SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE
DIFFÉRENTIELLE

KURT LEICHTWEISS

Sur les espaces de Banach autoadjoints

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. n° 4, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)
Année 1957/1958
-:-:-:-

7 et 14 janvier 1958

SUR LES ESPACES DE BANACH AUTOADJOINTS

par Kurt LEICHTWEISS

1. Introduction.

Le sujet de cet exposé est la considération de certaines sortes d'espaces de Banach. Commençons par la

DÉFINITION. - Un espace $\mathfrak{L}$ est nommé espace linéaire normé, si

1° $\mathfrak{L}$ est un espace linéaire à coefficients réels et

2° $\mathfrak{L}$ est un espace normé, c'est-à-dire que pour chaque élément $x \in \mathfrak{L}$ il existe un nombre réel non-négatif $\|x\|$ avec les propriétés suivantes :

a. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,

b. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (α = réel) et

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Alors ou bien :

3° $\mathfrak{L}$ est de dimension finie et nous l'appelons espace de Banach de dimension finie ou plus court espace de Minkowski $\mathfrak{M}$,

ou bien

4° $\mathfrak{L}$ est de dimension infinie. Dans ce cas, on peut supposer de plus :

5° $\mathfrak{L}$ est complet par rapport à la topologie de la norme ou, autrement dit, $\mathfrak{L}$ est un espace de Banach (de dimension infinie) $\mathfrak{B}$.

6° $\mathfrak{L}$ est séparable par rapport à cette topologie.

Dans la théorie des espaces linéaires normés on considère les applications linéaires et bornées d'un tel espace $\mathfrak{L}$ dans la droite numérique appelée les formes linéaires sur $\mathfrak{L}$. Elles forment un espace linéaire normé, l'espace adjoint ou dual $\mathfrak{L}^*$ de l'espace $\mathfrak{L}$, si l'on définit :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) , \quad f , g \in \mathfrak{L}^* ,$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{et}$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| .$$

$x \in \mathfrak{L}$ étant fixé et $f \in \mathfrak{L}^*$ étant variable, $f(x) = F_x(f)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{L}^*$. Alors $x \rightarrow F_x(f)$ est une application canonique de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}^{**}$ qui est linéaire et préserve la norme. Si cette application est une bijection sur, $\mathfrak{L}$ est nommé réflexif :

DÉFINITION. -

7° L'espace linéaire normé $\mathfrak{L}$ est réflexif, si pour n'importe quel $F \in \mathfrak{L}^{**}$ il existe un $x \in \mathfrak{L}$ tel que $F(f) = f(x)$ pour tous $f \in \mathfrak{L}^*$. Chaque espace de Minkowski est réflexif, puisque on a la représentation

$$f(x) = \alpha_1 \delta_1 + \dots + \alpha_n \delta_n \quad (x = (\delta_1 , \dots , \delta_n)) \, .$$

Le plus simple exemple d'un espace de Banach séparable est l'espace d'Hilbert réel dont voici la

DÉFINITION. - On dit qu'un espace de Banach séparable est un espace d'Hilbert réel $\mathfrak{H}$, s'il satisfait aux conditions supplémentaires :

8° Pour deux éléments quelconques x et y de $\mathfrak{H}$ on a défini un nombre réel, le produit intérieur $\langle x , y \rangle$, avec les propriétés suivantes :

a. $\langle x , y \rangle = \langle y , x \rangle$

b. $\langle x + y , z \rangle = \langle x , z \rangle + \langle y , z \rangle$

c. $\langle \alpha x , y \rangle = \alpha \langle x , y \rangle$ et

9° $\langle x , x \rangle = \|x\|^2$.

De même le plus simple exemple d'un espace de Minkowski est l'espace euclidien dont l'espace de Hilbert (réel) est la généralisation pour une dimension dénombrable.

Alors on peut se poser le problème de caractériser $\mathfrak{H}$ sans utilisation du produit intérieur parmi les espaces de Banach séparables. Il y a beaucoup de telles caractérisations dans la littérature. Nous en voulons citer les deux plus importantes :

1° J. von NEUMANN démontra en 1932 qu'un espace de Banach séparable (de Minkowski avec la relation $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ est un espace de Hilbert (euclidien).

2° W. BLASCHKE et M.M. DAY démontrèrent en 1941 qu'on peut remplacer la relation de (1) par le postulat de la symétrie de la transversalité, si la dimension de l'espace est plus grande que 2. Ici x est transversal à y, si $\|y + \alpha x\| \geq \|y\|$ pour tous les α. Dans le cas de dimension 2, J. RADON avait construit des espaces exceptionnels en 1916.

Le commencement de nos considérations concernait la question : Existe-t-il d'autres propriétés caractéristiques de l'espace de Hilbert (euclidien) parmi les espaces de Banach séparables (de Minkowski) ? Dans ce but remarquons que l'espace de Hilbert (euclidien) est réflexif, puisque chaque forme linéaire $f(x)$ de cet espace peut être représentée comme produit intérieur : $f(x) = (x , y)$. En posant $f_y(x) = \langle x , y \rangle$, on a une application A de l'espace dual sur l'espace : $f_y \to y$, qui est linéaire et préserve la norme. Car $|f_y(x)| = |\langle x , y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (inégalité de Schwarz !) et $|f_y(y)| = |\langle y , y \rangle| = \|y\| \, \|y\|$. Nous exprimons cela en disant que ces espaces sont autoadjoints, et nous définissons plus généralement :

DÉFINITION. -

10° L'espace linéaire normé $\mathfrak{L}$ est nommé <u>autoadjoint</u>, si $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe une application A de $\mathfrak{L}^*$ sur $\mathfrak{L}$ linéaire et préservant la norme.

Au premier moment on pourrait croire qu'un espace de Banach séparable, réflexif (de Mikowski) et autoadjoint est un espace de Hilbert (euclidien). Mais E.R. LORCH a déjà construit des contre-exemples en 1945. Néanmoins l'étude des espaces de Banach autoadjoints fournira beaucoup de résultats et en même temps une foule d'exemples non-triviaux, qui ne sont pas des espaces de Hilbert ou des espaces euclidiens.

2. Quelques propriétés générales des espaces autoadjoints.

1° Selon des théorèmes bien connus de Banach chaque espace linéaire normé autoadjoint est nécessairement complet et donc un espace de Banach ou de Minkowski. De même pour chaque espace linéaire normé, séparable, réflexif et autoadjoint, l'ensemble $\|x\| \leqslant M$ est faiblement compact.

2° Il est commode de généraliser un peu la notion d'espace linéaire normé de la manière suivante :

DÉFINITION. -

11° Un espace $\mathfrak{L}$ est appelé <u>espace linéaire normé généralisé</u> s'il satisfait à tous les axiomes d'un espace linéaire normé sauf l'axiome $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (α = réel), qui est remplacé par l'axiome plus faible $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$ (α = positif réel).

Dans la suite nous ne parlerons que des espaces linéaires normés généralisés sans toujours l'indiquer. Nous remarquons que l'ensemble de toutes les formes linéaires et bornées d'un espace linéaire normé généralisé forme aussi un espace de cette sorte, si l'on définit la norme de f par :

11a. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$ qui est identique à la définition donnée pour les espaces linéaires normés ordinaires. On n'a pas besoin de changer la définition de "autoadjoint" et de réflexif" pour ces espaces, parce que le théorème d'extension des formes linéaires bornées de Banach est également valable dans ce cas.

3° Il est possible d'introduire un produit intérieur dans les espaces autoadjoints de 2.2 , par la

DÉFINITION. -
12° $\langle x , y\rangle = A^{-1}x(y)$ (complète la définition 10).

On a les propriétés suivantes :

a. $\langle x , y\rangle$ est bilinéaire,

b. $\sup\limits_{\|y\|=1} \langle x , y\rangle = 1$, si $\|x\| = 1$,

c. pour tout $f \in \mathcal{L}^*$ il existe un x de $\mathcal{L}$ avec $f(y) = \langle x , y\rangle$.

Inversement, s'il existe un produit intérieur avec ces trois propriétés pour un espace linéaire normé généralisé, l'espace est autoadjoint.

DÉFINITION. -
13° L'espace $\mathcal{L}$ autoadjoint est symétrique, si son produit intérieur est symétrique.

PROPOSITION 1. - Il est facile de voir que chaque espace autoadjoint symétrique est réflexif on a : $A^* = A$, où A^* est l'application de $\mathcal{L}^*$ sur $\mathcal{L}^{**}$ qui est duale de A et qui est définie par l'équation : $(A^*g)(f) = g(Af)$.

En effet, $f \xrightarrow[A]{} x$ et $g \xrightarrow[A^*]{} F$, entraînent, d'après la définition $y = A(A^*)^{-1} F$:

$$F(f) = A^*g(A^{-1}x) = g(AA^{-1}x) = ((A^*)^{-1}F)(x) = A^{-1}y(x) = \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle = A^{-1}x(y) = f(y)$$

pour tous les $f \in \mathcal{L}^*$. Puisque $\mathcal{L}$ est réflexif, on peut identifier F et y , d'où $A = A^*$. De même l'inverse de notre proposition démontrée est vrai. D'une plus grande importance est la

PROPOSITION 2. - Pour chaque espace autoadjoint et réflexif $\mathcal{L}$ l'application $C = A(A^*)^{-1}$ est un automorphisme, c'est-à-dire, une application de $\mathcal{L}$ sur lui-même, linéaire et préservant la norme. Elle est l'identité, si et seulement si $\mathfrak{L}$ est symétrique.

Ce fait est évident, puisque l'application A^* préserve aussi la norme à cause de $\|A^* g\| = \sup_{\|f\|=1} g(Af) = \sup_{\|Af\|=1} g(Af) = \|g\|$.

4° Nous répartissons les espaces autoadjoints en classes d'espaces isomorphes par la

DÉFINITION. -

14° Les deux espaces linéaires normés $\mathfrak{L}_1$ <u>et</u> $\mathfrak{L}_2$ <u>sont appelés isomorphes</u>, s'il existe une application T de $\mathfrak{L}_1$ sur $\mathfrak{L}_2$ linéaire et préservant la norme. On écrit $\mathfrak{L}_1 \cong \mathfrak{L}_2$ et $\mathfrak{L}_2 = T\mathfrak{L}_1$.

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $\mathfrak{L}_1$ <u>et</u> $\mathfrak{L}_2$ <u>sont isomorphes et si</u> $\mathfrak{L}_1$ <u>est autoadjoint</u> avec l'application A_1, $\mathfrak{L}_2$ <u>est aussi autoadjoint</u> avec l'application $A_2 = TA_1 T^*$.

DÉMONSTRATION. - Comme dans la proposition 2 on voit que T^* est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_2^*$ sur $\mathfrak{L}_1^*$. Alors $A_2 = TA_1 T^*$ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_2^*$ sur $\mathfrak{L}_2$.

5° On peut introduire un produit (cartésien) pour les espaces linéaires normés par la

DÉFINITION. -

15° L'espace des couples $x = (x_1 , x_2)$ d'éléments de deux espaces linéaires normés avec la combinaison linéaire $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1 , \alpha x_2 + \beta y_2)$ et muni de la norme $\|x\| = (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{1/2}$ est dit le <u>produit</u> <u>(cartésien)</u> $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ <u>des deux espaces</u> $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$.

$\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ est aussi un espace linéaire normé, il est algébriquement la somme directe de $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$. De plus, on a

PROPOSITION 4. - $(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2)^* \cong \mathfrak{L}_1^* \times \mathfrak{L}_2^*$.

La correspondance $f \in (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2)^* \longleftrightarrow (f_1 , f_2) \in \mathfrak{L}_1^* \times \mathfrak{L}_2^*$ est déterminée par $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Alors elle est évidemment linéaire et

$$\|(f_1,f_2)\| = (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|x_1\| = \frac{\|f_1\|}{\|(f_1,f_2)\|}} f_1(x_1) + \sup_{\|x_2\| = \frac{\|f_2\|}{\|(f_1,f_2)\|}} f_2(x_2) =$$

$$= \sup_{\substack{\|x_1\| = \dots \\ \|x_2\| = \dots}} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) \leq \sup_{\|(x_1,x_2)\| = 1} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) = \|f\|$$

$$\leq \sup_{\|(x_1,x_2)\| = 1} (\|f_1\| \cdot \|x_1\| + \|f_2\| \cdot \|x_2\|) = \|(f_1,f_2)\| \quad ;$$

c'est-à-dire $\|f\| = \|(f_1,f_2)\|$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 5. - Si les espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont autoadjoints avec les applications A_1 et A_2 , leur produit est autoadjoint avec l'application A , qui est la somme directe des A_i en ce sens que $A(f) = A(f_1,f_2) = (A_1 f_1, A_2 f_2)$.

REMARQUE. - D'après la proposition 4 $L_p \times L_q$ est un exemple non trivial d'un espace autoadjoint $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

3. Application A et exemples d'espaces de Minkowski autoadjoints.

A partir de maintenant nous faisons la restriction que l'espace autoadjoint est de dimension finie n , c'est-à-dire qu'il est un espace de Minkowski $\mathfrak{M}$. Alors on peut représenter : $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $f = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$, si f est donnée par $f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$; et $x = Af$ s'écrit "en coordonnées" : $\xi_i = \sum_k \alpha_{ir} \alpha_r$ $(i = 1 , \dots , n)$. L'application A est donc induite par la matrice $\mathcal{A}$ avec les éléments α_{ir} , et inversement chaque application A induit une telle matrice carrée. Si $g = (\beta_1 , \dots , \beta_n)$, on conclut de $(A^* g)(f) = g(Af) = F(f) = f(y)$ que $\sum_i \beta_i \xi_i = \sum_i (\sum_k \alpha_{ir} \alpha_r)\beta_i = \sum_k (\sum_i \alpha_{ir} \beta_i)\alpha_r$
Donc $\eta_k = \sum_i \alpha_{ir} \beta_i$, si $y = (\eta_1 , \dots , \eta_n)$ et on voit que la matrice transposée $\mathcal{A}^*$ correspond à l'application A^* . Evidemment la matrice $\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^*)^{-1}$ correspond à l'automorphisme $C = A(A^*)^{-1}$ de $\mathfrak{M}$. Alors on a le théorème fondamental qu'on peut exprimer avec les définitions

DÉFINITION. -

16° Deux matrices $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont dites congruentes (resp. pareilles), s'il existe une matrice non-singulière $\mathfrak{T}$, telle que $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{T}^* \mathfrak{A}_1 \mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{T}$)

Nous écrirons $\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2$ (resp. $\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{A}_2$).

sous la forme :

THÉORÈME 1. - La matrice $\mathfrak{A}$ qui correspond à l'application A d'un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ est congruente à une matrice normale $\mathfrak{A}_0$, c'est-à-dire à une matrice qui commute avec sa transposée.

DÉMONSTRATION. - Le groupe G de toutes les matrices correspondant aux automorphismes de $\mathfrak{M}$ est compact, car la boule $\|x\| \leq 1$ est compacte par rapport à la topologie naturelle de l'espace linéaire $\mathfrak{M}$, et par conséquent tous les éléments des matrices de G sont uniformément bornés. Selon un théorème bien connu la matrice $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^*)^{-1}$, élément de G à cause de la proposition 2, est pareille à une matrice $\mathfrak{C}_0$ orthogonale. Alors $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{T}^*$ est congruent à $\mathfrak{A}$, et on a

$$\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}_0^*)^{-1} = (\mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{T}^*)(\mathfrak{T}^{*-1}\mathfrak{A}^{*-1}\mathfrak{T}^{-1}) = \mathfrak{T}\mathfrak{C}\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{C}_0$$

et $\mathfrak{C}_0^* = \mathfrak{C}_0^{-1}$, d'où résulte $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}_0^* = \mathfrak{A}_0^*\mathfrak{A}_0^{-1}$ ou $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0^*$.

Maintenant on peut démontrer pour les matrices normales

LEMME 1. - Chaque matrice normale et non-singulière de rang n est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \square_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & \square_m & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \cdots & & & -1 \end{pmatrix}$$

où $\square_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$; $0 < \varphi_j < \pi$; $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_m$ et $m \leq [\frac{n}{2}]$.

DÉMONSTRATION. - On sait que chaque matrice normale est congruente à une matrice de forme diagonale à éléments complexes par rapport à une matrice unitaire. De cela on peut déduire que cette matrice normale est congruente à une matrice réelle de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & & \cdots & 0 \\ \vdots & \square_j & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -\gamma_k \end{pmatrix}$$

avec

$$\square_j = \beta_j \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix} ,$$

$\varphi_j \neq 0$ et $\neq \pi$ et $\alpha_i , \beta_j , \gamma_k > 0$, par rapport à une matrice orthogonale où α_i , $\beta_j e^{i\varphi_j}$, $\beta_j e^{-i\varphi_j}$ et $-\gamma_k$ sont les valeurs propres de la matrice originale.

En prenant $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_i^{-1}} & & \cdots & 0 \\ \vdots & \sqrt{\beta_j^{-1}} & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \sqrt{\gamma_k^{-1}} \end{pmatrix}$ et utilisant la relation

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$$

la démonstration est achevée.

LEMME 2. - Si deux matrices $\mathfrak{A}^{(1)}$ et $\mathfrak{A}^{(2)}$ en forme normale du lemme 1 avec les angles $\varphi_j^{(1)}$ et $\varphi_j^{(2)}$ (nombre des angles $= m^{(1)}$ et $m^{(2)}$) sont congruentes, alors $m^{(1)} = m^{(2)}$, $\varphi_j^{(1)} = \varphi_j^{(2)}$ où $\pi - \varphi_j^{(2)}$, et les rangs et les indices d'inertie des matrices symétrisées $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)*})$ et $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}^{(2)} + \mathfrak{A}^{(2)*})$ sont égaux.

DÉMONSTRATION. - Puisque $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{T}^* \mathfrak{A}^{(1)} \mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}$ non-singulière),

$$\mathfrak{A}^{(2)}(\mathfrak{A}^{(2)*})^{-1} = \mathfrak{T}^*(\mathfrak{A}^{(1)}(\mathfrak{A}^{(1)*})^{-1})\mathfrak{T}^{*-1} .$$

Mais $\mathcal{A}^{(1)}$ et $\mathcal{A}^{(2)}$ sont des matrices orthogonales, c'est-à-dire $\mathcal{A}^{(1)^*} = \mathcal{A}^{(1)^{-1}}$ et $\mathcal{A}^{(2)^*} = \mathcal{A}^{(2)^{-1}}$. Donc $(\mathcal{A}^{(2)})^2 = \mathcal{T}^*(\mathcal{A}^{(1)})^{2*-1}\mathcal{T}$ ou $(\mathcal{A}^{(2)})^2 \simeq (\mathcal{A}^{(1)})^2$. Les valeurs propres de $(\mathcal{A}^{(1)})^2$ et $(\mathcal{A}^{(2)})^2$, à savoir 1 et $e^{\pm 2\varphi_j i}$ sont égales. Pour cette raison $m^{(1)} = m^{(2)}$, et chaque $\varphi_j^{(1)}$ est égal à une des valeurs $\varphi_j^{(2)}$ ou $\pi - \varphi_j^{(2)}$ (avec un autre indice j peut-être). En outre on a l'équation $\frac{1}{2}(\mathcal{A}^{(2)} + \mathcal{A}^{(2)^*}) = \mathcal{T}^*(\frac{1}{2}(\mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(1)^*}))\mathcal{T}$, donc d'après un théorème de Sylvester les nombres d'éléments positifs et les nombres d'éléments négatifs dans la diagonale principale de $\mathcal{A}^{(1)}$ et de $\mathcal{A}^{(2)}$ sont égaux.

C'est à cause du lemme 2 qu'on peut regarder m, $\mathrm{Min}(\varphi_j, \pi - \varphi_j)$, le rang et l'indice d'inertie de la matrice symétrisée comme des invariants de l'application A par rapport à un isomorphisme de l'espace de Minkowski autoadjoint.

En outre nous aurons besoin d'un théorème de Kronecker de la théorie des approximations diophantiennes ([2], p. 83).

LEMME 3. - Si les nombres réels $\delta_1, \dots, \delta_p$, 1 sont linéairement indépendants sur le corps des nombres rationnels, alors les points $P_\nu = (\varepsilon_1^{(\nu)}, \dots, \varepsilon_p^{(\nu)})$ de l'espace affine $\mathcal{F}_p$ avec les coordonnées $\varepsilon_r^{(\nu)} = \nu\delta_r - [\nu\delta_r]$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, 1 \leq r \leq p)$ sont denses dans le cube $\underbrace{I \times \dots \times I}_{P \text{ fois}}$, où I est le segment entre 0 et 1.

Naturellement il existe beaucoup d'applications A et par suite beaucoup de matrices $\mathcal{A}$ définissant un isomorphisme d'un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ sur son espace dual ; de façon plus précise : si $\mathcal{A}$ est une telle matrice, alors l'ensemble de toutes les matrices possibles est $G\mathcal{A}$ (G est le groupe des matrices de tous les automorphismes de $\mathfrak{M}$). Le théorème suivant dit qu'au moins une de ces matrices est d'une forme très simple :

THÉORÈME 2. - <u>Un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ admet toujours une matrice d'isomorphie de $\mathfrak{M}^*$ sur $\mathfrak{M}$ de la forme</u>

$$\mathfrak{T}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \cdots & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & \square_1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \square_m & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 & \\ 0 & & & & & \cdots & & & \ddots & -1 \end{pmatrix}\mathfrak{T}^*$$

<u>où</u> $\square_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$ <u>avec</u> $\varphi_j = \frac{\ell_j}{2^{\lambda_j}}\pi$; ℓ_j <u>et</u> λ_j <u>entiers</u> ; ℓ_j <u>impair</u> ; $0 < \ell_j < 2^{\lambda_j}$; $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant \varphi_m$; <u>et</u> $\mathfrak{T}$ <u>est non-singulière</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathcal{A}$ la matrice qui correspond à une application A de $\mathfrak{M}^*$ sur $\mathfrak{M}$. D'après le théorème 1, $\mathcal{A}$ est congruente à une matrice normale $\mathcal{A}_0$. Puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ ne sont pas singulières on peut appliquer le lemme 1 et on trouve que $\mathcal{A}_0$ est congruente à une matrice $\mathcal{A}$ de la forme souhaitée, les φ_j étant encore quelconques. Il reste à démontrer qu'on peut réduire la matrice $\mathcal{A}_1 = \mathfrak{T}_1\mathcal{A}\ \mathfrak{T}_1^*$ à une matrice, où les φ_j ont la forme annoncée dans ce théorème. $\mathfrak{T}_1$ est la matrice de l'isomorphisme : $\mathfrak{M} \longrightarrow T_1\mathfrak{M}$.

<u>1er pas</u>. - Il existe une matrice $\mathcal{A}_2$ d'isomorphie de $(T_1\mathfrak{M})^*$ sur $T_1\mathfrak{M}$, <u>où tous les</u> $\delta_j = \frac{\varphi_j}{\pi}$ <u>sont rationnels</u> $(0 \leqslant \delta_j < 2)$.

Ou bien tous les δ_j de $\mathcal{A}_1$ ont déjà cette propriété et on n'a rien à démontrer, ou bien ce n'est pas vrai. Supposons donc, dans le dernier cas, que les δ_j soient rationnels pour $j < j_0$ et irrationnel pour $j = j_0$. Alors $\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1^*)^{-1} = (\mathcal{A}_1)^2$ et pour cela $(\mathcal{A}_1)^{2\nu}$ (ν = entier) font partie du groupe G_1 des matrices des automorphismes de $T_1\mathfrak{M}$, à savoir un sous-groupe cyclique G_1' de G_1. G_1' induit le groupe cyclique $\{2\varphi_j\nu\}$ mod 2π ou $\{\nu\,\delta_j\}$ mod 1 dans les sous-matrices $\square_j$ de ses matrices. En appliquant le lemme 3 pour les nombres δ_{j_0} et 1 qui sont linéairement indépendants sur le corps des rationnels et en remarquant que G_1 est compact, on trouve dans l'adhérence de G_1' dans G_1 une matrice $\mathfrak{G}_1$, dont la sous-matrice $\square_{j_0}$ est la matrice d'une rotation d'angle φ_{j_0}. Puisque $\delta_j = \frac{s_j}{t_j}$ (s_j, t_j entiers) d'après l'hypothèse sur les $j < j_0$, les groupes cycliques $\{\nu \delta_j\}$ mod 1 sont tous d'ordre fini et donc compacts. Pour cette raison $\mathfrak{G}_1$ contient comme sous-matrice $\square_{j_0}$ pour $j < j_0$ la matrice de rotation d'angle $\Psi_j = \varepsilon_j \pi$, où ε_j est un nombre rationnel de même dénominateur t_j que δ_j. Alors $(\mathfrak{G}_1)^{-1} \mathcal{A}_1$ est matrice d'un isomorphisme de $(T_1 \mathfrak{M})^*$ sur $T_1\mathfrak{M}$ de la forme de $\mathcal{A}_1$ avec les nombres correspondants δ_j' qui sont sûrement rationnels pour $j \leq j_0$ $(0 \leq \delta_j' < 2)$; car $\delta_j' = \delta_j - \varepsilon_j \pmod 2$ et $\delta_{j_0}' = 0$. En continuant par récurrence par rapport à j, la proposition du premier pas est vérifiée.

<u>2e pas</u>. - Il existe une matrice ~~avec~~ $\mathcal{A}_3$ d'isomorphie de $(T_1\mathfrak{M})^*$ sur $T_1\mathfrak{M}$, où l'on a : $\frac{\varphi_j}{\pi} = \delta_j = 0$ <u>ou</u> $= \frac{\ell_j}{2^{\lambda_j}}$, ℓ_j <u>et</u> λ_j <u>entiers</u>, ℓ_j <u>impair et</u> $0 < \ell_j < 2^{\lambda_j+1}$.

D'après le résultat du premier pas nous pouvons supposer que les δ_j de $\mathcal{A}_2$ sont de la forme $\delta_j = \frac{s_j}{t_j}$ où s_j, t_j sont des entiers non-négatifs, premiers entre eux ; avec $t_j = 2^{\lambda_j} u_j$, λ_j, u_j entiers, u_j = impair $(j = 1, 2, \dots, m)$. Alors $u = \prod_{j=1}^{m} u_j = 2v + 1$ et v = entier. Comme nous avons vu déjà une fois, $(\mathcal{A}_2)^{2v}$ est la matrice d'un automorphisme de $T_1\mathfrak{M}$; pour cela $\mathcal{A}_3 = (\mathcal{A}_2)^{2v+1} = (\mathcal{A}_2)^u$ est la matrice d'un isomorphisme de $(T_1\mathfrak{M})^*$ sur $T_1\mathfrak{M}$. Les angles φ_j de la matrice $\mathcal{A}_3$ ainsi définie satisfont l'équation $\frac{\varphi_j}{\pi} \equiv \frac{\frac{u}{u_j} s_j}{2^{\lambda_j}} \pmod 2$. De cette relation on conclut dans le cas où $\lambda_j = 0$: $\frac{\varphi_j}{\pi} = 0$ ou 1, et dans le cas où $\lambda_j > 0$: $\frac{\varphi_j}{\pi} = \frac{\ell_j}{2^{\lambda_j}}$, où ℓ_j est impair et $0 < \ell_j < 2^{\lambda_j+1}$ (puisque $\frac{u}{u_j} s_j$ est impair dans ce cas). Ainsi la proposition du deuxième pas est démontrée.

<u>3e pas. - $\mathcal{A}_3$ est congruente à une matrice $\mathcal{A}_4$ de la même forme dont les δ_j satisfont aux conditions du théorème 2 .</u>

Nous montrerons d'abord que $\mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_3'$, où $0 < \ell_j' \leq 2^{\lambda_j'}$ pour tous les j , pour lesquels $\delta_j' \neq 0$. Si par exemple $2^{\lambda_j} < \ell_j < 2^{\lambda_j+1}$ pour un j fixé, on remplace $\mathcal{A}_3$ par $\mathcal{A}_3'^{(j)} = \mathfrak{S}_j^* \mathcal{A}_3 \mathfrak{S}_j$ avec

$$\mathfrak{S}_j = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & & \square_j & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $\square_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'angle φ_j' de $\mathcal{A}_3'^{(j)}$ pour le j considéré est égal à $2\pi - \varphi_j$ (voir la démonstration du lemme 1), c'est-à-dire $\ell_j' = 2^{\lambda_j+1} - \ell_j$ et $\ell_j' < 2^{\lambda_i}$. En réalisant cette transformation pour tous les j , où elle est nécessaire, on obtient $\mathcal{A}_3'$. Enfin on peut éviter les cas $\delta_j' = 0$ ou $\ell_j' = 2^{\lambda_j'}$, c'est-à-dire $\square_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\square_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, si l'on modifie l'ordre des lignes et des colonnes de $\mathcal{A}_3'$ pour amener ces $\square_j$ particulières dans la suite des éléments diagonaux + 1 ou - 1 ; cela revient à remplacer $\mathcal{A}_3'$ par une matrice congruente. Naturellement cela effectue une diminution du nombre des indices j ! De même on peut ordonner les angles de la matrice d'après la grandeur.

Maintenant $\mathcal{A}_4 = \mathfrak{S}^* \mathcal{A}_3 \mathfrak{S}$; et $\mathcal{A}_3$ correspond à un isomorphisme de $(T_1 \mathfrak{M})^*$ sur $T_1 \mathfrak{M}$. Alors, selon la proposition 3 , $\mathfrak{T}_1^{-1} \mathcal{A}_3 (\mathfrak{T}_1^{-1}) = \mathfrak{T} \mathcal{A}_4 \mathfrak{T}^*$ est une matrice d'isomorphie de $\mathfrak{M}^*$ sur $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}^{-1} (\mathfrak{T}_1^{-1})^*$ n'est pas singulière.

C.Q.F.D.

Le théorème 2 suggère la question de savoir si la matrice "canonique" $\mathfrak{T} \mathcal{A}_4 \mathfrak{T}^*$ de ce théorème est uniquement déterminée par l'espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}_1$ à n dimensions sous les conditions annoncées. Ce problème est très difficile ; nous ne répondrons à la question posée que dans les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Une deuxième question est la suivante : est-ce qu'il existe des espaces de Minkowski autoadjoints et non-triviaux qui possèdent comme matrice d'isomorphie de $\mathfrak{M}_n^*$ sur $\mathfrak{M}_n$ n'importe quelle matrice de la forme du théorème 2 ? Une réponse simple pour cela est donnée par le

THÉORÈME 3. - Chacune des matrices du théorème précédent est réalisée comme une matrice des isomorphismes possibles de $(\mathfrak{M})^*$ sur $\mathfrak{M}$ dans l'espace de Minkowski autoadjoint :

$$\mathfrak{M} = T[(\underbrace{\mathfrak{M}_1^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{M}_1^{(1)}}_{\ell\text{-fois}}) \times (\mathfrak{M}_2^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{M}_2^{(m)}) \times (\underbrace{\mathfrak{M}_1^{(-1)} \times \dots \times \mathfrak{M}_1^{(-1)}}_{(n-\ell-2m)\text{-fois}})]$$

où

a. $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ est un espace de Minkowski de dimension 1 avec $y = (\eta_1)$ et $\|y\| = |\eta_1|$;

b. $\mathfrak{M}_2^{(j)}$ est un espace de Minkowski de dimension 2 , dans lequel la courbe $\|y\| = 1$ est un polygone régulier du plan (η_1 , η_2) à 2^{λ_j} sommets de diamètre $2\rho_j = 2(\cos \frac{\pi}{2^{\lambda_j}})^{-1/2}$, si $\lambda_j > 1$, ou à 6 sommets de diamètre $2(\cos \frac{\pi}{6})^{-1/2}$, si $\lambda_j = 1$; dont le centre est $(0 , 0)$;

c. $\mathfrak{M}_1^{(-1)}$ est un espace de Minkowski de dimension 1 avec $y = (\eta_1)$ et $\|y\| = |\eta_1|\rho^{-\text{sign}\,\eta_1}$ (ρ = réel et ≥ 1 !)

d. T est l'application correspondant à la matrice $\mathfrak{T}$ du théorème précédent.

Avant la démonstration du théorème 3 nous montrons d'abord :

LEMME 4. - Si $\mathfrak{M}_n$ est un espace de Minkowski autoadjoint, les hypersurfaces $\|x\| = 1$ et $\|f\| = 1$ $(x \in \mathfrak{M}_n , \; f \in \mathfrak{M}_n^*)$ sont polaires entre elles par rapport à la sphère d'unité $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 = 1$.

DÉMONSTRATION. - Soit f un élément quelconque de la norme 1 de $\mathfrak{M}_n$. D'après la définition 11 (a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = 1$ est un hyperplan d'appui de l'hypersurface $\|x\| = 1$. Mais f est représenté par le point $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$

qui est le pôle de l'hyperplan $f(x) = 1$ par rapport à la sphère $\sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^2 = 1$; c'est-à-dire $\|f\| = 1$ est l'hypersurface polaire de l'hypersurface $\|x\| = 1$ par rapport à cette sphère.

DÉMONSTRATION du théorème 3.- D'après la proposition 5 , il suffit de montrer que $\mathfrak{M}_1^{(1)}$, $\mathfrak{M}_2^{(j)}$ et $\mathfrak{M}_1^{(-1)}$ sont des espaces autoadjoints qui admettent (1) et $\begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$ et (-1) comme matrices d'un isomorphisme des espaces duals sur eux, le reste de la proposition du théorème 3 étant une conséquence immédiate de la proposition 3 . Or $\mathfrak{M}_1^{(1)*}$ et $\mathfrak{M}_1^{(-1)*}$ sont des espaces avec $\|\beta_1\| = |\beta_1|$ et $\|\beta_1\| = |\beta_1|\rho^{\operatorname{sign}\beta_1}$, et la courbe $\|f\| = 1$ de $\mathfrak{M}_2^{(j)*}$ est égale au polygone qui résulte d'une rotation du polygone $\|x\| = 1$ de $\mathfrak{M}_2^{(j)}$ d'angle $-\varphi_j$ autour de son centre 0 (lemme 4). Donc il est clair que les transformations des matrices annoncées appliquent ces espaces duals dans $\mathfrak{M}_1^{(1)}$, $\mathfrak{M}_1^{(-1)}$ et $\mathfrak{M}_2^{(j)}$ d'une manière isomorphe.

C.Q.F.D.

REMARQUES. -

1° Naturellement il y a aussi d'autres exemples d'espaces de Minkowski autoadjoints que ceux du théorème 3 . Ainsi, soit $\mathfrak{M}_n$, l'espace de Minkowski où l'ensemble $\|x\| \leq 1$ est un simplexe de diamètre $\sqrt{2n+2}$ et de centre de gravité 0 . $\mathfrak{M}_n$ est autoadjoint avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

et est différent de $\underbrace{\mathfrak{M}_1^{(-1)} \times \cdots \times \mathfrak{M}_1^{(-1)}}_{n\text{-fois}}$ qui admet la même matrice $\mathcal{A}$.

2° Si $\mathfrak{M}$ est autoadjoint et symétrique, le théorème 2 devient trivial et $m = 0$. Alors l'espace produit du théorème 3 est aussi symétrique (voir proposition 1). L'espace de la remarque 1 est symétrique et différent de cet espace de produit.

3° L'espace produit du théorème 3 est toujours un espace normé ordinaire, si $n - \ell - 2m = 0$, car dans ce cas tous ses facteurs sont des espaces normés ordinaires (définition 11). Dans le cas $n - \ell - 2m > 0$ cela est vrai si et seulement si $\rho = 1$. Si $m = 0$, l'espace produit a une norme ordinaire seulement dans le cas $\rho = 1$ et il est alors euclidien. La question se pose alors : existe-t-il des espaces symétriques de norme ordinaire qui ne sont pas euclidiens ? On y répondra dans le chapitre suivant.

4. Sur la caractérisation des espaces euclidiens parmi les espaces de Minkowski autoadjoints.

DÉFINITION. -

17° Un espace de Minkowski est appelé euclidien, s'il est isomorphe à l'espace euclidien ordinaire, où $\|(\xi_1, \ldots, \xi_n)\| = \sqrt{\sum_{i=n}^{n} (\xi_i)^2}$.

Une caractérisation assez triviale des espaces euclidiens est la suivante :

PROPOSITION 6. - Un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ est euclidien, si et seulement s'il admet une matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{ik})$ d'isomorphie de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ qui est définie positive, c'est-à-dire qui est symétrique et dont la forme quadratique $\sum \alpha_{ik} \xi_i \xi_k$ est définie positive.

Car si $\mathcal{A}$ est définie positive, on a $\mathcal{A} = \mathfrak{T} \mathfrak{E} \mathfrak{T}^*$, où $\mathfrak{T}$ est une matrice non-singulière et où $\mathfrak{E}$ est la matrice d'unité. L'application de la proposition 3 montre qu'on peut supposer $\mathcal{A} = \mathfrak{E}$ sans perte de généralité. D'après le lemme 4 les hypersurfaces $\|x\| = 1$ et $\|f\| = 1$ sont alors identiques. Considérons un point x_0 avec $\|x_0\| = 1$, dont la distance euclidienne au point 0 est maximum. Il possède un hyperplan d'appui $f_0(x) = 1$ avec $\|f_0\| = 1$ qui est orthogonal au rayon $\overline{0\, x_0}$ au sens ordinaire, c'est-à-dire le pôle f_0 de cet hyperplan est situé sur la demi-droite passant par 0 et x_0. Mais à cause de l'identité des hypersurfaces de norme 1 on a $x_0 = f_0$: donc l'hyperplan passe par son pôle qui est situé sur la sphère d'unité euclidienne. De même il est évident que non seulement le point de distance maximum, mais aussi le point de distance minimum de l'hypersurface $\|x\| = 1$ est sur la sphère d'unité, d'où l'on conclut que $\|x\| = 1$ et cette sphère sont identiques, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}$ est euclidien.

Si l'on suppose inversement que $\mathfrak{M}$ est euclidien, la proposition 3 montre l'existence d'une matrice $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{T}^*$ qui est donc définie positive.

COROLLAIRE. - Un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ de norme ordinaire est euclidien si et seulement s'il admet une matrice $\mathfrak{A}$ définie positive ou définie négative.

(Puisque la transformation de $-\mathfrak{E}$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}$). Selon la proposition 6 un espace autoadjoint symétrique, dont le produit intérieur $\langle x , x \rangle$ est défini positif, est euclidien et $\langle x , x\rangle = \|x\|^2$ (définition 12).

REMARQUE. - Quand l'espace autoadjoint $\mathfrak{M}_n$ n'est pas euclidien, on a $\ell < n$ pour la matrice du théorème 2 , et l'espace produit du théorème 3 n'est pas euclidien. De même, quand $\mathfrak{M}_n$ est autoadjoint, de norme ordinaire et n'est pas euclidien, sa matrice canonique peut être réalisée dans un espace produit de norme ordinaire, qui également n'est pas euclidien. C'est évident si $m \neq 0$, et dans le cas $m = 0$, on choisit

$$\mathfrak{T}[(\underbrace{\mathfrak{M}_1^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{M}_1^{(1)}}_{(\ell-1)\text{-fois}}) \times \mathfrak{M}_2 \times (\underbrace{\mathfrak{M}_1^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{M}_1^{(1)}}_{(n-\ell-1)\text{-fois}})]$$

pour espace produit, où $\mathfrak{M}_2$ est un espace à 2 dimensions, dont la courbe $\|y\| = 1$ est un carré de diamètre $2^4\sqrt{2}$ de centre 0 , situé dans le plan (η_1 , η_2) , tel que la symétrie d'axe η_1 (matrice : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$!) l'amène dans le carré polaire. (Alors sûrement $\ell \geqslant 1$ et $n - \ell \geqslant 1$ à cause du corollaire). Donc il existe des espaces de Minkowski autoadjoints symétriques de norme ordinaire qui ne sont pas euclidiens.

Un autre critère algèbrique suffisant, pour qu'un espace autoadjoint soit euclidien, est le suivant :

THÉORÈME 4. - Un espace de Minkowski autoadjoint est euclidien, si sa matrice $\mathfrak{A}$ a les propriétés suivantes :

a. $\frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*)$ est définie positive et

b. les invariants $\delta_j = \frac{\varphi_j}{\pi}$ (par rapport à congruence, à cause de $\frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*) =$ définie positive, les φ_j mêmes sont invariants d'après b.) de $\mathfrak{A}$ et 1 sont linéairement indépendantes sur le corps des rationnels.

DÉMONSTRATION. - D'après la proposition 3 , théorème 1 , lemme 1 et lemme 2 , nous pouvons faire l'hypothèse

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & \Box_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \Box_m & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

sans perte de généralité, où $\Box_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$ et $0 < \varphi_j < \frac{\pi}{2}$ $(j = 1 , \ldots , m)$. Alors $\mathfrak{A}^2$ et $\mathfrak{A}^{2\nu}$ (ν = entier) sont des matrices d'automorphie de l'espace $\mathfrak{M}$, et comme dans la démonstration du théorème 2 , lemme 3, on voit aussi que $\mathfrak{A}$ est la matrice d'un automorphisme de $\mathfrak{M}$. Donc $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}$ est la matrice d'un isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$, et donc $\mathfrak{M}$ est euclidien selon la proposition 6 .

C.Q.F.D.

Nous notons que le critère du théorème 4 ne dépend que de la matrice $\mathfrak{A}$ donnée. En outre on peut démontrer qu'il suffit de supposer la condition a. et b'. : $\dim(\delta_1 , \ldots , \delta_m , 1) = m$ et $\dim(\delta_1 , \ldots , \delta_m) = m - 1$, où $(\delta_1 , \ldots , \delta_m , 1)$ ou , $(\delta_1 , \ldots , \delta_m)$ sont les modules de nombres réels sur le corps des rationnels engendrées par $\delta_1 , \ldots , \delta_m , 1$ ou $\delta_1 , \ldots , \delta_m$, si l'on utilise une amélioration du lemme 3 .

Un critère géométrique suffisant pour les espaces de norme ordinaire est :

THÉORÈME 5. - Si $\mathfrak{M}_n$ est un espace de Minkowski autoadjoint de norme ordinaire, isomorphe à un espace qui admet comme automorphismes tous les mouvements euclidiens propres laissant les points d'une droite passant par 0 fixes, alors $\mathfrak{M}_n$ est euclidien.

DÉMONSTRATION. - Puisque le groupe G des matrices de tous les automorphismes de $\mathfrak{M}_n$ est compact, on sait bien qu'il existe une matrice non-singulière $\mathfrak{T}$ telle que $\mathfrak{T} G \mathfrak{T}^{-1} = H$ soit un sous-groupe du groupe de toutes les matrices orthogonales de n^2 éléments. H est le groupe des automorphismes de l'espace $T\mathfrak{M}_n$, où T est l'application correspondante à $\mathfrak{T}$. Pour cela ce n'est pas une restriction de la généralité de supposer que déjà le groupe G de $\mathfrak{M}_n$ est un sous-groupe du groupe orthogonal O_n. D'après l'hypothèse les automorphismes de G contiennent un sous-groupe de tous les mouvements euclidiens propres laissant fixes les points d'une droite d contenant O le même sous-groupe étant isomorphe au groupe orthogonal propre $(SO)_{n-1}$. L'application du théorème de Brouwer sur l'invariance du domaine montre que ce sous-groupe est identique au groupe de tous les mouvements propres laissant fixes les points de d, dont nous désignerons le groupe des matrices par $(SO)^{(d)}_{n-1}$. Donc $G \supseteq (SO)^{(d)}_{n-1}$; de même le groupe G^* des matrices des automorphismes de $\mathfrak{M}^*_n$ contient $(SO)^{(d)}_{n-1}$, parce que chaque mouvement euclidien amène le couple d'un point et d'un hyperplan polaire (par rapport à la sphère unité) dans un couple polaire (lemme 4). Si $\mathfrak{A}$ est la matrice de l'application A de $\mathfrak{M}^*_n$ sur $\mathfrak{M}_n$, alors on a : $G \supseteq \mathfrak{A} G^* \mathfrak{A}^{-1} \supseteq \mathfrak{A} (SO)^{(d)}_{n-1} \mathfrak{A}^{-1}$. Cela donne avec $G \subseteq O_n$:

$$\mathfrak{A} (SO)^{(d)}_{n-1} \mathfrak{A}^{-1} \subseteq (SO)^{(Ad)}_{n-1} .$$

De la méthode déjà appliquée il résulte $\mathfrak{A} (SO)^{(d)}_{n-1} \mathfrak{A}^{-1} = (SO)^{(Ad)}_{n-1}$. Maintenant il faut distinguer deux cas :

1° $Ad \neq d$ et

2° $Ad = d$.

Supposons d'abord que la droite Ad (contenant O) est différente de la droite d. Alors G contient les deux groupes $(SO)^{(d)}_{n-1}$ et $(SO)^{(Ad)}_{n-1}$ qui engendrent ensemble un groupe des matrices d'automorphismes de $\mathfrak{M}_n$, transitives sur la sphère unité ; ce que l'on démontre également dans le cas $n = 3$. La conséquence de cette transitivité est le fait que $\mathfrak{M}_n$ est nécessairement un espace euclidien, et la démonstration est terminée.

Soit alors $Ad = d$. Nous affirmons que l'hypersurface $\|x\| = 1$ de $\mathfrak{M}_n$ possède des hyperplans tangents aux deux points x_0 et $-x_0$ d'intersection de $\|x\| = 1$ et de d, qui sont orthogonaux à la droite d. La démonstration se fait en conduisant le contraire à l'absurde. S'il existait une demi-droite tangente à $\|x\| = 1$, et issue de x_0, formant un angle $\neq \frac{\pi}{2}$ avec d, l'hypersurface possèderait un hyper-cône pointu de rotation tangent en x_0 à cause de sa convexité et de sa symétrie de rotation. La même chose serait valable au point $-x_0$, parce que $\mathfrak{M}_n$ est de norme ordinaire par hypothèse. Mais alors l'hypersurface $\|f\| = 1$ contiendrait deux faces planes passant par les deux points de son intersection avec d, à savoir f_0 et $-f_0$, chose qui est impossible, car A est une application affine et $Ad = d$, c'est-à-dire $A(f_0) = \pm x_0$.

La même démonstration montre que $\|f\| = 1$ a deux hyperplans tangents à f_0 et à $-f_0$, orthogonaux à d. La transformation A les amène dans les hyperplans parallèles qui sont les hyperplans tangents à x_0 et $-x_0$ ou à $-x_0$ et x_0. A étant une affinité centrale, on a $A(E) = E$ où E est l'hyperplan orthogonal à d passant par 0. Alors l'image de l'intersection de E et $\|f\| = 1$ est l'intersection de E et $\|x\|=1$, et ces deux intersections sont des sphères de dimension $n-2$.

De ce fait et de $Ad = d$ et $AE = E$ il résulte que la matrice $\mathcal{A}$ de A est de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \beta\,\mathcal{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta \neq 0$; sign α = sign β, et où $\mathcal{A}_{n-1}$ est un élément du groupe O_{n-1} des matrices orthogonale à $(n-1)^2$ éléments, si l'on suppose que d est identique à l'axe de δ_1. Mais l'espace $\mathfrak{M}_n$ admet un automorphisme de matrice

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

à cause de sa symétrie de rotation car si $\mathfrak{M}_n$ admet les automorphismes correspondant aux matrices de $(SO)^{(d)}_{n-1}$, il en admet aussi ceux qui correspondent à $(O)^{(d)}_{n-1}$. Alors

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta \end{pmatrix}$$

est la matrice d'un autre isomorphisme de $\mathfrak{M}_n^*$ et $\mathfrak{M}_n$, qui est définie positive ou définie négative. D'après le corollaire de la proposition 6, $\mathfrak{M}_n$ est vraiment euclidien, et notre démonstration est achevée.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - Si l'espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}_n$ de norme ordinaire admet une infinité d'isomorphismes A de $\mathfrak{M}_n^*$ et $\mathfrak{M}_n$ et si $n < 4$, alors $\mathfrak{M}_n$ est euclidien.

C'est trivial pour $n = 1$, et dans le cas $n = 2$ le groupe des automorphismes de l'espace est infini et compact, et pour cela $G = \mathfrak{T}^{-1}\,O_2\,\mathfrak{T}$, c'est-à-dire $\mathfrak{M}_2$ est euclidien. Si $n = 3$, $\mathfrak{T}\,G\,\mathfrak{T}^{-1}$ est aussi un sous-groupe compact et infini de O_3. Alors seulement le cas suivant est possible :
$\mathfrak{T}\,G\,\mathfrak{T}^{-1} = H \supset (SO)_2^{(d)}$, où d est une droite convenable, et selon le théorème 5, $\mathfrak{M}_3$ est euclidien.

REMARQUES. -

1° La proposition du théorème 5 n'est plus valable, si $\mathfrak{M}_n$ est de norme généralisée. Contre exemple : $\|x\| \leq 1$ est la figure engendrée par la rotation d'un triangle régulier de dimension 2 de centre de gravité 0 et de diamètre $2\sqrt{2}$ autour d'un axe passant par un sommet et par 0.

2° Le corollaire du théorème 5 n'est plus valable, si $n \geqslant 4$. Contre exemple : $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{R}_{n-2} \times \mathfrak{M}_2$, où $\mathfrak{R}_{n-2}$ est l'espace euclidien ordinaire de dim $n - 2$ et où $\mathfrak{M}_2$ est l'exemple indiqué d'un espace de Minkowski autoadjoint symétrique de norme ordinaire, qui n'est pas euclidien.

Mais il existe aussi des espaces autoadjoints de norme ordinaire avec plus de symétries de rotation que $\mathfrak{R}_{n-2} \times \mathfrak{M}_2$. Exemple : l'espace $\mathfrak{M}$ avec

$$\|x\| = \|\xi_1, \ldots, \xi_{n'}, \xi_{n'+1}, \ldots, \xi_n\| = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n'}(\xi_i)^2\Big)^{1/2}, \Big(\sum_{i=n'+1}^{n}(\xi_i)^2\Big)^{1/2}\Big\|,$$

où $\|(\eta_1, \eta_2)\|$ est la norme de l'espace de Minkowski autoadjoint à deux dimensions $\mathfrak{D}_2$ dans le plan (η_1, η_2), dont la courbe $\|y\| = 1$ est un hexagone régulier du centre 0 et du diamètre $2(\cos\frac{\pi}{6})^{-1/2}$ avec un sommet situé sur l'axe $\eta_1 (2n' = n \geqslant 4)$. $\mathfrak{P}_2$ est l'intersection de $\mathfrak{M}$ et du plan $\xi_2 = \dots = \xi_{n'} = 0$, $\xi_{n'+2} = \dots = \xi_n = 0$; c'est-à-dire $\mathfrak{M}$ n'est pas euclidien, et en outre il est évident que $\mathfrak{M}$ admet comme automorphismes toutes les rotations euclidiennes autour du sous-espace $\xi_1 = \dots = \xi_{n'} = 0$ ou du sous-espace $\xi_{n'+1} = \dots = \xi_n = 0$. On voit que l'application : $\xi_i = \alpha_{i+n'}$, $\xi_{i+n'} = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n')$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ sur $\mathfrak{M}$; donc $\mathfrak{M}$ est symétrique.

5. Les espaces de Minkowski de dimension 2 .

Tout d'abord mentionnons la

PROPOSITION 7. - Chaque espace de Minkowski de dimension 1 est autoadjoint, et chaque espace de Minkowski de dimension 1 de norme ordinaire est euclidien.

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathfrak{M}_1$ un espace de Minkowski, où $\|\gamma\| = 1$ $(\gamma > 0)$ et $\|\delta\| = 1$ $(\delta < 0)$. D'après le lemme 4 $\mathfrak{M}_1^*$ est un espace, où $\|\frac{1}{\gamma}\| = 1$ et $\|\frac{1}{\delta}\| = 1$. Alors l'application A : $\xi = (\gamma^{\delta})\alpha$ avec $\mathfrak{A} = (\gamma^{\delta})$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_1^*$ et $\mathfrak{M}_1$. La deuxième partie de la proposition 7 est triviale.

A partir de maintenant nous supposons toujours que la dimension de l'espace de Minkowski considéré est 2 . Alors il est commode de distinguer deux cas d'espaces autoadjoints selon

DÉFINITION. -

18° L'espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ est défini positif ou négatif, selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas une matrice $\mathfrak{A}$ d'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$, dont le déterminant est positif c'est-à-dire $\mathfrak{A}$ ne change pas une orientation convenablement introduite dans $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$.

Maintenant le théorème 2 peut être amélioré pour les espaces de dimension 2 de la manière suivante :

THÉORÈME 6. -

a. L'ensemble de toutes les matrices d'isomorphie de $\mathfrak{R}^*$ et $\mathfrak{R}$ d'un espace euclidien $\mathfrak{R}$ contient $\mathfrak{T} \mathfrak{E} \mathfrak{T}^*$. Cette proposition est aussi valable dans le cas de dimension n .

b. Un espace de Minkowski autoadjoint positif $\mathfrak{M}$, qui n'est pas euclidien, admet toujours une matrice d'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ de la forme $\mathfrak{T}\,\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^\lambda}}\,\mathfrak{T}^*$, où $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ est la matrice de la rotation avec l'angle $\frac{\pi}{2^\lambda}$ (λ = entier et $\geqslant 0$).

c. Un espace de Minkowski autoadjoint négatif admet toujours une matrice d'isomorphie de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ de la forme $\mathfrak{T}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{T}^*$, où $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie par rapport à l'axe ξ_1.

(Dans tous les cas $\mathfrak{T}$ est une matrice non-singulière).

DÉMONSTRATION. - La proposition a. est une conséquence immédiate de la proposition 3. Lorsque $\mathfrak{M}$ est autoadjoint positif et n'est pas euclidien, alors à cause de la proposition 6 et du théorème 2, $\mathfrak{M}$ a une matrice $\mathfrak{T}(-\mathfrak{E})\mathfrak{T}^*$ ou $\mathfrak{T}\,\mathfrak{D}_{\frac{\mu}{2^\lambda}\cdot\pi}\,\mathfrak{T}^*$ (λ, μ = entiers ; μ = impair ; $0 < \mu < 2^\lambda$) ou $\mathfrak{T}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{T}^*$ ($\mathfrak{T}$ = non-singulière). Mais selon l'hypothèse sur $\mathfrak{M}$ il existe une matrice $\mathfrak{A}$ de déterminant positif, et si l'on commence par cette $\mathfrak{A}$ dans la démonstration du théorème 2, on obtient une matrice de déterminant positif, c'est-à-dire $\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{T}(-\mathfrak{E})\mathfrak{T}^*$ ou $\mathfrak{T}\,\mathfrak{D}_{\frac{\mu}{2^\lambda}\pi}\,\mathfrak{T}^*$. Dans le dernier cas λ est > 0, et μ et $2^{\lambda+1}$ sont premiers entre eux. Puisque les classes modulo $2^{\lambda+1}$ des nombres premiers avec $2^{\lambda+1}$ forment un groupe par rapport à la multiplication, il existe un entier impair $\varkappa$, tel qu'on ait $\mu\varkappa = 1 \pmod{2^{\lambda+1}}$. Si T est l'application de $\mathfrak{T}$, l'espace $T^{-1}\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{D}_{\frac{\mu}{2^\lambda}\pi}$ et aussi $\left(\mathfrak{D}_{\frac{\mu}{2^{\lambda+1}}\cdot 2\pi}\right)^{\varkappa} = \mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ comme matrices d'isomorphisme de son espace dual sur l'espace lui-même (voir démonstration du théorème 2). $\mathfrak{M}$ admet de même $\mathfrak{T}\,\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^\lambda}}\,\mathfrak{T}^*$ ($\lambda \geqslant 0$) dans chaque cas. Si $\mathfrak{M}$ est négatif, chacune des matrices $\mathfrak{A}$ associées a un déterminant négatif, c'est-à-dire $\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{T}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{T}^*$ comme une des matrices associées.

C.Q.F.D.

Ce théorème ne suffit pas pour l'énumération de toutes les matrices $\mathfrak{A}$ d'un espace de Minkowski autoadjoint. Pour atteindre ce but nous avons besoin du

LEMME 5. - Lorsque $\mathfrak{M}$ est un espace de Minkowski autoadjoint et $\mathfrak{M}$ n'est pas euclidien, alors $\mathfrak{M}$ est isomorphe à un espace $\mathfrak{N}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $\mathfrak{N}$ admet $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}$ $(\lambda \geqslant 0)$ ou $\mathfrak{F}$ comme matrice d'isomorphisme de $\mathfrak{N}^*$ et $\mathfrak{N}$, selon que $\mathfrak{M}$ est positif ou négatif.

2° Le groupe H des matrices de tous les automorphismes de $\mathfrak{N}$ est un sous-groupe du groupe orthogonal O_2 (de degré 2).

DÉMONSTRATION. -

a. <u>Cas où $\mathfrak{M}$ est positif</u>. - Alors $T^{-1}\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}$ d'après le théorème 6 (T est l'application correspondante à $\mathfrak{C}$). Puisque chaque représentation d'un groupe quelconque par des matrices uniformément bornées est équivalente à une représentation orthogonale (voir [3], théorème 19), on sait bien qu'il existe une application U avec la matrice non-singulière $\mathfrak{A}$, telle que le groupe G des matrices des automorphismes de $UT^{-1}\mathfrak{M}$ soit un sous-groupe du groupe O_2.

Supposons d'abord $\lambda > 0$. Alors $UT^{-1}\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{A}\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}\mathfrak{A}^*$ qui est une matrice normale mais non-symétrique d'après la démonstration du théorème 1. La démonstration du lemme 1 a montré que cette matrice est congruente à la matrice $\beta\mathfrak{D}_\varphi$ $(\beta > 0)$ par rapport à une matrice orthogonale $\mathfrak{O}$; c'est-à-dire $\beta\mathfrak{D}_\varphi = \mathfrak{O}\mathfrak{A}\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}\mathfrak{A}^*\mathfrak{O}^*$. Ici $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, et après le remplacement éventuel de $\mathfrak{O}$ (sans changement de notation) sur une autre matrice orthogonale on peut supposer $0 < \varphi < \pi$, comme nous avons vu déjà plusieurs fois. Soit V l'application de matrice $\frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathfrak{O}$. Alors $\mathfrak{N} = VUT^{-1}\mathfrak{M}$ est un espace autoadjoint admettant $\mathfrak{D}_\varphi$ comme matrice d'isomorphisme de $\mathfrak{N}^*$ et $\mathfrak{N}$ dont le groupe H des matrices d'automorphismes est égal à $\mathfrak{O}G\mathfrak{O}^{-1}$ donc un sous-groupe de O_2. On a $\mathfrak{D}_\varphi \cong \mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}$ et par conséquent $\varphi = \frac{\pi}{2\lambda}$

d'après le lemme 2. Donc $\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}$ et notre proposition est démontrée dans le cas $\lambda > 0$.

Maintenant nous faisons l'hypothèse $\lambda = 0$. Alors il faut distinguer deux cas :

1° L'ordre k' du sous-groupe G' des matrices de déterminant positif de G est plus grand que 2 ; et

2° k' est au plus 2.

Soit d'abord $k' > 2$. Puisque $G' \subseteq (SO)_2$ G' contient l'élément $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}$. Alors $\mathfrak{U}(-\mathfrak{E})\mathfrak{A}^*$ et donc $-\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ sont des matrices $\mathfrak{A}$ de l'espace $UT^{-1}\mathfrak{M}$. Nous choisissons une $\mathfrak{O}$ de $(SO)_2$, telle que $\mathfrak{O}(-\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)\mathfrak{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ sont les valeurs propres de la matrice symétrique $-\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$. Lorsque W est l'application de $\mathfrak{O}$, $WUT^{-1}\mathfrak{M}$ admet

$$\mathfrak{O}(-\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)\mathfrak{O}^* = \mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$ En outre le groupe des matrices d'automorphismes de $WUT^{-1}\mathfrak{M}$ est égal à $H = \mathfrak{O}G\mathfrak{O}^{-1}$; c'est-à-dire $H \leqslant O_2$. Pour cette raison $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est une matrice normale, non-symétrique (démonstration du théorème 1) et, comme auparavant, on voit la validité de la relation

$$\mathfrak{Q}\,\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\mathfrak{Q}^{-1} = \gamma\,\mathfrak{D}_{\psi} \quad (\mathfrak{Q} \in O_2,\ \gamma > 0)$$

où $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \gamma\,\mathfrak{D}_{\chi}$. En comparant les éléments dans la diagonale secondaire de la dernière équation on obtient $\alpha = \beta$ (puisque $k' > 2$). Alors $\mathfrak{N} = VUT^{-1}\mathfrak{M}$ possède les deux propriétés du lemme 5, lorsqu'on prend l'application V de matrice $\frac{1}{\sqrt{-\beta}}\mathfrak{O}$.

Si $k' \leqslant 2$ on peut se limiter au cas $k' = 1$ puisque $k' = 2$ entraîne le fait que $-\mathfrak{E}$ est matrice d'automorphisme de $T^{-1}\mathfrak{M}$ et aussi matrice d'isomorphisme de $(T^{-1}\mathfrak{M})^*$ et $T^{-1}\mathfrak{M}$, chose qui est impossible pour un $\mathfrak{M}$ non-euclidien (proposition 6). Alors ou bien $G = \{\mathfrak{E}\}$ où on peut choisir

évidemment $\mathfrak{M} = T^{-1}\mathfrak{M}$ $(H = \{\mathfrak{E}\})$, ou bien $G = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{Q}\mathfrak{F}\mathfrak{Q}^{-1}\}$, où $H = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}\mathfrak{F}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}\}$ pour $\mathfrak{M} = T^{-1}\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{Q} \in O_2)$. Dans le second cas il ne reste qu'à montrer que $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}\mathfrak{F}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{A}$ est un élément de O_2. Désignons cette matrice par $\mathfrak{K}$. Maintenant $\mathfrak{K}\mathfrak{D}_{\pi} = -\mathfrak{K}$ est matrice d'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ dont le déterminant est négatif. Par conséquent $-\mathfrak{K}$ est congruente à $\mathfrak{K}$ selon le théorème 1 et le lemme 1 ; c'ést-à-dire $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^*$. Donc il existe une $\mathfrak{O} \in O_2$ telle que $\mathfrak{O}\mathfrak{K}\mathfrak{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha > 0,\ \beta < 0)$. Pour cette raison $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est une matrice d'automorphisme de $W\mathfrak{M}$ (W = application de $\mathfrak{O}$). Puisque le groupe de tous les automorphismes de $W\mathfrak{M}$ est compact, on a nécessairement $\alpha = 1$, $\beta = -1$; c'est-à-dire =
$\mathfrak{K} = \mathfrak{O}^{-1}\mathfrak{F}\mathfrak{O} \in O_2$, et la partie a. de la démonstration est achevée.

b. <u>Cas où $\mathfrak{M}$ est négatif</u>. - Comme dans le cas d'un $\mathfrak{M}$ positif on trouve deux applications T et U de matrices $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$, telles que l'espace $T^{-1}\mathfrak{M}$ admet $\mathfrak{F}$ comme matrice d'isomorphisme de $(T^{-1}\mathfrak{M})^*$ et $T^{-1}\mathfrak{M}$ et que le groupe G des matrices d'automorphismes de $UT^{-1}\mathfrak{M}$ soit un sous-groupe de O_2. De plus on a $G = G'$, toutes les $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{M}$ étant de déterminant négatif. Alors nous distinguons encore les deux cas $k' > 2$ et $k' \leq 2$;

<u>Si $k' > 2$</u>, $\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^*$ et $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^*$ sont des matrices $\mathfrak{A}$ de l'espace $UT^{-1}\mathfrak{M}$. Il existe une $\mathfrak{O} \in (SO)_2$ transformant $\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^*$ en forme diagonale : $\mathfrak{O}\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^*\mathfrak{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha > 0,\ \beta < 0)$. Lorsque W est l'application de $\mathfrak{O}$, $WUT^{-1}\mathfrak{M}$ admet comme matrice $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{O}\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^*\mathfrak{O}^* = \mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

qui est donc congruente à $\mathfrak{F}$ et pour cela symétrique. En utilisant $k' > 2$, ce fait entraîne $\alpha = -\beta$. Alors $\mathfrak{M} = VUT^{-1}\mathfrak{M}$ est l'espace vérifiant les conditions du lemme 5, où V est l'application de $\frac{1}{\sqrt{-\beta}}\mathfrak{O}$.

Si <u>$k' \leq 2$</u>, il est évident qu'on peut prendre $T^{-1}\mathfrak{M}$ pour $\mathfrak{M}$.

C.Q.F.D.

Maintenant nous sommes capables de démontrer :

THÉORÈME 7. - <u>Supposons donné un espace de Minkowski autoadjoint $\mathfrak{M}$ de dimension 2 dont le groupe d'automorphismes a l'ordre</u> k <u>et dont lé groupe d'automorphismes de déterminant positif a l'ordre</u> k'. (Il y peut avoir

$k = k' = \infty$). Alors l'ensemble de toutes les matrices d'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ est le suivant :

a. $\mathfrak{T}\, O_2\, \mathfrak{T}^*$, si $\mathfrak{M}$ est euclidien ;

b. $\left\{\mathfrak{T}\,(\mathfrak{F})^{\varepsilon}\,\mathfrak{D}_{(\frac{\mu}{k'} + \frac{1}{2^{\lambda+1}})2\pi}\,\mathfrak{T}^*\right\}$ $(\mu = 0, 1, \dots, k'-1 \; ; \; \varepsilon = 0, \varepsilon_0)$

avec $k' = 2^{\lambda}(2q+1)$ et $\varepsilon_0 = \frac{k}{k'} - 1$ (λ, q = entiers non-négatifs), si $\mathfrak{M}$ est positif mais n'est pas euclidien ; et

c. $\left\{\mathfrak{T}\,\mathfrak{D}_{\frac{\mu}{k}2\pi}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{T}^*\right\}$ $(\mu = 0, 1, \dots, k-1)$, si $\mathfrak{M}$ est négatif ; où $\mathfrak{T}$ est une matrice non-singulière convenablement choisie dans chaque fois.

DÉMONSTRATION. – D'après le lemme 5 il existe un espace $\mathfrak{N} = T^{-1}\mathfrak{M}$, tel que l'ensemble des matrices d'isomorphisme de $\mathfrak{N}^*$ et $\mathfrak{N}$ soit ou bien $H\mathfrak{E}$ ou bien $H\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^{\lambda}}}$ ou bien $H\mathfrak{F}$, lorsque H est le groupe des matrices d'automorphismes de $\mathfrak{N}$. De plus on a $H \subsetneqq O_2$ et $H = \mathfrak{T}^{-1} G \mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}$ est la matrice de T), c'est-à-dire l'ordre de H est égal à k et l'ordre de $H' = \mathfrak{T}^{-1} G' \mathfrak{T}$ est égal à k'. On en déduit dans les trois cas du théorème 7 :

a. $H = O_2$;

b. $H = \left\{ (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{Q}^{-1})^{\varepsilon}\, (\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}})^{\mu} \right\}$ $(\mu = 0, 1, \dots, k'-1 \; ; \; \varepsilon = 0, \varepsilon_0 \; ;$ $\varepsilon_0 + 1 =$ ordre de H/H' ; $\mathfrak{Q} \in (SO)_2)$; et

c. $H = \left\{ (\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k}})^{\mu} \right\}$ $(\mu = 0, 1, \dots, k-1)$. Mais alors selon la proposition 3 notre théorème est déjà démontré (si l'on remplace $\mathfrak{T}\mathfrak{Q}$ par $\mathfrak{T}$ dans le cas b.) sauf la relation $k' = 2^{\lambda}(2q+1)$ (λ et q = entiers non-négatifs) que nous allons établir. Puisque $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^{\lambda}}}$ appartient à l'ensemble des matrices $\mathfrak{A}$ de l'espace $\mathfrak{N}$ dans le cas b., $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{2^{\lambda}}} \in H'$ et pour cela l'ordre 2^{λ} de $\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{2^{\lambda}}}$ est un diviseur de l'ordre k' de H'. Si $\frac{k'}{2^{\lambda}}$ était pair, on aurait $\frac{k'}{2^{\lambda}} = 2\mu_0$ et $(\mathfrak{D}_{\frac{2\pi}{k'}})^{\mu_0} = \mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^{\lambda}}} \in H$, tandis que $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^{\lambda}}}$ est également matrice d'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$, chose qui est impossible pour un espace $\mathfrak{M}$ non-euclidien.

COROLLAIRE

A. Si $\mathfrak{M}^{(1)}$ et $\mathfrak{M}^{(2)}$ sont deux espaces de Minkowski de dimension 2 , autoadjoints, non-euclidiens et isomorphes tels que $\mathfrak{M}^{(i)}$ admette $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda(i)}}$ comme matrice d'isomorphie de $(\mathfrak{M}^{(i)})^*$ et $\mathfrak{M}^{(i)}$ $(i = 1 , 2)$ alors $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ (c'est une conséquence immédiate de la relation $k' = 2^{\lambda}(2q + 1)$).

B. Un espace de Minkowski autoadjoint de dimension 2 est symétrique si et seulement si

a. il est euclidien ou

b. il est positif avec $\varepsilon_0 = 0$, $\lambda = 0$ ou $\varepsilon_0 = 1$ ou

c. il est négatif.

C. Un espace de Minkowski autoadjoint de dimension 2 est de norme ordinaire, si et seulement si

a. il est euclidien ou

b. il est positif avec $\lambda \geqslant 1$ ou

c. il est négatif avec k = pair (car dans ces cas le groupe H contient l'élément $\mathfrak{D}_{\pi}$) .

Le "signe" d'un espace de Minkowski autoadjoint (c'est-à-dire la propriété de l'espace d'être positif ou négatif) et les nombres ε_0 et k forment un système d'invariants indépendants par rapport à un isomorphisme de l'espace qui naturellement n'est pas complet mais qui néanmoins permet une certaine classification des espaces de Minkowski autoadjoints de dimension 2 . Le nombre λ est un invariant dérivé de ce système. Nous remarquons ainsi qu'il existe au plus deux matrices $\mathcal{A}$ de la forme "canonique" $\mathfrak{T}\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}\mathfrak{T}^*$ pour un espace non-euclidien fixé. (Il y a deux possibilités, car par exemple $\mathfrak{T}\mathfrak{D}_{-\frac{\pi}{2\lambda}}\mathfrak{T}^* = (\mathfrak{T}\mathfrak{F})\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2\lambda}}(\mathfrak{T}\mathfrak{F})^*$) tandis que ce n'est pas vrai en général pour une matrice $\mathcal{A}$ de la forme $\mathfrak{T}\mathfrak{F}\mathfrak{T}^*$ (lemme 1 et lemme 2).

Nous allons déterminer explicitement tous les espaces de Minkowski autoadjoints de dimension 2 . Puisque la structure d'un espace de Minkowski est une structure de norme, il suffit d'indiquer les "indicatrices" $\|x\| = 1$ de ces espaces.

Figure 1 ($\mathfrak{M}$ = positif, $\varepsilon_o = 1$, $k = 4$, $\lambda = 1$)

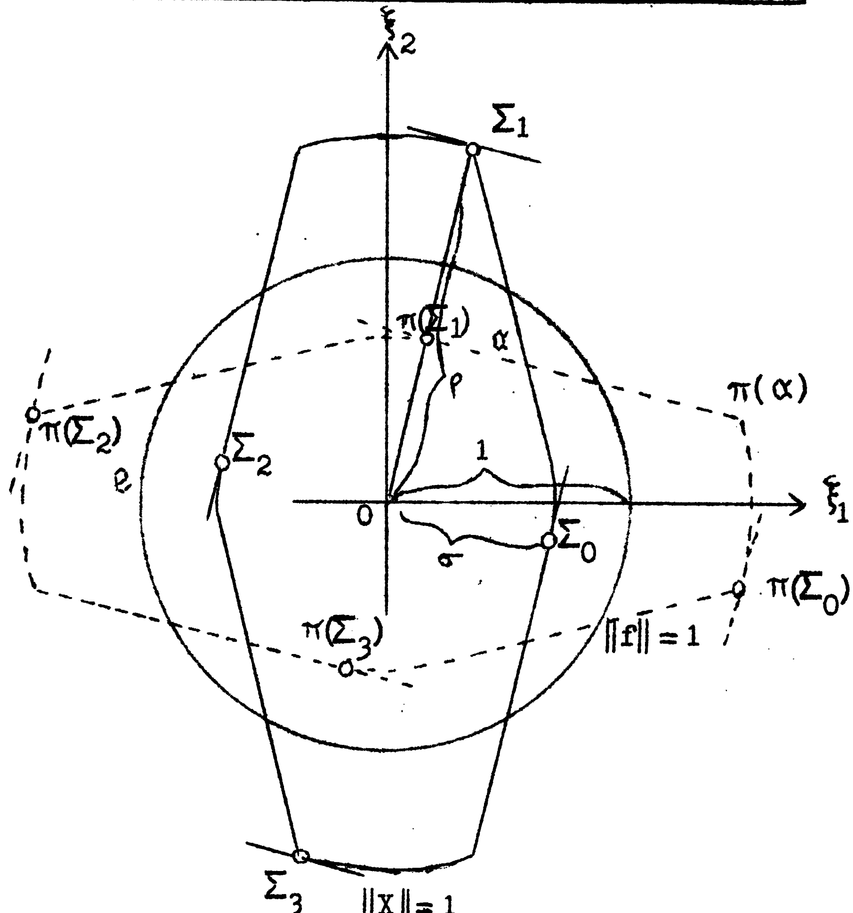
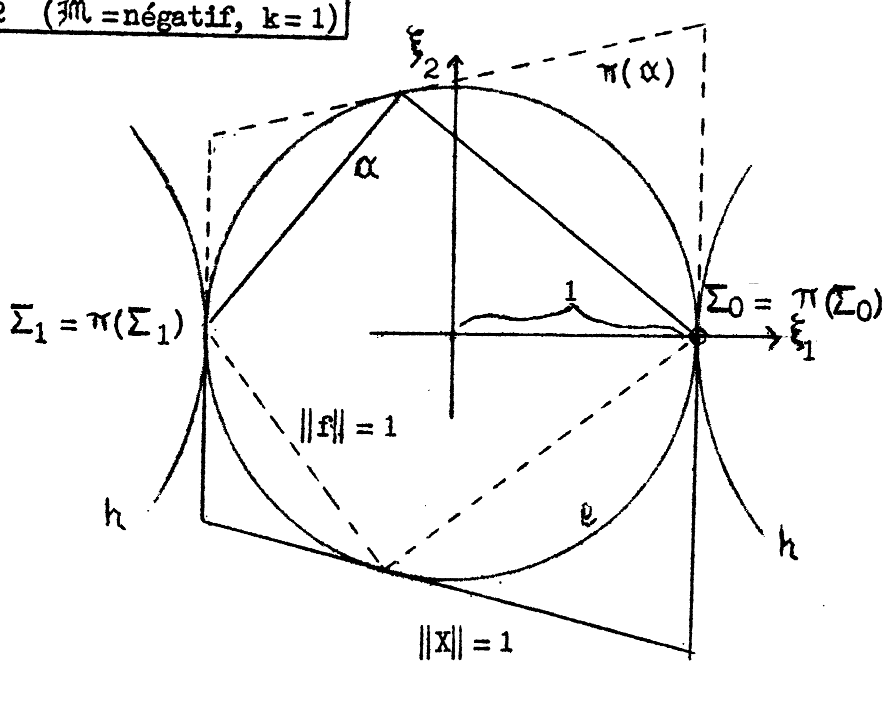


Fig. 2 ($\mathfrak{M}$ = négatif, $k = 1$)



Dans ce but nous considérons les "éléments d'appui" d'une telle indicatrice en définissant : un point x et une droite, représentée par son pôle f par rapport au cercle d'unité $\mathcal{E}$, sont appelés <u>élément d'appui</u> Σ d'une courbe $\mathcal{C}$ du plan (δ_1 , δ_2) , lorsque $x \in \mathcal{C}$, et la droite est une droite d'appui de $\mathcal{C}$ en x (on y suppose que la droite ne passe pas par le point 0). Nous écrivons $\Sigma = [x , f]$ et remarquons que l'ensemble de tous les Σ d'une courbe $\mathcal{C}$ convexe et contenant le point 0 dans son intérieur est homéomorphe à un cercle, si cet ensemble est muni de sa topologie naturelle.

Soit maintenant $\mathfrak{M}$ un espace de Minkowski autoadjoint positif et non-euclidien "de forme normale" à savoir un espace qui satisfait aux conditions du lemme 5 , et soit $\mathcal{C}$ sont indicatrice. Alors $\mathcal{C}$ possède un élément d'appui "minimal" Σ_0 , c'est-à-dire un $\Sigma_0 = [x_0 , f_0]$ dont la distance euclidienne de x_0 et 0 est minimum et égal à $\sigma > 0$. L'image polaire $\pi(\Sigma_0)$ de Σ_0 par rapport à $\mathcal{E}$ est un élement d'appui de l'indicatrice $\mathcal{C}^*$ de $\mathfrak{M}^*$ (lemme 4) et on a $\pi(\Sigma_0) = [f_0 , x_0]$. En outre la droite de Σ_0 peut-être supposée orthogonale au rayon $\overline{ox}_0$ à cause de la minimalité de Σ_0 et pour cela $f_0 = \frac{1}{\sigma^2} x_0$. Si $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ est l'isomorphisme de $\mathfrak{M}^*$ sur $\mathfrak{M}$ de matrice $\mathfrak{D}_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$, $\Sigma_1 = D_{\frac{\pi}{2^\lambda}} \pi(\Sigma_0)$ est un élément d'appui de $\mathcal{C}$, car $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ est une application affine amenant $\mathcal{C}^*$ dans $\mathcal{C}$. Evidemment Σ_1 est un élément d'appui maximal à dsitance $\rho = \frac{1}{\sigma}$ $(\sigma < 1)$. Puisque Σ_0 et Σ_1 sont joints par l'arc convexe $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{C}$, on a la restriction $1 < \rho \leq (\cos \frac{\pi}{2^\lambda})^{-1/2}$ pour ρ , si $\lambda \geq 2$. Nous affirmons alors que toute la courbe $\mathcal{C}$ est complètement déterminée par son arc $\mathfrak{A}$ entre Σ_0 et Σ_1 . En effet l'image polaire $\pi(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ est contenue dans $\mathcal{C}^*$ et pour cette raison $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}} \pi(\mathfrak{A})$ est de même une partie de $\mathcal{C}$, De façon plus générale, les arcs $D_{\frac{2\mu}{2^{\lambda+1}} 2\pi} \mathfrak{A}$ et $D_{\frac{2\mu+1}{2^{\lambda+1}} 2\pi} \pi(\mathfrak{A})$ $(\mu = 0 , 1 , \dots , 2^\lambda - 1)$ sont contenus dans $\mathcal{C}$ et on voit facilement que $\mathcal{C}$ est déjà la réunion de ces arcs ; c'est-à-dire $\mathcal{C}$ est bien déterminée par $\mathfrak{A}$. Mais le fait plus important est celui que l'intersection de tous ces arcs de $\mathcal{C}$ est seulement l'ensemble des points des éléments

$$\Sigma_{2\mu} = D_{\frac{2\mu}{2^{\lambda+1}}2\pi}\,\Sigma_0 \quad \text{et} \quad \Sigma_{2\mu+1} = D_{\frac{2\mu+1}{2^{\lambda+1}}2\pi}\,\pi(\Sigma_0) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, 2\text{-}1).$$

Ce qui veut dire : si l'on choisit pour un certain $\lambda \geqslant 0$ fixé n'importe quel élément "orthogonal" $\Sigma_0 = [x_0 , \frac{1}{\sigma^2} x_0]$ dont la distance euclidienne $\overline{ox}_0 = \sigma$ satisfait à la contidion $0 < \sigma < 1$ et $\frac{1}{\sigma} \leqslant (\cos \frac{\pi}{2^\lambda})^{-1/2}$ si $\lambda \geqslant 2$, et si l'on "joint" Σ_0 et $\Sigma_1 = D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}\,\pi(\Sigma_0)$ par n'importe quel arc convexe $\mathfrak{A}$

(chose qui est toujours possible à cause de cette inégalité), alors l'ensemble des arcs déduits de $\mathfrak{A}$ et indiqués ci-dessus forme une courbe convexe $\mathcal{C}$ qui contient le point 0 dans son intérieur et pour laquelle on a : $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}\,\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

La courbe $\mathcal{C}$ est l'indicatrice d'un espace de Minkowski de dimension 2 de norme généralisée, où l'application $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ effectue un isomorphisme entre l'espace

dual et celui-ci (lemme 4). Donc cet espace est autoadjoint positif et la considération précédente montre que chaque espace de Minkowski autoadjoint positif "de type λ" est isomorphe à un tel espace construit par un convenable σ et $\mathfrak{A}$. Enfin on atteint le fait que l'espace construit n'est pas euclidien quand on n'admet pas dans le cas $\lambda = 1$ que $\mathfrak{A}$ soit le quart d'une ellipse, et cela est vraiment la seule restriction pour $\mathfrak{A}$ sauf la condition qu'il doit joindre les éléments Σ_0 et Σ_1 . Nous remarquons qu'il est essentiel pour le succès de notre construction que les applications $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ et π des éléments

Σ commutent entre eux, parce que $D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}$ applique l'ensemble des éléments fixes

de π sur lui-même. La figure 1 montre l'exemple de la construction d'un espace autoadjoint positif non-euclidien avec $\xi_0 = 1$, $k = 4$, $\lambda = 1$.

Considérons maintenant un espace de Minkowski autoadjoint négatif de forme normale $\mathfrak{M}$. Alors aussi $S\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ pour l'indicatrice $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{M}$, où S est la symétrie d'axe ξ_1 . (de matrice $\mathfrak{M}$). Donc $S\pi$ est une application homéomorphe de l'ensemble des éléments d'appui Σ de $\mathcal{C}$ sur lui-même. Cet ensemble étant un espace topologique homéomorphe au cercle on sait qu'il existe deux éléments fixes Σ_0 et Σ_1 , différents car $S\pi$ change l'orientation. Si $\Sigma_i = [(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}), (\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)})]$, $S\pi(\Sigma_i) = \Sigma_i$ entraîne $(\xi_1^{(i)})^2 - (\xi_2^{(i)})^2 = 1$ et $(\alpha_1^{(i)})^2 - (\alpha_2^{(i)})^2 = 1$; c'est-à-dire Σ_i est élément tangent de l'hyperbole équilatère h $(i = 0, 1)$. Puisque Σ_0 et Σ_1 sont joints par un arc convexe α de C, ils sont nécessairement situés sur des branches différentes de h. Maintenant $C = \alpha \cup S\pi(\alpha)$ et $\alpha \cap S\pi(\alpha) = \{(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})\}$ $(i = 0, 1)$. On voit comme au cas $\mathfrak{M}$ = positif que C est uniquement déterminé par sa partie α. Inversement, si l'on prend deux éléments tangents quelconques Σ_0 et Σ_1 de branches différentes de h et si on les joint par un arc convexe α quelconque (c'est toujours possible), alors l'espace de Minkowski d'indicatrice $C = \alpha \cup S\pi(\alpha)$ est autoadjoint et ou bien euclidien ou bien positif et "de type $\varepsilon_0 = 1$" ou bien négatif. En outre chaque espace autoadjoint de ces espèces est isomorphe à l'espace construit par Σ_0, Σ_1 et α convenablement choisis (voir théorème 1 et lemme 1). La figure 2 montre la construction d'un espace autoadjoint négatif avec $k = 1$. Nous pouvons résumer :

THÉORÈME 8. -

a. Chaque espace de Minkowski de dimension 2, autoadjoint positif, non-euclidien, de type $\lambda \geq 0$ est isomorphe à un espace de Minkowski d'indicatrice

$$C = \bigcup_{\mu=0}^{2^\lambda - 1} \left(D_{\frac{2\mu}{2^{\lambda+1}}2\pi}\, \alpha \cup D_{\frac{2\mu+1}{2^{\lambda+1}}2\pi}\, \pi(\alpha)\right) .$$

Ici D_φ est la rotation autour de 0 de l'angle φ, α est un arc convexe convenable joignant les élément $\Sigma_0 = [x_0, \frac{1}{\sigma^2} x_0]$ et $\Sigma_1 = D_{\frac{\pi}{2^\lambda}}[\frac{1}{\sigma^2} x_0, x_0]$

$(0 < \sigma < 1$, $\frac{1}{\sigma} \leq (\cos \frac{\pi}{2^\lambda})^{-1/2}$ si $\lambda \geq 2$, $\alpha \neq$ quart de l'ellipse si $\lambda = 1)$, et $\pi(\alpha)$ est l'image polaire de α. Pour un α satisfaisant seulement à ces conditions annoncées il existe toujours un espace de Minkowski de l'espèce considérée dont l'indicatrice contient α.

b. Chaque espace de Minkowski de dimension 2, autoadjoint, euclidien ou positif de type $\varepsilon_0 = 1$ ou négatif est isomorphe à un espace de Minkowski d'indicatrice $C = \alpha \cup S_\pi(\alpha)$. Ici S est la symétrie d'axe ξ_1, α est un arc convexe convenable joignant deux éléments tangents Σ_0 et Σ_1 de branches différentes de l'hyperbole équilatère $(\xi_1)^2 - (\xi_2)^2 = 1$, et $\pi(\alpha)$ est l'image polaire de α. Pour un α satisfaisant seulement à ces conditions annoncées il existe toujours un espace de Minkowski de la sorte considérée dont l'indicatrice contient α.

REMARQUES. –

1° Selon RADON [4] (Voir aussi [1]) on sait bien que les plans de Minkowski euclidiens et les plans de Minkowski autoadjoints positifs non-euclidiens de type $\lambda = 1$ sont exactement les plans de Minkowski où la transversalité de deux vecteurs est une relation symétrique. On appelle les indicatrices de ces espaces "courbes de Radon", la construction des courbes de Radon faite par RADON et plus tard par DAY est la même que la nôtre dans ce cas particulier.

2° La construction du théorème 8 fournit des exemples d'espaces de Minkowski autoadjoints de dimension 2 pour toutes les valeurs des invariants signe, ε_0 et k qui sont possibles (théorème 7).

3° En particulier chaque plan de Minkowski autoadjoint négatif de norme ordinaire est isomorphe à un plan de Minkowski d'indicatrice

$$C = \alpha \cup S\pi(\alpha) \cup S'\pi(\alpha) \cup D_\pi \alpha .$$

Ici S' est la symétrie d'axe ξ_2 et α est un arc convexe convenable joignant deux éléments tangents Σ_0 et Σ_2 de l'hyperbole h et de l'hyperbole conjuguée h' : $(\xi_2)^2 - (\xi_1)^2 = 1$.

4° Si l'on fait la restriction plus forte $\frac{1}{\sigma} < (\cos \frac{\pi}{2\lambda})^{-1/2}$ si $\lambda \geq 2$, on peut aussi contruire des plans de Minkowski autoadjoints d'une norme strictement convexe et même d'une norme de classe C^r (comme fonction des coordonnées ξ_1, ξ_2).

5° Lorsque $\mathfrak{M}$ est un espace de Minkowski autoadjoint, non-euclidien, de dimension $n > 2$, on peut aussi montrer que $\mathfrak{M}$ est isomorphe à un espace $\mathfrak{M}$ de forme normale admettant α et d'indicatrice $C = \bigcup_{\varsigma=0}^{2\lambda-1} (A)^{2\mu} \alpha \cup (A)^{2\mu+1} \pi(\alpha)$,

où A est l'application correspondante à $\mathcal{A}$ et α est une partie convenablement choisie de C $(\lambda = \operatorname{Max} \lambda_j)$. Ici α doit satisfaire à quelques conditions, qu'on peut facilement exprimer à l'aide d'une certaine paramétrisation des éléments d'appui Σ de C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAY (Mahlon M.). - Some charaterizations of inner-product spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 62, 1947, p. 320-337.

[2] KOKSMA (J.F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik ... , vierter Band, n° 4).

[3] von NEUMANN (J.). - Almost periodic functions in a group, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 445-492.

[4] RADON (J.). - Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Leipziger Berichte, t. 68, 1916, p. 123-128.