Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Christophe Cheverry

Sur un problème de stabilité posé en optique géométrique non linéaire surcritique

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° V, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A5_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° V, 1-14

Sur un problème de stabilité posé en optique géométrique non linéaire surcritique

C. Cheverry [a,1]

[a] *Université de Rennes I, IRMAR, UMR 6625-CNRS, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France*

Abstract

Cet exposé s'intéresse à un modèle réaliste issu de la mécanique des fluides. L'objectif est de montrer qu'il est possible de traiter dans un tel cadre des problèmes d'instabilité soulevés par la propagation de singularités qualifiées de *surcritiques*. D'abord, nous introduisons le modèle (équations de type Navier-Stokes) et ses motivations (questions liées à la propagation d'oscillations en régime *turbulent*). Ensuite, nous présentons deux résultats (relatifs au caractère bien posé d'un problème de Cauchy oscillant) dont nous expliquons les difficultés sous-jacentes (dues à l'absence de contrôles suffisants via les estimations d'énergie classiques). Dans un troisième volet, nous décrivons la stratégie suivie pour prouver les deux énoncés donnés. Enfin, nous indiquons quelques applications possibles de la méthode.

Key words: Equations paraboliques (Navier-Stokes) et hyperboliques (Euler), optique géométrique, analyse surcritique, interaction d'ondes oscillantes.
1991 MSC: 35

Contents

Email address: christophe.cheverry@univ-rennes1.fr (C. Cheverry).

[1] ANR-05-BLAN-0163-01, FRANCE.

1 Le modèle et ses motivations.

1.1 Le modèle.

On s'intéresse à des équations de type Navier-Stokes compressible posées en dimension deux d'espace, avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ce choix de la dimension deux est motivé essentiellement par un souci de simplification dans la présentation. Ainsi, le champ des vitesses u est décrit par un vecteur à deux composantes $u = {}^t(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Comme à l'usuel, on a

$$u \cdot \nabla \; = \; u^1\, \partial_1 + u^2\, \partial_2 \, , \qquad \operatorname{div} u \; = \; \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 \, .$$

On note $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$ la densité du fluide et $\gamma \in]1, +\infty[$ l'exposant adiabatique. Afin de pouvoir travailler avec une partie quasilinéaire mise sous forme symétrique, il est préférable d'introduire (voir [9]) une quantité scalaire $q \in \mathbb{R}_+^*$ qui est liée à ϱ via la loi d'état suivante

$$q = \frac{2\,\sqrt{a\,\gamma}}{\gamma - 1}\, \varrho^{\frac{\gamma-1}{2}} \in \mathbb{R}_+^* \, , \qquad \mathrm{c} \; = \; \frac{\gamma - 1}{2} \in \mathbb{R}_+^* \, .$$

On adopte la convention $v := {}^t(q, u^1, u^2) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, les trois composantes scalaires q, u^1 et u^2 sont regroupées au niveau de la variable d'état v. On utilise le symbole $\mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon, \partial)$ pour désigner un système d'opérateurs différentiels d'ordre deux qui se décompose selon

$$\mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon, \partial)\, u \; \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\varepsilon^1\, u \\ \mathcal{P}_\varepsilon^2\, u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varepsilon^{2\mu}\, \partial_1(\operatorname{div} u) + \varepsilon^{2\tau}\, \partial_{22}^2 u^1 + \varepsilon^{2\nu}\, \partial_{11}^2 u^1 \\ \varepsilon^{2\mu}\, \partial_2(\operatorname{div} u) + \varepsilon^{2\kappa}\, \partial_{22}^2 u^2 + \varepsilon^{2\nu}\, \partial_{11}^2 u^2 \end{pmatrix} .$$

La définition de $\mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon, \partial)$ fait intervenir un paramètre $\varepsilon \in]0, 1]$ destiné à tendre vers zéro. Les puissances ε^* sont calibrées par des exposants μ, κ, τ et ν qui satisfont pour seules contraintes les trois inégalités

$$(\mathcal{H}) \qquad 0 \leq \kappa \leq \mu \, , \qquad \kappa \leq \tau \, , \qquad \mu + 2\,\tau \; < \; \nu \, .$$

Les équations qui nous intéressent se mettent sous la forme

$$(\mathrm{NS})_\varepsilon \qquad \mathcal{NS}(v; \partial)\, v \; := \begin{cases} \partial_t q \; + \; (u \cdot \nabla) q \; + \; \mathrm{c}\; q \operatorname{div} u \; = \; 0 \, , \\ \partial_t u \; + \; (u \cdot \nabla) u \; + \; \mathrm{c}\; q\; \nabla q \; - \; \mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon, \partial)\, u \; = \; 0 \, . \end{cases}$$

Les conditions qui sont retenues en $(\mathcal{H})$ autorisent la sélection de $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$. Lorsque $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, les autres exposants μ, τ et ν sont nécessairement tous strictement positifs. Alors, pour $\varepsilon = 0$, on reconnait en $(\mathrm{NS})_0$ le système formé par les équations d'Euler compressible (isentropique)

$$\text{(E)} \qquad \mathcal{E}(\tilde{v};\partial)\,\tilde{v} := \begin{cases} \partial_t \tilde{q} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{q} + \mathrm{c}\,\tilde{q}\,\mathrm{div}\,\tilde{u} = 0\,, \\ \partial_t \tilde{u} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u} + \mathrm{c}\,\tilde{q}\,\nabla\tilde{q} = 0\,, \end{cases} \qquad \tilde{v} := {}^t(\tilde{q},\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)\,.$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$ et pour des fonctions u raisonnables (disons qui sont de classe C^2 et dont le support est compact), on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \Big\langle u\,, \mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon,\partial)u \Big\rangle\, dx \,&=\, -\iint_{\mathbf{R}^2} (\varepsilon^\mu\,\mathrm{div}\,u)^2\,dx - \iint_{\mathbf{R}^2} (\varepsilon^\tau\,\partial_2 u^1)^2\,dx \\ &\quad - \iint_{\mathbf{R}^2} (\varepsilon^\kappa\,\partial_2 u^2)^2\,dx - \iint_{\mathbf{R}^2} (\varepsilon^\nu\,\partial_1 u^1)^2\,dx - \iint_{\mathbf{R}^2} (\varepsilon^\nu\,\partial_1 u^2)^2\,dx \leq 0\,. \end{aligned}$$

Ainsi, toujours lorsque $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, l'action de $\mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon,\partial)$ au niveau de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ est celle d'une viscosité qui présente les caractéristiques suivantes :

- ▹ elle est *dégénérée* (conformément à ce que prévoit la physique [1], il n'y a pas de contribution au niveau de la densité),
- ▹ elle est *évanescente* (car $\varepsilon \in]0,1]$ tend vers zéro),
- ▹ elle est *anisotropique*. En effet, comme dans l'article [2], les dérivées ∂_1 et ∂_2 sont pondérées par des puissances d'ε qui sont différentes. Ces puissances peuvent même varier selon les lignes. Lorsque $\kappa = \tau$, on manipule en fait
$$\mathcal{P}_{\tau,\nu}^{\mu,\kappa}(\varepsilon,\partial)\,u \,=\, \varepsilon^{2\mu}\,\nabla(\mathrm{div}\,u) + \varepsilon^{2\tau}\,\partial_{22}^2 u + \varepsilon^{2\nu}\,\partial_{11}^2 u\,, \qquad u = {}^t(u^1,u^2)\,.$$

Du point de vue de la physique, il convient de sélectionner des nombres μ, τ et κ strictement positifs, du même ordre de grandeur et pas trop grands. Les perturbations paraboliques afférentes sont en effet destinées à régler la teneur de ce que seraient des viscosités turbulentes. A l'opposé, le nombre ν a pour vocation d'être choisi arbitrairement grand. La partie en $\varepsilon^{2\nu}\,\partial_{11}^2$ joue le rôle d'une viscosité moléculaire (qui à priori est plus négligeable).

Les phénomènes turbulents sont reconnaissables à des transferts d'énergie entre de petites échelles (ici en ε^ν avec $\nu \gg 1$ dans la direction x_1) au niveau desquelles agit la dissipation moléculaire, des échelles intermédiaires (en ε^μ, ε^τ, ε^κ, $\cdots$) et des échelles de taille un où le régime est laminaire. Les écoulements correspondants présentent des caractéristiques qui se situent à l'interface entre les aspects *hyperboliques* (conduisant à de la propagation des singularités) et *paraboliques* (qui induisent des effets de dissipation). Ces deux types de propriétés sont combinées dans notre approche au niveau de l'étude asymptotique (lorsque $\varepsilon \to 0$) des solutions de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$.

Une façon naturelle de modéliser la présence de ces multiples échelles (en $\varepsilon^{-\nu}$, $\varepsilon^{-\mu}$, $\varepsilon^{-\tau}$, $\varepsilon^{-\kappa}$, $\cdots$, ε^{0}) est d'avoir recours à des oscillations. Compte tenu du contexte physique, il s'agit en fait de construire des solutions oscillantes pour des équations de type Navier-Stokes telles que les équations $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ envisagées ici. Il se trouve que des exemples assez simples peuvent être fournis sous la forme d'*ondes simples*.

∘ *Exemples d'ondes simples.* Soient ι_0 et ι_2 deux réels positifs. On se donne un profil $k \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T};\mathbb{R})$ qui est à support compact en la première variable $x_1 \in \mathbb{R}$ et qui est périodique (disons de période un) en la seconde variable $\theta \in \mathbb{T}$. On suppose que la fonction k dépend effectivement de θ (on impose $\partial_\theta k \not\equiv 0$). On résout globalement en temps l'équation scalaire parabolique

$$(SP)_\varepsilon \qquad \partial_t \mathbf{k}^\varepsilon \;=\; \varepsilon^{2\nu}\,\partial^2_{11}\mathbf{k}^\varepsilon \;+\; \partial^2_{\theta\theta}\mathbf{k}^\varepsilon\,, \qquad \mathbf{k}^\varepsilon(0,\cdot) = k(\cdot)$$

dont la solution $\mathbf{k}^\varepsilon(t,x_1,\theta)$ est régulière en $\varepsilon \in [0,1]$. A l'aide des ingrédients précédents, on construit les familles $(\tilde v^s_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ et $(v^s_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ obtenues en posant

$$\tilde v^s_\varepsilon(t,x) \equiv \tilde v^s_\varepsilon(x_1) = {}^t(\tilde v^{s0}_\varepsilon,\tilde v^{s1}_\varepsilon,\tilde v^{s2}_\varepsilon)(t,x_1) := {}^t\Big(\mathrm{c}^{-1}\,\varepsilon^{\iota_0}\,,\,0\,,\,\varepsilon^{\iota_2}\,k\Big(x_1,\frac{x_1}{\varepsilon^\nu}\Big)\Big)\,,$$

$$v^s_\varepsilon(t,x) \equiv v^s_\varepsilon(t,x_1) = {}^t(v^{s0}_\varepsilon,v^{s1}_\varepsilon,v^{s2}_\varepsilon)(t,x_1) := {}^t\Big(\mathrm{c}^{-1}\,\varepsilon^{\iota_0}\,,\,0\,,\,\varepsilon^{\iota_2}\,\mathbf{k}^\varepsilon\Big(t,x_1,\frac{x_1}{\varepsilon^\nu}\Big)\Big)\,.$$

Un calcul simple indique que pour tout paramètre $\varepsilon \in]0,1]$ les expressions $\tilde v^s_\varepsilon$ et v^s_ε sont respectivement solutions exactes de (E) et de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$. ∘

Clairement, les fonctions $\tilde v_\varepsilon$ et v_ε ne dépendent que de la variable d'espace x_1. La question est de savoir s'il est possible de modifier légèrement ces objets monodimensionnels tout en restant solution. Ainsi, on se demande :

Q1 : Quelles sont les propriétés de *stabilité* de (E) au voisinage de $(\tilde v^s_\varepsilon)_\varepsilon$?

Q2 : Quelles sont les propriétés de *stabilité* de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ au voisinage de $(v^s_\varepsilon)_\varepsilon$?

1.2 Les motivations.

▹ **La question Q1.** Pour avancer sur **Q1**, on se tourne vers le linéarisé de (E) le long de l'onde simple v_ε. Il s'agit du système linéaire

$$(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} \partial_t\dot q_\varepsilon \;+\tilde v^{s2}_\varepsilon\,\partial_2\dot q_\varepsilon \;+\; \varepsilon^{\iota_0}\,\mathrm{div}\,\dot u_\varepsilon \;=\; 0\,,\\ \partial_t\dot u^1_\varepsilon \;+\tilde v^{s2}_\varepsilon\,\partial_2\dot u^1_\varepsilon \;+\; \varepsilon^{\iota_0}\,\partial_1\dot q_\varepsilon \;=\; 0\,,\\ \partial_t\dot u^2_\varepsilon \;+\tilde v^{s2}_\varepsilon\,\partial_2\dot u^2_\varepsilon \;+\; \varepsilon^{\iota_0}\,\partial_2\dot q_\varepsilon \;+\; \boxed{\partial_1\tilde v^{s2}_\varepsilon\,\dot u^1_\varepsilon} \;=\; 0\,, \end{cases} \qquad \dot v_\varepsilon := \begin{pmatrix}\dot q_\varepsilon\\ \dot u^1_\varepsilon\\ \dot u^2_\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Le terme encadré est de type semi-linéaire. Il met en jeu le coefficient $\partial_1 \tilde{v}^{s2}_\varepsilon$ qui est de taille

$$(1) \qquad \| \partial_1 \tilde{v}^{s2}_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})} = \Big\| \partial_1 \Big[\varepsilon^{\iota_2} \, \mathbf{k}\Big(t, x_1, \frac{x_1}{\varepsilon^\nu}\Big) \Big] \Big\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})} \simeq \varepsilon^{\iota_2 - \nu} \, .$$

Faire des estimations d'énergie (au sens classique) au niveau de (L) consiste à multiplier (L) par ${}^t\dot{v}_\varepsilon$ puis à intégrer en temps et en espace, disons sur le domaine $[0,T] \times \mathbb{R}^2$ avec $T \in \mathbb{R}^*_+$. Cette opération fournit

$$(2) \qquad \int_0^T \| \dot{v}_\varepsilon(t,\cdot) \|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \, dt \leq \int_0^T \iint_{\mathbf{R}^2} |\partial_1 \tilde{v}^{s2}_\varepsilon \, \dot{u}^1_\varepsilon \, \dot{u}^2_\varepsilon| \, dt \, dx \, .$$

La combinaison des informations obtenues en (1) et (2) permet de prévoir une amplification de la norme $L^2(\mathbf{R}^2)$ de l'accroissement $\dot{v}_\varepsilon$ suivant un taux maximal en

$$(3) \qquad \| \dot{v}_\varepsilon(t,\cdot) \|_{L^2} \lesssim \exp\,(C \, \varepsilon^{\iota_2 - \nu} \, t) \ \| \dot{v}_\varepsilon(0,\cdot) \|_{L^2} \, , \qquad t \in [0,T] \, , \qquad C \in \mathbb{R}^*_+ \, .$$

Cette prévision peut être rendue effective (voir [3,4,5,7,8]). Il existe des familles de données initiales $(\dot{v}_\varepsilon(0,\cdot))_\varepsilon$ qui sont ajustées de façon à ce que

$$(4) \qquad \exp\,(C \, \varepsilon^{\iota_2 - \nu} \, t) \ \| \dot{v}_\varepsilon(0,\cdot) \|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \lesssim \| \dot{v}_\varepsilon(t,\cdot) \|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \, , \qquad \forall \, t \in [0,T] \, .$$

En particulier, lorsque $\iota_2 < \nu$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on récupère :

$$(5) \qquad \exp\,(C \, \varepsilon^{\iota_2 - \nu} \, t_\varepsilon) \simeq \varepsilon^{-m} \, , \qquad t_\varepsilon \, := \, m \, C^{-1} \, \varepsilon^{\nu - \iota_2} \, |\ln \varepsilon| \, , \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \ t_\varepsilon \, = \, 0 \, .$$

On constate en $(4)-(5)$ une perte de contrôle L^2 uniforme en $\varepsilon \in]0,1]$ qui traduit les très fortes instabilités [3e,4,5,7,8] sous-jacentes au système hyperbolique (E) au voisinage de $(\tilde{v}^s_\varepsilon)_\varepsilon$. Il s'ensuit qu'on ne sait pas résoudre le problème de Cauchy oscillant pour (E) associé à des données initiales

$$(6) \qquad \tilde{v}^h_\varepsilon(0,x) = {}^t(\tilde{q}^h_\varepsilon, \tilde{u}^{h1}_\varepsilon, \tilde{u}^{h2}_\varepsilon)(0,x) = \tilde{v}^s_\varepsilon(x_1) + \varepsilon^\iota \, \tilde{r}_\varepsilon(x) \, , \qquad \iota \in \mathbb{R}_+ \, , \qquad \partial_2 \tilde{r}_\varepsilon \not\equiv 0$$

obtenues par modification à l'instant initial $t = 0$ de la famille $(\tilde{v}^s_\varepsilon)_\varepsilon$. Aussi grand que soit le choix de $\iota \in \mathbb{R}^*_+$ et aussi régulière que soit la perturbation multidimensionnelle non triviale $\tilde{r}_\varepsilon$ effectuée (même en prenant $\tilde{r}_\varepsilon \equiv \tilde{r}$ avec $\tilde{r}$ fonction C^∞ à support compact), on ne sait pas prouver que le temps de vie $T_\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ des solutions de (E)-(6) peut être minoré uniformément en $\varepsilon \in]0,1]$ par un $T \in \mathbb{R}^*_+$. Concernant (E)-(6), les connaissances en matière de temps de vie sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Temps de vie T_ε	$T_\varepsilon \simeq \varepsilon^{\nu-\iota_2}$	$T_\varepsilon \simeq \varepsilon^{\nu-\iota_2}\,\lvert\ln\varepsilon\rvert$	$T_\varepsilon \simeq 1$
cas hyperbolique + **hypothèse** $\boxed{\iota_2 < \nu}$	existence + contrôle L^2 uniforme en $\varepsilon \in]0,1]$	existence + perte de contrôle L^2 uniforme en $\varepsilon \in]0,1]$	?? ?? ??

Autrement dit, on perd tout contrôle bien avant d'arriver à des temps de taille un. Pour cette raison, la situation hyperbolique semble hors de porté. Cela étant dit, dans la réalité, les fluides ont toujours ne serait-ce qu'un soupçon de viscosité. Cette remarque conduit à **Q2**.

▹ **La question Q2.** L'objectif est d'identifier une viscosité dont la structure évanescente laisse filtrer certaines oscillations et permette à la plupart des instabilités hyperboliques de s'enclencher tout en garantissant une forme de stabilité. Dans la pratique, il s'agit d'obtenir l'existence locale en temps uniformément en $\varepsilon \in]0,1]$ pour des exposants μ, τ et κ aussi grands que possible (sachant déjà que $\nu \gg 1$). C'est dans cette direction que nous allons apporter des éléments d'information concrets.

2 Présentation des résultats.

2.1 *Le cadre fonctionnel.*

En dimension deux d'espace, une oscillation peut s'interpréter comme une application f ou comme une famille $\{f_\varepsilon\}_\varepsilon$ de fonctions selon que l'un ou l'autre des points de vue ci-dessous soit adopté

$$\begin{aligned} f :]0,1] \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^N \\ (\varepsilon, x) &\longmapsto f(\varepsilon,x)\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_\varepsilon : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^N \\ x &\longmapsto f_\varepsilon(x)\,, \end{aligned} \qquad \varepsilon \in]0,1]\,.$$

L'idée est de coder les singularités par l'explosion des dérivées de f_ε lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Ainsi [3e,7,8], la force d'une oscillation se mesure à l'aide de normes à poids telles que

$$\| f \|_{\alpha,\gamma} \equiv \| (f_\varepsilon)_\varepsilon \|_{\alpha,\gamma} := \sup_{\varepsilon \in]0,1]} \sum_{\{\beta \in \mathbb{N}^2\,;\,\beta \le \gamma\}} \varepsilon^{\alpha\cdot\beta} \; \| \partial_x^\beta f_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^N)} \;.$$

L'introduction des normes de type $\|\cdot\|_{\alpha,\gamma}$ conduit aux notions de *régularité*, d'*amplitude* et de *fréquence* d'une oscillation.

Définition 2.1 *Soit $\gamma \in \mathbb{N}^2$ un multi-indice avec $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ et $\iota \in \mathbf{R}_+$ un réel. On dit de l'oscillation $f :]0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ qu'elle a pour régularité γ, amplitude ε^ι et fréquence $\alpha \in \mathbb{N}^2$ lorsque :*

$$(7) \qquad (\varepsilon^{-\iota} f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{O}_{\alpha,\gamma} := \{ f \, ; \, \| f \|_{\alpha,\gamma} < +\infty \} .$$

On adopte aussi la convention suivante [3b,3e].

Définition 2.2 *On dit que $f :]0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une oscillation forte lorsque :*

$$(8) \qquad \exists \, j \in (1,2) \, ; \qquad \sup \Big\{ |\ln \varepsilon|^{-1} \, \| \partial_j f_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})} \, ; \, \varepsilon \in]0,1] \Big\} = +\infty \, .$$

∘ *Exemples d'oscillations fortes.* Lorsque $\iota_2 < \nu$, les deux familles $(\tilde{v}^2_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v^2_\varepsilon)_\varepsilon$ sont fortes car alors

$$|\ln \varepsilon|^{-1} \, \| \partial_1 \tilde{v}^{s2}_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \simeq |\ln \varepsilon|^{-1} \, \| \partial_1 v^{s2}_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \simeq |\ln \varepsilon|^{-1} \, \varepsilon^{\iota_2 - \nu} \longrightarrow +\infty \, . \quad \circ$$

Compte tenu des explications qui sont fournies au paragraphe 1.2, la notion d'oscillation forte met de coté les situations pour lesquelles les estimations d'énergie classiques ne permettent pas de traiter le problème de Cauchy oscillant $(\mathrm{NS})_\varepsilon - (6)$. L'information donnée en (7) est peu précise car elle ne fait pas la distinction entre le cas des *oscillations* et des *concentrations*. Pour saisir la nuance, dans [3a], on fait appel à deux indices $\zeta \in \mathbb{R}_+$ et $\upsilon \in \mathbb{R}_+$ supplémentaires. On pose

$$\| f \|^{\zeta,\upsilon}_{\alpha,\gamma} := \sup_{(\varepsilon,x,j) \in]0,1] \times \mathbf{R}^2 \times \{0,\cdots,\gamma_2\}} \varepsilon^{-\zeta} \int_{x_1}^{x_1+1} |(\varepsilon^{\alpha_2 j} \, \partial_2^j f_\varepsilon)(\varepsilon^\upsilon y, x_2)| \, dy \, .$$

Définition 2.3 *On dit que l'oscillation $f :]0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a une densité L^1_{loc} qui s'éteint (dans la direction x_1) à l'échelle ε^υ avec la vitesse ε^ζ lorsque $\| f \|^{\zeta,\upsilon}_{\alpha,\gamma} < \infty$.*

L'espace vectoriel

$$\mathcal{O}^{\zeta,\upsilon}_{\alpha,\gamma} := \Big\{ f \in \mathcal{O}_{\alpha,\gamma} \, ; \, \| f \|^{\zeta,\upsilon}_{\alpha,\gamma} < +\infty \Big\}$$

est stable par produit (et par composition par des fonctions régulières). C'est une algèbre d'oscillations qui bénéficie de propriétés étudiées dans l'appendice de [3a]. En particulier, les éléments de $\mathcal{O}^{\zeta,\upsilon}_{\alpha,\gamma}$ sont caractérisés par un lemme non linéaire établi dans [3a]. Par ailleurs, on a besoin de savoir ce qu'est une *solution approchée* (concept classique en optique géométrique) d'ordre $M \in \mathbb{R}$ et de fréquence $\alpha \in \mathbb{N}^2$.

Les terminologies précédentes permettent de mettre en place la notion d'*oscillation compatible* qui précise selon les caractéristiques de l'écoulement un seuil minimal de viscosité donnant accès à de la stabilité. Nous renvoyons à la Définition 11 de [3a] pour une description précise. Nous nous contentons ci-dessous de signaler les points principaux (d'autres aspects plus techniques étant laissés de coté).

On dit que la famille $(v^a_\varepsilon)_\varepsilon$ avec $v^a_\varepsilon : [0,T] \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ et $v^a_\varepsilon = (q^a_\varepsilon, u^{a1}_\varepsilon, u^{a2}_\varepsilon)$ est une *oscillation compatible* avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ si les quatre conditions i), $\cdots$, iv) suivantes sont satisfaites :

i) La composante $q^a_\varepsilon = \varepsilon^{\iota_0}\, \breve{q}^a_\varepsilon$ est telle que $\mu \leq \iota_0$ avec $(\breve{q}^a_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{O}_{(\nu,0),(6,6)}$.

ii) La composante $u^{a1}_\varepsilon = \varepsilon^{\iota_1}\, \breve{u}^{a1}_\varepsilon$ est telle que $\nu \leq \iota_1$ avec $(\breve{u}^{a1}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{O}_{(\nu,0),(6,6)}$.

iii) La composante $u^{a2}_\varepsilon = \varepsilon^{\iota_2}\, \breve{u}^{a2}_\varepsilon$ est telle que $\kappa \leq \iota_2$. On suppose de plus qu'il existe $\zeta \in [\tau - \kappa, \nu]$ et $\sigma \in [\max(\zeta, \tau + \mu + 1 - \iota_2), \nu]$ avec $(\breve{u}^{a2}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{O}^{\zeta,\sigma-\zeta}_{(\nu,0),(6,6)}$.

iv) La famille $(v^a_\varepsilon)_\varepsilon$ est solution approchée de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ pour un ordre $M \geq 4\,\nu$ et pour la fréquence $(\nu, 0)$.

$\circ$ *Exemples d'oscillations compatibles.* La famille $(v^s_\varepsilon)_\varepsilon$ est compatible avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ dès que $\mu \leq \iota_0$, $\kappa \leq \iota_2$ et $\tau \leq \kappa + \zeta$. Cette propriété persiste sous l'effet d'une troncature en espace du moins si celle-ci est effectuée suffisamment lentement. On peut montrer que la famille $(v^\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ obtenue en posant

$$v^\psi_\varepsilon(t,x) := \psi(\varepsilon^M x)\, v^s_\varepsilon(t,x)\,, \qquad \psi \in C^\infty_b(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\,, \qquad M \in [5\,\nu, +\infty[$$

est encore compatible avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$. On peut toujours choisir $\iota_2 < \nu$. On récupère alors une oscillation qui est à la fois compatible et forte. $\circ$

Ainsi, l'ensemble des oscillations fortes qui sont compatibles avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$ est non vide. Cet ensemble contient en fait de nombreux éléments v^a qui mettent en jeu des structures plus complexes que celles qui s'affichent dans v^s ou v^ψ. Les expressions v^a dont il est question peuvent être attrapées par des calculs WKB (effectués au voisinage de v^s) qui mettent en valeur des phénomènes d'interaction d'ondes mèlant plusieurs échelles. Dans la suite, on met plutôt l'accent sur le problème de la justification des calculs WKB auxquels il est fait allusion. C'est la réponse à la question **Q2**.

2.2 *Deux énoncés principaux.*

Soit v^a une oscillation compatible avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$. Elle est en particulier solution approchée d'ordre M ce qui donne

$$(\mathcal{PA}) \qquad \mathcal{NS}(v^a_\varepsilon;\partial)\, v^a_\varepsilon \;=\; \varepsilon^M\, g^a_\varepsilon\,, \qquad M \geq 4\,\nu\,, \qquad \varepsilon \in \,]0,1]\,.$$

On considère le problème de Cauchy obtenu en conservant la même donnée initiale mais en effaçant le terme source

$$(\mathcal{PC}) \qquad \mathcal{NS}(v_\varepsilon;\partial)\, v_\varepsilon \;=\; 0\,, \qquad v_\varepsilon(0,\cdot) = v^a_\varepsilon(0,\cdot)\,, \qquad \varepsilon \in \,]0,1]\,.$$

Théorème 2.1 *Le problème de Cauchy oscillant* $(\mathcal{PC})$ *est localement bien posé en temps. Autrement dit, notant* T_ε *la durée de vie de* v_ε*, on a*

$$(9) \qquad \exists\,(\varepsilon_0,T) \in \,]0,1] \times \mathbf{R}^*_+\,; \qquad T_\varepsilon \;\geq\; T \;>\; 0\,, \qquad \forall\, \varepsilon \in \,]0,\varepsilon_0]\,.$$

On dispose aussi d'un contrôle sur la distance (en norme d'énergie L^2) qui sépare v^a_ε de v_ε.

Théorème 2.2 *Soit* $\varpi := \max\,(\mu-\kappa;\nu-\iota_2) \in \mathbf{R}_+$. *On a*

$$(10) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \;\|\,(v_\varepsilon - v^a_\varepsilon)(t,\cdot)\,\|_{L^2} \lesssim\; \varepsilon^{-\varpi} \int_0^t \|\,\mathcal{N}(v^a_\varepsilon;\partial)\, v^a_\varepsilon(s,\cdot)\,\|_{L^2}\; ds\,.$$

Lorsque $\iota_2 < \nu$ (oscillation forte), on a $\varpi > 0$. Dans ce cas, l'estimation (10) ne conduit pas à une borne uniforme en $\varepsilon \in \,]0,1]$. Au contraire, elle affiche une sensibilité au terme source $\varepsilon^M\, g^a_\varepsilon$ qui se dégrade lorsque $\varepsilon \mapsto 0$. La situation est en quelque sorte intermédiaire entre les résultats classiques d'optique géométrique (qui s'appuient en général sur des estimations L^2 uniformes en ε) et les résultats d'instabilité forte tels que ceux décrits dans [3e,5,7].

3 Idées de preuve.

3.1 *Relèvements.*

On cherche la solution $v_\varepsilon(t,x)$ de $(\mathcal{PC})$ sous la forme d'une perturbation de taille $\varepsilon^{4\nu}$ de $v^a_\varepsilon(t,x)$ ce qui revient à poser

$$v_\varepsilon(t,x) \;=\; v^a_\varepsilon(t,x) \;+\; \varepsilon^{4\nu}\, r^b_\varepsilon(t,x)\,, \qquad r^b_\varepsilon \;=\; {}^t(r^{b1}_\varepsilon, r^{b2}_\varepsilon, r^{b3}_\varepsilon) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Ensuite, on procède à un changement de variables dépendantes. On ajoute de nouvelles inconnues ce qui peut toujours se formaliser comme suit.

Définition 3.1 *On dit que l'inconnue r est un relèvement par Φ de la variable d'état r^b s'il existe un entier $N > 3$ et une famille $(\Phi_\varepsilon)_\varepsilon$ d'applications*

$$\Phi_\varepsilon \ : \ L^\infty\Big([0,T];C^3(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^N)\Big) \longrightarrow L^\infty\Big([0,T];C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)\Big)$$

telle que $r^b_\varepsilon(t,x) = \Phi_\varepsilon\Big(r_\varepsilon(t,x)\Big)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1]$.

L'introduction de r doit être réalisée en lien avec les équations.

Définition 3.2 *Etant donné un relèvement par Φ de r^b, on dit que le système*

$$(\mathcal{PE}) \qquad \mathcal{B}(r_\varepsilon;\partial)\, r_\varepsilon \ = \ 0\,, \qquad r_\varepsilon(0,\cdot) \equiv 0\,, \qquad \varepsilon \in]0,1]$$

est un Φ-relèvement de $(\mathcal{PC})$ lorsque :

i) Il existe $(\varepsilon_0, T) \in]0,1] \times \mathbf{R}^*_+$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ le nouveau problème de Cauchy $(\mathcal{PE})$ admet une solution (de classe C^3) sur le domaine $[0,T] \times \mathbf{R}^2$.

ii) Pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, l'expression $v_\varepsilon := v^a_\varepsilon + \varepsilon^{4\,\nu}\, \Phi_\varepsilon(r_\varepsilon)$ est solution de $(\mathcal{PC})$ sur le domaine $[0,T] \times \mathbf{R}^2$.

Les Théorèmes 2.1 et 2.2 sont les conséquences directes du résultat suivant.

Proposition 3.1 *On suppose que v^a est une oscillation compatible avec $(NS)_\varepsilon$. Alors il existe un Φ-relèvement de $(\mathcal{PC})$.*

Soit $v^a := {}^t(q^a, u^{a1}, u^{a2})$ une oscillation compatible avec $(\mathrm{NS})_\varepsilon$. Pour prouver la Proposition 3.1, il suffit d'exhiber un relèvement adéquat $\Phi \equiv (\Phi_\varepsilon)_\varepsilon$. Dans la pratique, les applications Φ_ε sont obtenues en deux étapes qui correspondent à la construction de deux applications intermédiaires notées Φ^1_ε et Φ^2_ε. En fait, on cherche Φ_ε sous la forme $\Phi_\varepsilon = \Phi^2_\varepsilon \circ \Phi^1_\varepsilon$ et on remplace r^b_ε successivement par r^c_ε puis r_ε selon

$$r^b_\varepsilon \ = \ {}^t(r^{b1}_\varepsilon, r^{b2}_\varepsilon, r^{b3}_\varepsilon) \ = \ \Phi^1_\varepsilon(r^c_\varepsilon)\,, \qquad r^c_\varepsilon \ = \ {}^t(r^{c1}_\varepsilon, \cdots, r^{c4}_\varepsilon) \ \in \ \mathbb{R}^4\,,$$

$$r^c_\varepsilon \ = \ {}^t(r^{c1}_\varepsilon, \cdots, r^{c4}_\varepsilon) \ = \ \Phi^2_\varepsilon(r_\varepsilon)\,, \qquad r_\varepsilon \ = \ {}^t(r^1_\varepsilon, \cdots, r^9_\varepsilon) \ \in \ \mathbb{R}^9\,.$$

La construction de Φ^1_ε repose sur une compréhension des mécanismes de propagation des singularités qui sont à l'oeuvre dans la partie hyperbolique de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$, disons au niveau de (E). D'un autre coté, le recours à Φ^2_ε exploite les informations contenues dans la perturbation parabolique $\mathcal{P}^{\mu,\kappa}_{\tau,\nu}(\varepsilon,\partial)$.

3.2 *Construction de* Φ^1_ε.

On note en abrégé $X := \mathcal{O}_{(\nu,0),(5,5)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ et $G := \mathcal{O}_{(\nu,0),(6,6)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. On regarde X comme un ensemble et G comme un groupe (muni de la loi +). On peut faire agir les éléments w^c de G sur ceux de X suivant la formule explicite

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} : G \times X \longrightarrow X \\ &\qquad (w^c, u^c) \longmapsto \big(\mathcal{A}(w^c,u^c)_\varepsilon\big)_\varepsilon := \begin{pmatrix} u^{c1}_\varepsilon - \partial_2(u^{a2}_\varepsilon\, w^c_\varepsilon) \\ u^{c2}_\varepsilon + \partial_1(u^{a2}_\varepsilon\, w^c_\varepsilon) \end{pmatrix}_\varepsilon . \end{aligned}$$

L'action $\mathcal{A}$ ainsi définie est modelée par l'oscillation compatible u^a. Elle préserve l'opérateur de *divergence* au sens où

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(w^c,u^c)_\varepsilon = \operatorname{div} u^c_\varepsilon , \qquad \forall\, (w^c,u^c,\varepsilon) \in G \times X \times]0,1] .$$

Elle permet de définir une relation d'équivalence "$\sim$" via

$$u^c \sim u^b \iff \exists\, w^c \in G ; \quad u^b = \mathcal{A}(w^c,u^c) .$$

Du point de vue algébrique, un élément u^b de X est entièrement déterminé par ses coordonnées dans G et X/G (où le symbole X/G désigne l'espace quotient de X par G). En particulier, pour connaître le flot des vitesses dans les variables de départ u^b (celles qui *à priori* sont observées durant les expériences), il suffit de savoir qui sont w^c et u^c.

L'intérêt d'utiliser w^c et u^c plutôt que directement u^b est le suivant. En régime surcritique, les flots attachés à l'évolution en temps de u^b sont très sensibles sous l'effet de perturbations. Cela étant dit, les variations brutales sont essentiellement le fait de mouvements enregistrés à l'intérieur des orbites de G tandis que les projections des flots dans X/G héritent de meilleurs propriétés de stabilité. En l'occurrence, on a

$$(11) \qquad \| u^b_\varepsilon \|_{L^2} \equiv \| \mathcal{A}(w^c,u^c)_\varepsilon \|_{L^2} \lesssim \| u^c_\varepsilon \|_{L^2} + \varepsilon^{l_2-\nu} \; \| w^c_\varepsilon \|_{L^2} + \varepsilon^{l_2} \; \| w^c_\varepsilon \|_{H^1} .$$

On constate sur l'inégalité (11) que des informations L^2 sur u^c_ε et w^c_ε ne suffisent pas à contrôler (à ε fixé et encore moins uniformément en $\varepsilon \in]0,1]$) la norme L^2 de u^b_ε. Ainsi, décomposer u^b en u^c et w^c (dont on mesure les variations en norme L^2) permet de gérer les éléments u^b_ε de X à l'aide d'une topologie moins fine que L^2 et donc mieux adaptée à des théorèmes de point fixe. Maintenant, pour ajuster w^c, on regarde comment l'action de w^c_ε transforme la troisième équation de $(\mathrm{NS})_\varepsilon$. On obtient (pour des coefficients $A^*_{\varepsilon\star}$ non explicités mais qui sont bornés - et même mieux - en $\varepsilon \in]0,1]$) :

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
&\partial_t u_\varepsilon^{c2} + [u_\varepsilon^{a1} + \varepsilon^n\, u_\varepsilon^{c1} - \varepsilon^n\, \partial_2(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c)]\, \partial_1 u_\varepsilon^{c2} + \mathrm{c}\, (q_\varepsilon^a + \varepsilon^n\, q_\varepsilon^c)\, \partial_2 q_\varepsilon^c - \mathcal{P}_\varepsilon^2\, u_\varepsilon^c \\
&\quad + [2\, u_\varepsilon^{a2} + \varepsilon^n\, u_\varepsilon^{c2} + \varepsilon^n\, \partial_1(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c)]\, \partial_2 u_\varepsilon^{c2} + \mathrm{c}\, \partial_2 q_\varepsilon^a\, q_\varepsilon^c + A_{0\varepsilon}^2\, w_\varepsilon^c + f_\varepsilon^{a2} \\
&\quad - u_\varepsilon^{a2}\, \mathrm{div}\, u_\varepsilon^c + \partial_2 u_\varepsilon^{a2}\, u_\varepsilon^{c2} + (u_\varepsilon^{a1}\, u_\varepsilon^{a2} - 2\, \varepsilon^{2\nu}\, \partial_1 u_\varepsilon^{a2})\, \partial_{11}^2 w_\varepsilon^c + \varepsilon^\kappa\, A_{1\varepsilon}^2\, \partial_1 w_\varepsilon^c \\
&\quad + \Big[(u_\varepsilon^{a2})^2 - 2\, \varepsilon^{2\kappa}\, \partial_2 u_\varepsilon^{a2}\Big]\, \partial_{12}^2 w_\varepsilon^c + A_{2\varepsilon}^2\, \partial_2 w_\varepsilon^c \\
&\quad + \varepsilon^n\, [u_\varepsilon^{c1} - \partial_2(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c)]\, \partial_{11}^2(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c) + \varepsilon^n\, [u_\varepsilon^{c2} + \partial_1(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c)]\, \partial_{12}^2(u_\varepsilon^{a2}\, w_\varepsilon^c) \\
&\quad + \partial_1 \Big\{ u_\varepsilon^{a2} \times \boxed{\, (\partial_t w_\varepsilon^c + u_\varepsilon^{c1} - \varepsilon^{2\kappa}\, \partial_{22}^2 w_\varepsilon^c - \varepsilon^{2\nu}\, \partial_{11}^2 w_\varepsilon^c) \,} \Big\} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Lorsque $w_\varepsilon^c \equiv 0$, la dernière ligne de cette équation se réduit à

$$
\partial_1(u_\varepsilon^{a2}\, u_\varepsilon^{c1}) = (\partial_1 u_\varepsilon^{a2})\, u_\varepsilon^{c1} + u_\varepsilon^{a2}\, (\partial_1 u_\varepsilon^{c1}) \simeq \varepsilon^{\iota_2-\nu}\, u_\varepsilon^{c1} + u_\varepsilon^{a2}\, (\partial_1 u_\varepsilon^{c1})\,.
$$

Elle contient donc la contribution singulière en $\varepsilon^{\iota_2-\nu}$ dont on a remarqué dans le paragraphe 1.2, question **Q1**, qu'elle est responsable des obstructions à la résolution du problème de Cauchy oscillant (E)-(6). L'idée est d'éliminer cette partie singulière tout simplement en imposant

$$
(13)\qquad \partial_t w_\varepsilon^c + u_\varepsilon^{c1} - \varepsilon^{2\kappa}\, \partial_{22}^2 w_\varepsilon^c - \varepsilon^{2\nu}\, \partial_{11}^2 w_\varepsilon^c = 0\,.
$$

Ainsi, l'application Φ_ε^1 est donnée par

$$
r_\varepsilon^b = \begin{pmatrix} r_\varepsilon^{b1} \\ r_\varepsilon^{b2} \\ r_\varepsilon^{b3} \end{pmatrix} := \Phi_\varepsilon^1(r_\varepsilon^c) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u_\varepsilon^{a2}\, \partial_2 - \partial_2 u_\varepsilon^{a2} \\ 0 & 0 & 1 & +u_\varepsilon^{a2}\, \partial_1 + \partial_1 u_\varepsilon^{a2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^{c1} \\ r_\varepsilon^{c2} \\ r_\varepsilon^{c3} \\ r_\varepsilon^{c4} \end{pmatrix}
$$

où la dernière composante $r_\varepsilon^{c4} \equiv w_\varepsilon^c$ est déterminée via la contrainte (13). On constate sur (12) que la mise en jeu d'une inconnue w_ε^c ainsi ajustée induit l'apparition de termes supplémentaires du type

$$
w_{\varepsilon,j}^{c,\beta}(t,x) := \varepsilon^j\, \partial_x^\beta w_\varepsilon^c(t,x)\,, \qquad \beta = (\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{N}^2\,, \qquad j \in \mathbb{N}\,.
$$

Tous les multi-indices β impliqués au niveau de (12) satisfont $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq 2$. L'examen de ce qui se passe sur la première et la seconde équation indique que le procédé produit seulement des $\varepsilon^j\, \partial_x^\beta$ dérivées avec $|\beta| \leq 3$. Maintenant, pour que la démarche ait un sens, il convient de pouvoir absorber via des estimations d'énergie les contributions ainsi générées. C'est à cet endroit de la discussion qu'il devient nécessaire de faire appel aux effets régularisants induits par la viscosité.

3.3 Construction de Φ_ε^2.

L'équation (13) présente deux caractéristiques remarquables :

- ▹ elle ne comporte aucun coefficient oscillant (alors même que le linéarisé de $(NS)_\varepsilon$ le long de l'onde simple v_ε^s en contient beaucoup). De ce fait, il est possible de dériver (13) à la fois dans les directions x_1 et x_2 sans craindre d'introduire des facteurs singuliers en ε.
- ▹ le couplage entre w_ε^c et u_ε^{c1} s'effectue via un opérateur d'ordre zéro. Ainsi, l'introduction des inconnues $w_{\varepsilon,j}^{c,\beta}$ se traduit au niveau de (13) par l'apparition de quantités $\varepsilon^j\, \partial_x^\beta u_\varepsilon^{c1}$ mettant en jeu des multi-indices β tels que $|\beta| \leq 2$. Or, de telles contributions sont susceptibles d'être absorbées par le soupçon de viscosité dont on dispose sur la vitesse.

Précisément, la transformation Φ_ε^2 est alimentée par la prise en compte de cinq nouvelles inconnues ayant la forme

$$w_\varepsilon^{c,\beta} \equiv w_{\varepsilon,j_\beta}^{c,\beta} := \varepsilon^{j_\beta}\, \partial_x^\beta w_\varepsilon^c\,, \qquad 0 < |\beta| \leq 2\,, \qquad j_\beta \in \mathbb{N}$$

pour des entiers j_β convenablement choisis. De (13), on déduit facilement

$$(14) \qquad \partial_t w_\varepsilon^{c,\beta} + \varepsilon^j\, \partial_x^\beta u_\varepsilon^{c1} - \varepsilon^{2\kappa}\, \partial_{22}^2 w_\varepsilon^{c,\beta} - \varepsilon^{2\nu}\, \partial_{11}^2 w_\varepsilon^{c,\beta} = 0\,, \qquad |\beta| \leq 2\,.$$

Le système non linéaire $\mathcal{B}(r_\varepsilon;\partial)\, r_\varepsilon = 0$ qui apparaît au niveau de la Définition 3.2 est obtenu en couplant les équations telles que (12) (c'est à dire issues de $(NS)_\varepsilon$ après intervention de Φ_ε^1) et celles venant de (13) et (14). Les entiers j_β sont ajustés les plus grands possibles mais toutefois assez petits pour pouvoir disposer de stabilité au niveau du système relevé ainsi mis à jour. Le réglage optimal des entiers j_β requiert un travail d'analyse qui est la motivation principale des développements effectués dans l'article [3a].

4 Applications.

La démarche qui est présentée dans [3a] permet de justifier des modèles décrivant la propagation de singularités oscillantes *turbulentes*. Ces modèles reposent sur des calculs BKW de type *surcritiques* tels que ceux développés dans les articles référencés en [3]. Plus précisément, dans [3b], on résout via l'introduction d'une cascade de phases des problèmes de clôture ; dans [3c,3f], on se restreint au cas des ondes simples mais on s'autorise la prise en compte de phases non linéaires ; dans [3d], on constate (cas hyperbolique surcritique) la création d'échelles en $\varepsilon^{-2\nu}$ du fait de l'interaction d'ondes qui oscillent dans des directions transverses à l'echelle $\varepsilon^{-\nu}$; enfin, en sous-produit de [3a], on peut observer que la dissipation (sous l'effet de la viscosité) peut s'accompagner de phénomènes de répartition des échelles vers les basses fréquences.

References

[1] D. Bresch ; B. Desjardins ; D. Gérard-Varet: On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Math. Pures Appl.* **87**, 227–235 (2007)

[2] J.-Y. Chemin ; B. Desjardins ; I. Gallagher ; E. Grenier: Fluids with anisotropic viscosity. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **2**, 315–335 (2000)

[3a] C. Cheverry: A deterministic model for the propagation of turbulent oscillations. *J. Differential Equations* **247** (2009).

[3b] C. Cheverry: Cascade of phases in turbulent flows. *Bulletin de la SMF* **134**, 33–82 (2006)

[3c] C. Cheverry: Recent results in large amplitude monophase nonlinear geometric optics. Bardos, Claude (ed.) et al., Instability in models connected with fluid flows I. *International Mathematical Series* (New York) 6, 267-288 (2008)

[3d] C. Cheverry ; O. Guès: Counter-examples to Concentration-cancellation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **189**, 363–424 (2008)

[3e] C. Cheverry ; O. Guès ; G. Métivier: Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **36**, 691–745 (2003)

[3f] C. Cheverry ; M. Houbad: Compatibility conditions to allow some large amplitude WKB analysis for Burger's type systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **237**, 1429–1443 (2008)

[4] S. Friedlander ; W. Strauss ; M. Vishik: Nonlinear instability in an ideal fluid. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **14**, 187-209 (1997)

[5] F. Gallaire ; D. Gérard-Varet ; F. Rousset: Three-dimensional instability of planar flows. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **186**, 423–475 (2007)

[6] I. Gallagher ; L. Saint-Raymond: On pressureless gases driven by a strong inhomogeneous magnetic field. *SIAM J. Math. Anal.* **36**, 1159–11176 (2005)

[7] E. Grenier: On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **53**, 1067–1091 (2000)

[8] J. Joly ; G. Métivier ; J. Rauch: Recent results in non-linear geometric optics. *Internat. Ser. Numer. Math.* **130**, Birkhäuser, (1999)

[9] T. Makino ; S. Ukai ; S. Kawashima: On the compactly supported solution of the compressible Euler equation. *Japan J. Appl. Math.* **3**, 249–257 (1986)