \pi_{n+1}(S^n)) \arrow[rr, "j'^*"'] & & H^{n+2}(K, K_o; \pi_{n+1}(S^n)) \, .
\end{tikzcd}$$

A partir du lemme 3 on peut montrer [3], p. 175, par un raisonnement typique pour les obstructions, que $c^{n+2}(f) = f''^*(v^{n+2})$. Pour $K_o = 0$ on peut compléter le 2e triangle du diagramme (9) pour obtenir : $c^{n+2}(f) = f''^*(j^* v^{n+2})$.

LEMME 4. - $f'^* \mu_1 i^* \theta(f) = 0$ et $f''^* \theta_o(f) = 0$, où μ_1 est défini dans le lemme 2.

DÉMONSTRATION. - Les carrés et les triangles du diagramme :

$$\text{(10)} \qquad \begin{tikzcd}
 & H^n(K; \pi_n(S^n)) \arrow[r, "i^*"] & H^n(K_-; \pi_n(S_n)) & \\
H^n(E^*; \pi_n(S^n)) \arrow[ur, "f''^*"] \arrow[dr, "i_1^*"'] & & & H^n(\psi^{-1}(K_-); \pi_n(S^n)) \arrow[ul, "f'^*"'] \arrow[dl, shift left, "\mu_1"] \\
 & H^n(E; \pi_n(S^n)) \arrow[r, "i^*"] \arrow[uu, "f^*"] & H^n(\varphi^{-1}(K_-); \pi_n(S^n)) \arrow[uu, "f'^*"] \arrow[ur, shift left, "i_3^*"] &
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Alors

$$f'^* \mu_1 i^* \theta(f) = f'^* i^* \theta(f) = i^* f^* \theta(f)$$

et

$$f^* \theta(f) = 0 \, .$$

$$f''^* \theta_o(f) = f^* i_1^* \theta_o(f) = f^* \theta(f) = \theta \, .$$

LEMME 5. - Soit $K_o = 0$. Soit $\bar{i}^* : H^{n+2}(K, K''; G) \approx H^{n+2}(K_-, K'_-; G)$ l'isomorphisme induit par l'inclusion $\bar{i} : (K_-, K'_-) \subset (K, K'')$. Soit

$\bar{I}'^{*}$: $H^{n+2}(K , K'' ; G) \to H^{n+2}(K ; G)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\bar{I}'$: $(K , 0) \subset (K , K'')$. Comme K'' est la réunion des simplexes disjoints, $\bar{I}'^{*}$ est aussi un isomorphisme. Soit $\bar{C}^{n+2}(f) = (\bar{I}^{*} \bar{I}'^{*-1}) C^{n+2}(f)$ (avec $G = \pi_{n+1}(S^n)$). Alors : $\bar{C}^{n+2}(f) = - f'^{*} \mu(i^{*} i'^{*-1}) Sq^2 \theta(f)$.

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme 4, $f''^{*} Sq^2 \theta_0(f) = 0$. On a alors : $C^{n+2}(f) = f''^{*}(j^{*} v^{n+2}) = - f''^{*} j_1^{*} h^{*-1} \mu(i^{*} i'^{*-1}) Sq^2 \theta(f)$. La démonstration s'achève par la considération d'un diagramme commutatif convenable où on montre que $f'^{*} = (\bar{I}^{*} \bar{I}'^{*-1}) f''^{*} j_1^{*} h^{*-1}$.

6. Théorème d'extension de Liao.

Le faisceau de coefficients $\tilde{\pi}_{n+1}(S^n)$ est simple. En effet, pour $n = 2$, cela résulte du fait que si g est un automorphisme de S^2 et $h : S^3 \to S^2$ alors $h \simeq gh$. Pour $n > 2$, il est évident car $\pi_{n+1}(S^n) = Z_2$. Pour éliminer l'hypothèse que $\tilde{\pi}_n(S^n)$ soit simple, on considère la classe $\tilde{\theta}(f) \in H^n(E ; Z_2)$ image de $\theta(f)$ par la réduction modulo 2. $\tilde{\theta}(f)$ peut être défini à partir de la classe unité $\tilde{K}^n = \tilde{1}_K \in H^0(K ; Z_2)$.

THÉORÈME d'extension. - Soit (E , φ , K) un espace fibré sphérique de fibre S^n $(n \geqslant 2)$ dont la base K est un complexe localement fini connexe. Soit f une section de E sur K_{n+1}. Alors la deuxième obstruction $C^{n+2}(f)$ à l'extension d'une section qui coïncide avec f sur K_n est donnée par les formules suivantes :

$$\varphi^{*} C^{n+2}(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^{*} \beta\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) + Sq^2 \tilde{\theta}(f) , \quad n > 2$$

$$\varphi^{*} C^4(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^{*} \beta(\tilde{\theta}(f) \cup \tilde{\theta}(f)) + \tilde{\theta}(f) \cup \tilde{\theta}(f) , \quad n = 2 .$$

DÉMONSTRATION. - Soit i^{*} : $H^p(E ; Z_2) \to H^p(\varphi^{-1}(K_-) ; Z_2)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\varphi^{-1}(K_-) \subset E$. Il est évident que $\beta(i^{*} \tilde{\theta}(f)) = \tilde{1}_k$. La suite (3) permet d'écrire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{llllll}
(11) & 0 \to H^p(K_- , K'_- ; Z_2) & \xrightarrow{\varphi^{*}} & H^p(\varphi^{-1}(K_-) , \varphi^{-1}(K'_-) ; Z_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K_- , K'_- ; Z_2) \to 0 \\
 & \quad\uparrow I^{*} & & \quad\uparrow i^{*} & & \quad\uparrow I^{*} \\
(12) & 0 \to H^p(K , K'' ; Z_2) & \xrightarrow{\varphi^{*}} & H^p(E , \varphi^{-1}(K'') ; Z_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K , K'' ; Z_2) \to 0 \\
 & \quad\downarrow I'^{*} & & \quad\downarrow i'^{*} & & \quad\downarrow I'^{*} \\
(13) & 0 \to H^p(K ; Z_2) & \xrightarrow{\varphi^{*}} & H^p(E ; Z_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K ; Z_2) \to 0
\end{array}$$

où i^*, $\overline{i}^*$, i'^* et $\overline{i'}^*$ sont les isomorphismes définis dans le paragraphe 5.

$$\beta(i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \theta(f)) = \beta(i^* \tilde{\theta}(f)) \cup \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$
$$= \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 (\tilde{\theta}(f) .$$

Si l'on pose

$$Z^{n+2} = i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) \in$$
$$\in H^{n+2}(\varphi^{-1}(K_-) , \varphi^{-1}(K'_-) ; Z_2)$$

alors

$$\beta(Z^{n+2}) = 0$$

D'après (11), il existe $Z'^{n+2} \in H^{n+2}(K_- , K'_- ; Z_2)$ tel que $Z^{n+2} = \varphi^*(Z'^{n+2})$. La section f' de $\psi^{-1}(K_-)$ sur K_- (cf paragraphe 5) donne :

$$f'^* \mu Z^{n+2} = f'^* \mu \varphi^*(Z'^{n+2})$$

qui, d'après la condition (a) du lemme 2, donne

$$f'^* \psi^*(Z'^{n+2}) = Z'^{n+2} \quad .$$

La condition (b) du même lemme 2 donne :

$$f'^* \mu(i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)) = f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) \cup f'^* \psi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$
$$= f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) \cup \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) = 0$$

car le lemme 4 donne

$$f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) = 0 \quad .$$

On a donc

$$Z'^{n+2} = - f'^* \mu (i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) \quad .$$

D'après le lemme 5, $Z'^{n+2} = \overline{C}^{n+2}(f)$. Alors :

$$\varphi^*(\bar{i}^* \bar{i}'^{*-1})\, C^{n+2}(f) = i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i^* i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$

Mais les isomorphismes i^* et $\bar{i}^*$ entre (11) et (12) donnent

$$i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) = i^*(\tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f))$$

et

$$i^{*-1}(i^* i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) = (i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) \quad ,$$

donc :

$$\varphi^* \bar{i}^{*-1} \bar{C}^{n+2}(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i'^{*-1})\, Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$

La démonstration s'achève par la considération des isomorphismes i'^* et $\bar{i}'^*$ entre les suites (12) et (13).

7. Remarques (LIAO).

1° Le théorème d'extension (absolu) permet d'obtenir par un raisonnement classique, où on utilise l'homomorphisme de Steenrod, le théorème (d'extension) relatif et le théorème de classification correspondant.

2° D'après les résultats de THOM, $\beta(Sq^K \tilde{\theta}(f)) = W_2^k$, où W_2^k désigne la k-ième classe caractéristique de Stiefel-Whitney (réduite modulo 2).

3° Dans le cas orientable (groupe $SO(n)$) on peut utiliser certains résultats sur les transformations antipodiques pour simplifier les formules obtenues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIAO (S. D.). - On the theory of obstructions of fiber bundles, Annals of Math., series 2, t. 60, 1954, p. 146-191.

[2] LIAO (S. D.). - On the topology of cyclic product of spheres, Trans. Amer. math. Soc., t. 77, 1954, p. 520-551.

[3] WHITEHEAD (J. H. C.). - On the theory of obstructions, Annals of Math., series 2, t. 54, 1951, p. 68-84.