



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2009-2010**

Antoine Lemenant

**Un théorème de régularité pour les minimiseurs de Mumford-Shah dans  $\mathbb{R}^3$**

*Séminaire É. D. P.* (2009-2010), Exposé n° XXV, 11 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2009-2010\\_\\_\\_\\_A25\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A25_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Un théorème de régularité pour les minimiseurs de Mumford-Shah dans $\mathbb{R}^3$

Antoine Lemenant

Le but de cet exposé est de décrire les grandes lignes de la preuve du Théorème principal obtenu au cours de ma thèse [13], qui a été effectuée sous la direction de Guy David et soutenue en mai 2008.

## 1 Présentation du résultat

En 1989, Mumford et Shah [15] introduisent la fonctionnelle suivante pour résoudre un problème de segmentation d'image. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , et  $g \in L^\infty(\Omega)$ ,

$$J(u, K) := \int_{\Omega} |u - g|^2 + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^{N-1}(K). \quad (1.1)$$

Le problème de Mumford et Shah consiste à minimiser la fonctionnelle  $J$  sur l'ensemble des couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \subset \Omega \text{ fermé}, u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)\}.$$

L'existence d'un minimiseur est démontré dans [10]. Se pose ensuite la question de la régularité de  $u$  et de  $K$ . En dimension 2 par exemple, Mumford et Shah conjecturent que la segmentation minimale  $K$  est une union finie d'arcs  $C^1$  qui se rencontrent par nombre de 3 avec des angles de 120 degrés. Cette conjecture est toujours ouverte actuellement, même si certains résultats partiels existent de David [6], Ambrosio, Fusco et Pallara [1], et enfin Bonnet [4] qui l'a pratiquement démontré.



Une image segmentée<sup>1</sup> en utilisant la fonctionnelle (1.1).

Ci dessus, l'image de gauche donne la fonction de départ  $g$ . L'image de droite représente la segmentation minimale  $K$  et l'image du milieu la fonction  $u$  associée.

En tant que minimiseur d'énergie, il est facile de voir que  $u$  vérifie l'équation  $-\Delta u = g - u$  dans  $\Omega \setminus K$  avec condition de Neumann sur  $K$ , et la courbure moyenne de  $K$  est reliée au saut de la trace de  $|\nabla u|^2 + |u - g|^2$  sur  $K$ . De ce fait, il en découle de la régularité d'ordre supérieure sur  $u$  et  $K$ , sous réserve de savoir au départ que  $K$  est au moins  $C^{1,\alpha}$  (voir [2, 11]). La difficulté est donc de montrer cette régularité  $C^{1,\alpha}$  en partant d'aucune hypothèse a priori sur l'ensemble fermé  $K$  autre que le fait d'être minimiseur.

En pratique il sera plus commode d'utiliser une définition légèrement différente des minimiseurs de Mumford-Shah, par compétiteurs.

**Définition 1.** Soit  $(u, K) \in \mathcal{A}$  et  $B$  une boule telle que  $B \subset \Omega$ . Un compétiteur pour la paire  $(u, K)$  dans la boule  $B$ , est une paire  $(v, L) \in \mathcal{A}$  telle que  $u = v$  et  $K = L$  dans  $\Omega \setminus B$  et qui de plus satisfait la condition topologique suivante : tout couple de points  $x, y$  dans  $\Omega \setminus (B \cup K)$  qui sont séparés par  $K$ , sont aussi séparés par  $L$ .

L'expression "être séparé par  $K$ " veut dire que  $x$  et  $y$  sont dans des composantes connexes différentes de  $\Omega \setminus K$ .

**Définition 2.** Une fonction jauge  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction croissante telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ .

<sup>1</sup>Image obtenue par Jean Christophe Léger en utilisant un algorithme d'Antonin Chambolle. La photographie représente un Cagou, oiseau endémique de Nouvelle-Calédonie.

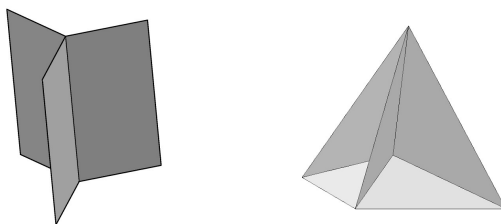
On définit maintenant les minimiseurs de Mumford-Shah de la façon suivante.

**Définition 3.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Un minimiseur de Mumford-Shah avec fonction jauge  $h$  est une paire  $(u, K) \in \mathcal{A}$  telle que pour toute boule  $B \subset \Omega$  de rayon  $r$ , et pour tout compétiteur  $(v, L)$  dans  $B$  on a

$$\int_{B \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(K \cap B) \leq \int_{B \setminus L} |\nabla v|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(L \cap B) + r^{N-1}h(r).$$

Il n'est pas difficile de se convaincre qu'un minimiseur pour  $J$  défini en (1.1) est en particulier un minimiseur au sens de la définition 3 avec  $h(r) = C_N \|g\|_\infty^2 r$  (voir Proposition 7.8 p. 46 de [7]). De plus dans la suite on supposera sans perte de généralité, que  $(u, K)$  est un minimiseur "réduit". C'est à dire qu'il n'est pas possible d'enlever à  $K$  des morceaux de mesure  $\mathcal{H}^{N-1}$  nulle (de tels petits morceaux nuiraient à la régularité de  $K$  tout en conservant la minimalité du couple  $(u, K)$ ).

D'autre part, il est important de noter que si l'on oublie la fonction  $u$  et son énergie de Dirichlet, alors  $K$  est un ensemble presque minimal tel qu'étudié par Guy David dans [5, 8]. En particulier, un minimiseur de Mumford-Shah dans  $\Omega = \mathbb{R}^3$  tel que  $h = 0$  et tel que  $u$  est localement constante, est un ensemble minimal de Mumford-Shah dans  $\mathbb{R}^3$  au sens de [5, 8]. C'est donc un cône minimal de type  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$ , c'est à dire ceux qui permettent à Jean Taylor de classer les singularités possibles d'un film de savon dans [16]. Ce fait est rigoureusement prouvé dans [8, Théorème 1.9].



Cônes de type  $\mathbb{Y}$  et  $\mathbb{T}$ , images visibles sur le site internet de Ken Brakke.

Voici maintenant l'énoncé du théorème, qui fournit de la régularité locale pour un minimiseur de Mumford-Shah dans  $\mathbb{R}^3$  proche d'un cône minimal en distance de Hausdorff. On note  $D_{x,r}$  la distance de Hausdorff normalisée dans la boule  $B(x, r)$ ,

$$D_{x,r}(E, F) := \frac{1}{r} \left\{ \max \left\{ \sup_{y \in E \cap B(x,r)} d(y, F), \sup_{y \in F \cap B(x,r)} d(y, E) \right\} \right\}. \quad (1.2)$$

**Théorème 4.** [13] ou [12, 14] *Pour toutes constantes  $C > 0$  et  $b \in (0, 1]$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que ce qui suit soit vrai. Soit  $(u, K)$  un minimiseur réduit de Mumford-Shah dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , avec fonction jauge  $h(r) = Cr^b$ . Soit  $x \in K$  et  $r > 0$  tels que  $B(x, r) \subset \Omega$ . Supposons de plus qu'il existe un cône minimal  $Z$  de type  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$  centré en  $x$  tel que*

$$D_{x,r}(K, Z) + h(r) \leq \varepsilon.$$

*Alors il existe un difféomorphisme  $\phi$  de classe  $C^{1,\alpha}$  ainsi que son inverse, de  $B(x, cr)$  vers son image, tel que*

$$\phi(K) \cap B(x, cr) = Z \cap B(x, cr),$$

*où  $c$  est une constante universelle.*

Le théorème 4 contient en particulier les résultats précédents de David [6] et Ambrosio, Fusco, Pallara [1].

## 2 Idées principales de la preuve

La preuve est assez longue et technique, mais en même temps très élémentaire avec de nombreux arguments constructifs “à la main”. Elle utilise des idées fondatrices de Guy David et est décrite dans la deuxième partie de la thèse [13], qui a été publiée en deux parties dans les articles [14] et [12].

L’objectif de ce texte est d’essayer de mettre en évidence les arguments principaux, en faisant abstraction de certaines technicités qui rendent la preuve complète un peu confuse et qui ne sont pas forcément nécessaires pour une première lecture.

On part donc d’un minimiseur de Mumford-Shah  $(u, K)$  que l’on suppose très proche d’un cône minimal dans la boule  $B(x_0, r_0)$ . En d’autres termes

$$D_{x_0, r_0}(K, Z) \leq \varepsilon$$

pour un certain cône minimal  $Z$  centré en  $x_0$  de type  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$ , et pour un  $\varepsilon > 0$  qui durant toute la preuve pourra être choisi aussi petit que l’on veut.

Un ingrédient essentiel qui sera omis ici concerne le saut de la fonction  $u$ , et la taille des “trous” dans l’ensemble  $K$ . Pour simplifier, nous supposons que  $K$  sépare la boule  $B(x_0, r_0)$  en autant de grosses composantes connexes que

$B(x_0, r_0) \setminus Z$  en contient. Comme cela a déjà été utilisé dans [6], on peut se ramener à ce cas en ajoutant à  $K$  des morceaux d'ensemble de niveau de  $u$  dont la mesure est contrôlée par la différence de ses valeurs moyennes dans certaines régions contenues dans les grosses composantes connexes de  $B(x_0, r_0) \setminus K$ . Nous renvoyons à [12] pour plus de détails.

Pour simplifier nous supposons également que la jauge  $h = 0$ , le cas général s'en déduisant en rajoutant le terme perturbateur  $r^2 h(r)$  dans toutes les estimations.

La stratégie pour montrer le théorème, est grosso modo de montrer que  $K$  est un ensemble presque minimal. C'est à dire qu'il faut contrôler l'énergie de  $u$ , montrer qu'elle décroît comme la puissance de  $r$ , afin d'en déduire que  $r \mapsto r^{-2} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^2$  est en quelque sorte elle même une fonction jauge. Par conséquent,  $K$  est un ensemble presque minimal, pour lequel nous savons que le théorème est vrai. En particulier pour conclure on s'appuiera fortement sur les derniers travaux de Guy David [5, 8] à propos des ensembles presque minimaux et du théorème de Jean Taylor.

Il faut donc pouvoir contrôler l'énergie normalisée. On considère dans un premier temps le cas d'une fonction harmonique.

## 2.1 Contrôle de l'énergie normalisée pour une fonction harmonique

La question fondamentale à résoudre qui a été motivée plus haut est la suivante : Soit  $K \subset B(0, 1)$  un ensemble fermé, et  $u \in W^{1,2}(B(0, 1) \setminus K)$  une fonction harmonique avec condition de Neumann sur  $K$  (au sens faible, c'est à dire  $u$  est un minimiseur local de  $\int_{B(0,1) \setminus K} |\nabla u|^2 dx$ ). Est il vrai que

$$\int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus K} |\nabla u|^2 dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1+\eta} \int_{B(0,1) \setminus K} |\nabla u|^2 dx, \quad (2.1)$$

pour un certain  $\eta > 0$  ?

Il est facile de construire des exemples d'ensembles  $K$  pour lesquels (2.1) n'est pas vérifié, y compris pour  $K$  très "plat" (pensez à un petit tube très fin qui contient beaucoup d'énergie). En revanche, voici quelques exemples où c'est vrai :

1. Si  $K = \emptyset$ , alors (2.1) est vrai avec  $\eta = 1$  : ce n'est autre que l'inégalité de

la moyenne pour la fonction sous-harmonique  $|\nabla u|^2$ .

2. Si  $K$  est un hyperplan, alors (2.1) est vrai : il suffit de se ramener au cas précédent par principe de réflexion.
3. Si  $K$  est un cône minimal dans  $\mathbb{R}^3$ , de type  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$ . Alors (2.1) est toujours vrai. Cela résulte d’une estimation de la première valeur propre Neumann pour le Laplacien sphérique dans les domaines  $\partial B(0, 1) \setminus Z$  où  $Z$  est un cône minimal (voir [14]). Remarquez qu’une tentative de preuve analogue à 2. en utilisant des réflexions est vouée à l’échec...
4. Si  $K$  est  $\varepsilon$ -proche d’un cône minimal en distance de Hausdorff, et est  $\varepsilon_0$ -minimal (voir définition ci dessous), alors (2.1) est encore vrai.

**Définition 5.** *On dit que  $K$  est  $\varepsilon_0$ -minimal si pour tout  $x \in K$  et tout  $r < r_0$  il existe un cône minimal  $Z(x, r)$  de type  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$  tel que*

$$D_{x,r}(K, Z(x, r)) \leq \varepsilon_0.$$

Les ensembles  $\varepsilon_0$ -minimaux sont construits sur le modèle des ensembles Reifenberg-plats introduits par Reifenberg dans les années 60. Ils ont été étudiés par David, De Pauw et Toro dans [9]. En particulier ils sont équivalents à un cône minimal par homéomorphisme bi-Hölderien. On verra dans la section suivante le lien avec un minimiseur de Mumford-Shah.

Le point 4. ci-dessus est l’objet de l’article [14]. La preuve fonctionne par “contradiction et compacité”, un peu à la manière d’Ambrosio Fusco Pallara [3] : on sait que (2.1) est vrai lorsque  $K$  est un cône minimal, donc il doit être vrai pour tout ensemble “proche” d’un cône minimal, sinon on pourrait passer à la limite et aboutir à une contradiction. L’hypothèse de  $\varepsilon_0$ -minimalité sert à passer à la limite. C’est à dire qu’il permet de dire qu’une suite de fonction  $u_n$  telle que  $u_n$  est minimiseur dans  $B(0, 1) \setminus K_n$  converge vers un minimiseur dans  $B(0, 1) \setminus K$  lorsque  $K_n$  converge vers  $K$  pour la distance de Hausdorff, et sous réserve que les  $K_n$  soient tous  $\varepsilon_0$ -minimaux.

En réalité, dans la suite on aura besoin d’un théorème analogue au point 4. mais un peu modifié, qui est le point 5. suivant :

5. Si  $K$  est  $\varepsilon$ -proche d’un cône minimal et également  $\varepsilon_0$ -minimal sauf pour une famille finie de boules  $\{B_i\}_{i \in I}$  centrées sur  $K$ , alors (2.1) reste vrai si on remplace  $K$  par l’ensemble  $K \cup \bigcup_{i \in I^*} \partial B_i$  où  $I^* := \{i \in I; \partial B_i \cap \partial B(0, 1/2) \neq \emptyset\}$ .

La preuve du point 5. est analogue à celle du point 4., avec quelques complications techniques supplémentaires.

## 2.2 Temps d'arrêt géométrique

La section 2.1 permet de contrôler l'énergie lorsque  $K$  est  $\varepsilon_0$ -minimal. Comment s'y ramener dans le cas général ? réponse : par un argument de temps d'arrêt. En effet, fixons  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et soit  $(u, K)$  notre minimiseur de Mumford-Shah  $\varepsilon$ -proche d'un cône minimal dans  $B(x_0, 2r_0)$ . Posons,

$$\beta(x, r) := \inf_{Z \text{ cône minimal}} D_{x,r}(K, Z), \quad (2.2)$$

et pour tout  $x \in K \cap B(x_0, r_0)$

$$d(x) := \inf\{s > 0; \beta(x, s) \leq \varepsilon_0\}.$$

Comme  $\beta(x_0, 2r_0) \leq \varepsilon$ , on a  $d(x) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  pour tout  $x$ . Enfin, définissons la "mauvaise masse" comme étant

$$m(x, r) := \frac{1}{r^2} \mathcal{H}^2 \left( \bigcup_{y \in K \cap B(x, r)} K \cap B(y, d(y)) \right).$$

Si  $\{B_i\}$  est un recouvrement de Vitali de  $\{B(x, d(x))\}$ , alors  $K \cap B(x_0, r_0)$  est un ensemble  $\varepsilon_0$ -minimal dans  $K \setminus \bigcup_i B_i$ . Pour reprendre une expression de Guy David nous qualifierons les boules  $\{B_i\}$  de "boules pourries". Le fait important est que, comme  $K \cap B(x_0, r_0)$  est un ensemble  $\varepsilon_0$ -minimal dans  $K \setminus \bigcup_i B_i$ , on pourra lui appliquer le point 5. de la section précédente pour contrôler l'énergie de  $u$ . Mais avant de faire cela, voyons d'abord comment contrôler la quantité  $m(x, r)$ .

## 2.3 Contrôle des "boules pourries"

Le contrôle de la quantité  $m(x, r)$  se fait par un argument de compacité, et utilise le fait "bien connu" [5, Corollaire 12.25] que pour un ensemble minimal, la quantité  $\beta(x, r)$  définie en (2.2) se comporte comme  $Cr^\alpha$  (c'est la régularité des ensembles minimaux).

Si  $r := d(x) > 0$  pour un certain  $x \in K$ . Alors par définition  $\beta(x, 2r) \leq \varepsilon_0$  et  $\beta(x, r) > \varepsilon_0$ . Donc  $K \cap B(x, 2r)$  ne peut pas être un ensemble minimal (car dans un tel cas  $\beta(x, r)$  aurait dû décroître comme  $Cr^\alpha$ )! On en déduit qu'il existe un compétiteur  $L$  tel que  $\mathcal{H}^2(L \cap B(x, 2r)) < \mathcal{H}^2(K \cap B(x, 2r))$ . En étant



un peu plus précis on peut même rendre cette estimation quantitative, c'est à dire  $\mathcal{H}^2(L \cap B(x, 2r)) \leq \mathcal{H}^2(K \cap B(x, 2r)) - \delta r^2$  avec un  $\delta > 0$  qui dépend entre autres de  $\varepsilon_0$ .

Par suite en modifiant chaque “boule pourrie”  $B_i$  par le compétiteur  $L$  trouvé comme décrit au paragraphe précédent, et sous réserve de pouvoir bien définir  $u$  dans chaque boule  $B_i$  ainsi modifiée (ce fait sera expliqué dans la section juste après), on obtient que la masse totale des “boules pourries” est contrôlée par le défaut de minimalité de  $K$ , qui lui même est contrôlé par l'énergie de  $u$ . En d'autres termes on obtient une estimation du type

$$m(x_0, r_0) \leq \frac{C}{\delta} \left( \frac{1}{r_0^2} \int_{B(x, r_0)} |\nabla u|^2 dx \right), \quad (2.3)$$

qui est l'une des estimations fondamentales pour la conclusion de notre théorème.

**Remarque 6.** En réalité l'estimation (2.3) n'est pas tout à fait vraie telle qu'elle, car il y a des “effets de bord”, c'est à dire qu'on ne peut pas remplacer  $K$  par  $L$  dans les boules  $B_i$  qui touchent  $\partial B(x_0, r_0)$ . En conséquence on ne contrôle pas vraiment  $m(x_0, r_0)$  mais  $m(x_0, r_0)$  moins la masse totale des boules  $B_i$  qui touchent  $\partial B(x_0, r_0)$ . Ceci amène quelques complications techniques qu'il serait trop long de détailler ici.

## 2.4 Extension de type Whitney

On a vu dans la section précédente qu'il est utile de pouvoir définir la fonction  $u$  dans l'union des mauvaises boules. Pour ce faire on utilise un argument de type “Extension de Whitney”. Le point clé étant que l'on considère toujours des boules  $B(x, r)$  telles que  $r \geq d(x)$ . Ainsi, la géométrie de  $K$  dans chaque boule considérée est toujours sous contrôle :  $K$  est en distance de Hausdorff normalisée  $\varepsilon_0$ -proche d'un cône minimal. On peut donc utiliser une partition de l'unité et définir  $u$  dans chaque boule  $B(x, r)$  considérée en utilisant des moyennes dans des boules de rayon équivalent à  $r$  situées dans les grosses composantes connexes de  $B(x, r) \setminus K$  (voir [14, Lemme 17]).

Ceci est un procédé général qui est utilisé à plusieurs reprises dans notre argument pour définir correctement  $u$  dans le complémentaire d'un ensemble  $\tilde{K}$ , qui est un compétiteur pour  $K$  formée en utilisant les boules pourries  $B_i$ . Le point central étant que la fonction ainsi “étendue” notée  $\tilde{u}$  vérifie

$$\int_{B(x_0, r_0) \setminus \tilde{K}} |\nabla \tilde{u}|^2 \leq \int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 + C \int_R |\nabla u|^2,$$

où  $R$  est la région où  $\tilde{u}$  et  $u$  diffèrent.

## 2.5 Contrôle de l'énergie normalisée pour un minimiseur de Mumford-Shah

On arrive maintenant à la deuxième estimation fondamentale, celle de l'énergie normalisée pour un minimiseur de Mumford-Shah lorsque celui-ci est  $\varepsilon$ -proche d'un cône minimal.

Soit  $r < r_0$  et soit  $I^* \subset I$  les indices des boules pourries  $B_i$  qui rencontrent  $\partial B(x_0, r)$ . Soit  $K' = K \cup \bigcup_{i \in I^*} \partial B_i$  et soit  $v$  la fonction harmonique dans  $B(x_0, r_0) \setminus K'$  qui vaut  $u$  sur  $\partial B(x_0, r_0)$  avec condition de Neumann sur  $K'$ . Alors d'après la section 2.1 on sait contrôler l'énergie de  $v$ . Il suffit donc de comparer  $(v, K')$  et  $(u, K)$  dans  $B(x_0, r_0)$ . Comme  $(u, K)$  est un minimiseur de Mumford-Shah on a

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 dx &\leq \int_{B(x_0, r_0) \setminus K'} |\nabla v|^2 dx + \mathcal{H}^2(K') - \mathcal{H}^2(K) \\ &\leq \int_{B(x_0, r_0) \setminus K'} |\nabla v|^2 dx + r^2 m'(x_0, r) \end{aligned}$$

où  $m'(x_0, r) = \frac{1}{r^2} \mathcal{H}^2(\bigcup_{i \in I^*} \partial B_i)$ .

D'autre part  $u$  est un compétiteur pour  $v$  en tant que minimiseur d'énergie de Dirichlet, donc  $\nabla u$  et  $\nabla v$  sont orthogonales dans  $L^2$ . On a donc par Pythagore,

$$\int_{B(x_0, r_0) \setminus (K \cup K')} |\nabla v - \nabla u|^2 = \int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 - \int_{B(x_0, r_0) \setminus K'} |\nabla v|^2 \leq r^2 m'(x_0, r).$$

Ceci permet d'écrire,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r) \setminus K} |\nabla u|^2 &\leq 2 \int_{B(x_0, r) \setminus K'} |\nabla v|^2 + 2 \int_{B(x_0, r) \setminus (K \cup K')} |\nabla v - \nabla u|^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\eta} \int_{B(x_0, r_0) \setminus K'} |\nabla v|^2 + 2 \int_{B(x_0, r_0) \setminus (K \cup K')} |\nabla v - \nabla u|^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\eta} \left( \int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 \right) + 2r^2 m'(x, r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

qui est l'estimation fondamentale sur l'énergie normalisée qui sert à prouver le Théorème.

## 2.6 Conclusion

En choisissant judicieusement le rayon  $r$  dans la partie 2.5 tel qu'il intersecte le moins de boule pourries possibles, on peut montrer que (2.4) implique en fait

$$\int_{B(x_0, r) \setminus K} |\nabla u|^2 \leq 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\eta} \left( \int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 \right) + 2\epsilon r^2 m(x, r).$$

Cette dernière estimation couplée avec (2.3) et itérée à toutes les échelles permet de montrer que  $\int_{B(x_0, r) \setminus K} |\nabla u|^2 \leq Cr^{2+\eta}$ . La même estimation vaut pour tout point  $x$  dans  $K \cap B(x_0, r_0)$  ce qui permet de montrer que  $K$  est un ensemble presque minimal dans  $B(x_0, cr_0)$  où  $c$  est une constante universelle, et mène à la conclusion du théorème. Ainsi s'achève notre description générale de la preuve du théorème.

## References

- [1] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. Partial regularity of free discontinuity sets. II. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(1):39–62, 1997.
- [2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] Luigi Ambrosio and Diego Pallara. Partial regularity of free discontinuity sets. I. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(1):1–38, 1997.
- [4] A. Bonnet. On the regularity of edges in image segmentation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(4):485–528, 1996.
- [5] Guy David.  $C^{1+\alpha}$ -regularity for two dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$ . (2008) Preprint Available at <http://www.math.u-psud.fr/~gdavid/>.
- [6] Guy David.  $C^1$ -arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(3):783–888, 1996.
- [7] Guy David. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, volume 233 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [8] Guy David. Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$ . *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 18(1):65–246, 2009.
- [9] Guy David, Thierry De Pauw, and Tatiana Toro. A generalization of Reifenberg's theorem in  $\mathbb{R}^3$ . *Geom. Funct. Anal.*, 18(4):1168–1235, 2008.

- [10] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108(3):195–218, 1989.
- [11] Herbert Koch, Giovanni Leoni, and Massimiliano Morini. On optimal regularity of free boundary problems and a conjecture of De Giorgi. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(8):1051–1076, 2005.
- [12] Antoine Lemenant. Regularity of the singular set for Mumford-Shah minimizers in  $\mathbb{R}^3$  near a minimal cone. *To appear in Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa.*
- [13] Antoine Lemenant. *Sur la régularité des minimiseurs de Mumford-Shah en dimension 3 et supérieure*. Thesis Université Paris Sud XI, Orsay, 2008.
- [14] Antoine Lemenant. Energy improvement for energy minimizing functions in the complement of generalized Reifenberg-flat sets. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, IX(5):1–34, 2010.
- [15] David Mumford and Jayant Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(5):577–685, 1989.
- [16] Jean E. Taylor. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 103(3):489–539, 1976.