Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2008-2009

Patrick Gérard et Sandrine Grellier

L'équation de Szegö cubique

Séminaire É. D. P. (2008-2009), Exposé n° II, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2008-2009____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2008-2009
Exposé n° II, 1-19

L'ÉQUATION DE SZEGÖ CUBIQUE

par

Patrick Gérard & Sandrine Grellier

1. Motivation

Le point de départ de ce travail se situe dans le prolongement de travaux récents, dûs à N. Burq, N. Tzvetkov et au premier auteur, consacrés au rôle joué par la géométrie du domaine dans les propriétés qualitatives des solutions d'équations de Schrödinger non linéaires (voir [**5**], [**6**], [**7**] et [**9**] pour un survol) . Plus spécifiquement, on s'intéresse ici à l'équation de Schrödinger non linéaire cubique sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$,

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \ , \tag{1.1}$$

où Δ désigne le sous-laplacien (ou laplacien de Kohn),

$$\Delta = \frac{1}{2}(Z\overline{Z} + \overline{Z}Z) \ , \ Z := \partial_z - i\overline{z}\partial_s \ , \ \overline{Z} := \partial_{\overline{z}} + iz\partial_s \ .$$

Notons que l'énergie

$$E = \int_{\mathbb{H}^1} (|\nabla_h u|^2 + \frac{1}{2}|u|^4) \, |\, dz \, ds| \ ,$$

où $\nabla_h u = (Zu, \overline{Z}u)$ désigne le gradient horizontal de u, est formellement invariante par le flot de (1.1), et possède l'homogénéité de l'espace de Sobolev horizontal $\dot{H}^1_h(\mathbb{H}^1)$. En conséquence, les considérations habituelles de *scaling*, largement confirmées dans l'étude d'équations analogues sur l'espace euclidien, suggèrent l'obtention, au moyen d'une procédure de

point fixe standard, d'une solution globale unique au problème de Cauchy de (1.1) pour toute donnée de Cauchy dans $\dot{H}^1_h(\mathbb{H}^1)$ — du moins de norme petite.
Comme on va le voir, l'issue d'une telle procédure de point fixe est pourtant bien incertaine, puisque le flot obtenu ne peut pas être de classe C^3 dans un voisinage de 0 de $\dot{H}^1_h(\mathbb{H}^1)$. En effet, si l'équation (1.1) définit un flot au voisinage de 0 dans l'espace de Sobolev horizontal $\dot{H}^r_h(\mathbb{H}^1)$, l'argument général de [**6**](remarque 2.12) implique l'estimation suivante "de Strichartz avec perte" pour le groupe à un paramètre linéaire engendré par le sous-laplacien :

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta}f\|_{L^4([0,1]\times\mathbb{H}^1)} \le C\|f\|_{\dot{H}^{r/2}_h(\mathbb{H}^1)} \ . \tag{1.2}$$

Pour simplifier, restreignons-nous au cas de fonctions radiales sur $\mathbb{H}^1$, c'est-à-dire des fonctions de $(|z|, s)$ uniquement. Un résultat classique (voir par exemple [**1**]) établit que l'espace L^2 de ces fonctions radiales s'écrit comme une somme directe orthogonale $\oplus_\pm \oplus_{m=0}^\infty V_m^\pm$, où

$$\Delta_{|V_m^\pm} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s} \ .$$

Dès lors, si $f \in V_m^\pm$, alors

$$e^{it\Delta}f(z,s) = f(z, s \mp (2m+1)t) \ ,$$

de sorte que

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta}f\|_{L^4([0,1]\times\mathbb{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathbb{H}^1)}.$$

Ainsi, compte tenu des inégalités de Sobolev sur $\mathbb{H}^1$, l'inégalité 1.2 a lieu si et seulement si

$$r \ge 2.$$

On constate donc une différence d'une dérivée avec les prédictions dictées par les considérations d'homogénéité, alors que les deux analyses coïncident sur l'espace euclidien. En l'absence d'une loi de conservation contrôlant la norme H^2_h, la perspective d'un théorème d'existence globale de solutions régulières pour l'équation (1.1) s'éloigne brutalement. Notons qu'en revanche un argument élémentaire de compacité permet de construire des solutions faibles globales dans l'espace d'énergie, mais qu'évidemment la question de l'unicité de ces solutions est ouverte, faute d'estimations *a priori* induisant une contraction au niveau de régularité de l'espace d'énergie.

À l'attention d'un lecteur peu friand de l'analyse sur le groupe de Heisenberg, voici un exemple plus terre à terre, cette fois sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec une équation ayant la même homogénéité que l'équation des ondes,

$$i\partial_t u - Au = |u|^2 u \ , \ A = |D_{x_1}| + |D_{x_2}| \ . \tag{1.3}$$

On constate aisément que l'équation (1.3) possède l'homogénéité de l'espace $\dot{H}^{1/2}$, dont la norme est une fois encore contrôlée par l'énergie

$$E = (Au|u)_{L^2} + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 \ .$$

Cette fois, une condition nécessaire à l'existence d'un flot de classe C^3 au voisinage de 0 dans $\dot{H}^r$ est l'estimation

$$\|\mathrm{e}^{-itA} f\|_{L^4([0,1]\times\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{\dot{H}^{r/2}(\mathbb{R}^2)} \ . \tag{1.4}$$

Là encore, le flot linéaire dégénère en un flot de transport grâce à la décomposition

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \oplus_{\sigma\in\{-1,1\}^2} L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \ ,$$

où $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable dont la transformée de Fourier est supportée dans le quart de plan

$$\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2, \sigma_1\xi_1\geq 0, \sigma_2\xi_2 \geq 0\}.$$

En observant que, pour tout $f\in L^2_\sigma$,

$$\mathrm{e}^{-itA} f(x_1,x_2) = f(x_1-\sigma_1 t, x_2-\sigma_2 t) \ ,$$

on constate de même que l'inégalité (1.4) n'a lieu que si $r\geq 1$, soit une perte d'une demi-dérivée par rapport au seuil d'homogénéité associé à la loi de conservation. On notera par ailleurs que, si l'opérateur $A = |D_{x_1}| + |D_{x_2}|$ est remplacé par $|D| = \sqrt{D^2_{x_1}+D^2_{x_2}}$, les deux analyses coïncident à nouveau, et, au moyen d'estimations de Strichartz bilinéaires comme dans Bourgain [**3**], on peut effectivement résoudre la nouvelle équation (1.3) pour des données petites dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Ces deux exemples témoignent de l'inadaptation des considérations d'homogénéité dans le cas où l'équation linéarisée est dépourvue de toute propriété dispersive. Comment, dès lors, trouver des solutions régulières globales à de telles équations semi-linéaires ? Notons que les équations (1.1) et (1.3) ont en commun une structure de système d'équations de

transport couplées selon le schéma suivant : la solution u se décompose en
$$u = \sum_m u_m \ ,$$
et chaque composante $u_m = \Pi_m u$ est solution d'une équation de transport du type
$$i(\partial_t + c_m.\nabla)u_m = \Pi_m(|u|^2 u) \ , \tag{1.5}$$
où les Π_m sont des projecteurs orthogonaux pseudo-différentiels. Pour aborder ce type de système, il est nécessaire de mieux comprendre l'interaction entre l'opérateur non linéaire $u \mapsto |u|^2 u$ et les projecteurs pseudo-différentiels Π_m. L'équation la plus simple où apparaît une telle interaction est l'équation sur $\mathbb{R}$ suivante,
$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u) \ , \tag{1.6}$$
où $\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ désigne le projecteur de Szegö sur les fonctions à spectre positif ou nul. C'est l'équation (1.6) que nous avons choisi d'appeler équation de Szegö cubique, et que nous allons maintenant étudier.

2. Premières lois de conservation et théorie de Cauchy

Pour des raisons techniques, il est plus commode de travailler sur le cercle S^1, ce que nous ferons désormais. Pour toute distribution sur S^1,
$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta},$$
on note
$$\Pi u = \sum_{k\geq 0} \hat{u}(k)e^{ik\theta}.$$
Pour tout sous-espace F of $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, on note
$$F_+ := \{u \in F : \Pi(u) = u\} \ .$$
Ainsi, L^2_+ est l'espace de Hardy usuel des fonctions holomorphes dans le disque unité dont les traces sont L^2 sur le cercle, et Π induit le projecteur orthogonal de L^2 sur L^2_+, dit projecteur de Szegö. Si l'on munit L^2_+ de la forme symplectique
$$\omega(u,v) = 4\,\mathrm{Im}(u|v)_{L^2} = 4\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{S}^1} u\overline{v}\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

l'équation de Szegö cubique (1.6) définit formellement le flot hamiltonien d'énergie

$$E(u) = \int_{\mathbb{S}^1} |u|^4 \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

De cette structure hamiltonienne, on déduit une première loi de conservation,

$$E(u) = E(u(0)) \ . \tag{2.1}$$

De plus, l'invariance de $E(u)$ par la multiplication de u par des nombres complexes de module 1 induit la loi de conservation

$$Q(u) = Q(u(0)) \ , Q(u) := \int_{\mathbb{S}^1} |u|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi} \ , \tag{2.2}$$

tandis que l'invariance par translation sur S^1 induit comme d'habitude la conservation de l'impulsion (ou moment)

$$M(u) := \int_{\mathbb{S}^1} -i\partial_\theta u \, \overline{u} \, \frac{d\theta}{2\pi} \ . \tag{2.3}$$

Notons que, sur $H^{1/2}_+$, on a l'identité

$$Q(u) + M(u) = \sum_{k\geq 0} (1+k)|\hat{u}(k)|^2 = \|u\|^2_{H^{1/2}} \ .$$

Par rapport aux exemples de l'introduction, l'étude du problème de Cauchy pour (1.6) se trouve simplifiée par ces lois de conservation.

Théorème 2.1. — *Pour tout $u_0 \in H^{1/2}_+(\mathbb{S}^1)$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(\mathbb{S}^1))$ of (1.6) telle que $u(0) = u_0$. De plus, si $u_0 \in H^s_+(\mathbb{S}^1)$ pour un $s > \frac{1}{2}$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{S}^1))$.*

Disons quelques mots sur les ingrédients désormais classiques de la démonstration. Si $s > 1/2$, l'existence locale de solutions H^s est conséquence des propriétés d'algèbre de H^s ainsi que de l'action de Π sur H^s. L'existence globale provient de l'inégalité suivante, qui est une adaptation à ce cadre d'une inégalité de Brezis-Gallouët [**4**],

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_{H^{1/2}} \left[\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.4}$$

Pour la théorie $H^{1/2}$, l'existence de solutions faibles globales est une conséquence facile des lois de conservation et d'arguments élémentaires de compacité, tandis que l'unicité est établie par une démonstration “à la Yudovich” [**22**], [**19**], [**15**], fondée sur l'inégalité

$$\forall p < \infty \,,\ \|u\|_{L^p} \leq C\,\sqrt{p}\,\|u\|_{H^{1/2}} \quad .$$

On dispose donc d'un flot global sur $H^{1/2}_+$. Une question naturelle, rejoignant la problématique de l'introduction, serait d'étendre ce flot à l'espace d'énergie L^4_+, voire même à l'espace L^2_+. A ce stade, il n'est peut-être pas inutile de comparer (1.6) à l'équation élémentaire "sans Π",

$$i\partial_t u = |u|^2 u \ ,$$

dont la solution

$$u(t) = u(0)\mathrm{e}^{-it|u(0)|^2}$$

a évidemment un sens pour tout $u \in L^2$! Cette remarque suggère de rechercher des solutions explicites à (1.6), ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

3. Ondes progressives

L'action du groupe $S^1 \times S^1$ sur l'équation (1.6) posée sur le cercle suggère la définition suivante.

Définition 1. — *Une solution φ de l'équation (1.6) est une onde progressive s'il existe des nombres réels c et ω tels que*

$$\varphi\left(t, e^{i\theta}\right) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\,\varphi_0\left(e^{i(\theta - ct)}\right) \ .$$

De façon équivalente, une donnée de Cauchy φ_0 induit une onde progressive de vitesse c et de vitesse angulaire ω si

$$-ic\partial_\theta\varphi_0 + \omega\varphi_0 = \Pi(|\varphi_0|^2\varphi_0) \tag{3.1}$$

ou encore, si la fonction

$$E - 2cM - 2\omega Q$$

a un point critique en φ_0. Comme dans la théorie de Weinstein pour l'équation de Schrödinger non linéaire [**20**], [**21**], l'équation des ondes progressives (3.1) admet des solutions états fondamentaux minimisant une inégalité de Gagliardo -Nirenberg.

Lemme 1. — *Pour tout* $u \in H_+^{1/2}$,

$$Q(u)(Q(u) + 2M(u)) \geq E(u),$$

avec égalité si et seulement si

$$u(z) = \frac{\alpha}{1 - pz}$$

pour $\alpha \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{C}, |p| < 1$.

La démonstration de ce lemme est élémentaire. Par la formule de Parseval,

$$E(u) = \|u\|_{L^4}^4 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{\ell=0}^{k} \hat{u}(\ell)\hat{u}(k-\ell) \right|^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell=0}^{k} \hat{u}(\ell)\hat{u}(k-\ell) \right|^2 &\leq (k+1) \sum_{\ell=0}^{k} |\hat{u}(\ell)|^2 |\hat{u}(k-\ell)|^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} (2\ell+1) |\hat{u}(\ell)|^2 |\hat{u}(k-\ell)|^2 \end{aligned}$$

et l'inégalité cherchée s'ensuit en sommant sur k. De plus, l'égalité a lieu si et seulement l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessus est une égalité pour tout k, ce qui équivaut à

$$\forall m, \forall n, \hat{u}(m)\hat{u}(n) = \hat{u}(0)\hat{u}(m+n)$$

ce qui traduit l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ et de $p \in \mathbb{C}$ tels que

$$\hat{u}(n) = \alpha p^n .$$

Bien sûr $|p| < 1$ découle de $u \in L_+^2$.

Une première conséquence de ce lemme est l'obtention de solutions ondes progressives orbitalement stables.

Corollaire 1. — *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}^*$, *pour tout* $p \in \mathbb{C}$ *tel que* $|p| < 1$, *la fonction*

$$\varphi_{\alpha,p}(z) = \frac{\alpha}{1 - pz}$$

est la donnée initiale d'une onde progressive dont les vitesses sont données par

$$c = Q(\varphi_{\alpha,p}) = \frac{|\alpha|^2}{1-|p|^2}\ ,\ \omega = M(\varphi_{\alpha,p}) + Q(\varphi_{\alpha,p}) = \frac{|\alpha|^2}{(1-|p|^2)^2}\ .$$

De plus, cette solution est orbitalement stable au sens suivant : pour tout couple (a,r) *de* $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$*, pour toute donnée* $u_0 \in H_+^{1/2}$*, la solution correspondante* u *vérifie*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{|\alpha|=a, |p|=r} \|u(t) - \varphi_{\alpha,p}\|_{H^{1/2}} \to 0$$

dès que

$$\inf_{|\alpha|=a,|p|=r} \|u_0 - \varphi_{\alpha,p}\|_{H^{1/2}} \to 0\ .$$

Une seconde conséquence de l'existence de ces solutions explicites est que, si un flot sur l'espace d'énergie existe, il est nécessairement de type "quasilinéaire" au sens de [**18**].

Corollaire 2. — *Il existe des familles bornées* u_0^ε*,* $\tilde{u}_0^\varepsilon$ *de* L_+^4 *telles que*

$$\|u_0^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{L^4} \to 0 \text{ mais } \forall t \neq 0,\ \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon(t) - \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{L^4} > 0\ .$$

On a la même conclusion si L_+^4 *est remplacé par* H_+^s*,* $s < 1/2$ *.*

Traitons par exemple le cas de L^4. On part de l'identité élémentaire

$$\|\varphi_{\alpha,p}\|_{L^4}^4 = \frac{|\alpha|^4(1+|p|^2)}{(1-|p|^2)^3}\ .$$

L'idée, inspirée de [**2**] (voir aussi [**5**]), est alors de choisir

$$u_0^\varepsilon = \varphi_{\varepsilon^{3/4},\sqrt{1-\varepsilon}}\ ,\ \tilde{u}_0^\varepsilon = \varphi_{\varepsilon^{3/4}(1+\delta),\sqrt{1-\varepsilon}}\ ,$$

avec $\delta \to 0$ de sorte que

$$\|u_0^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{L^4} \to 0.$$

On estime explicitement $\|u^\varepsilon(t) - \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{L^4}^4$ en remarquant que les vitesses vérifient $\tilde{c} - c = \varepsilon^{1/2}\delta(2+\delta)$. Il suffit alors de choisir δ pas trop petit pour que $\delta\varepsilon^{-1/2} \to \infty$, ce qui entraîne

$$\frac{\tilde{c} - c}{\varepsilon} \to \infty$$

et assure que, lorsque ε tend vers 0,

$$\|u^\varepsilon(t) - \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{L^4}^4 = \|u^\varepsilon(t)\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}^\varepsilon(t)\|_{L^4}^4 + o(1),$$

d'où le résultat.

La question de l'existence d'un flot sur l'espace d'énergie demeure donc ouverte, ce qui est d'autant plus regrettable que l'on peut trouver formellement des solutions ondes stationnaires qui ne sont pas dans $H^{1/2}$.

Proposition 1. — *Les solutions de l'équation (3.1) avec $c = 0$,*

$$\omega\varphi = \Pi(|\varphi|^2\varphi)$$

sont les fonctions $\varphi \in L^\infty_+$ telles que

$$|\varphi|^2 = \omega$$

sur S^1, c'est-à-dire telles que $\varphi/\|\varphi\|_{L^2}$ soit une fonction intérieure au sens de Beurling (voir [**17**]*).*

Si de plus $\varphi \in H^{1/2}_+$, il est facile de voir que φ est nécessairement un produit de Blaschke fini,

$$\varphi(z) = C \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \overline{p}_j}{1 - p_j z} \ .$$

En revanche, il existe beaucoup d'autres fonctions intérieures qui ne sont pas dans $H^{1/2}$, par exemple les produits de Blaschke infinis ou la fonction

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \ .$$

La possibilité de perturber de telles solutions stationnaires, par exemple dans l'espace de Hardy L^∞_+, demeure donc un problème ouvert.

4. Opérateurs de Hankel et paire de Lax

Dans cette dernière partie, nous montrons une propriété inattendue de l'équation (1.6), à savoir qu'elle possède une paire de Lax au sens de [**12**]. Nous esquissons quelques conséquences de cette propriété de complète intégrabilité.

4.1. Opérateurs de Hankel sur le cercle. — Pour toute fonction $b \in L^\infty(S^1)$, on définit l'opérateur de Hankel $H_b : L^2_+ \to L^2_+$ par

$$H_b(h) = \Pi(b\overline{h}) \ .$$

De tels opérateurs jouent un rôle important dans diverses questions d'analyse harmonique et de théorie du contrôle. On renvoie à Peller [**16**] et Nikolski [**14**] pour des exposés récents de la théorie. Comme on va le voir, ces opérateurs sont des outils clé pour la compréhension de la dynamique de l'équation (1.6). On notera que H_b est $\mathbb{C}$-antilinéaire et que

$$(H_b(h_1)|h_2) = (H_b(h_2)|h_1),$$

en particulier H_b est symétrique pour le produit scalaire $\mathrm{Re}(u|v)$ sur L^2_+. L'identité élémentaire

$$H_b = H_{\Pi(b)}$$

permet de se ramener au cas où $b \in L^\infty_+(S^1)$. Un résultat de Nehari dit que H_u est encore borné sur L^2_+ si u est seulement dans l'espace BMO_+, et qu'on a l'équivalence de normes

$$\|H_u\|_{L^2_+ \to L^2_+} \simeq \|u\|_{BMO_+} + |(u|1)| \ .$$

Pour $u \in \mathcal{D}'_+$, il est facile de montrer que H_u est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $u \in H^{1/2}_+$, et que

$$\mathrm{Tr}(H_u^2) = M(u) + Q(u) \ .$$

Ce résultat a été généralisé à toutes les classes de Schatten par Peller puis Semmes, qui ont établi que, pour $0 < p < \infty$,

$$\mathrm{Tr}(|H_u|^p) \simeq \|u\|^p_{B^p} \ ,$$

où B^p désigne l'espace de Besov $B^{\frac{1}{p}}_{p,p}(S^1)$.

4.2. Une paire de Lax pour l'équation de Szegö cubique. — Introduisons trois autres notations. Pour $b \in L^\infty(S^1)$, l'opérateur de Toeplitz de symbole b est donné par

$$T_b(h) := \Pi(bh) \ .$$

Cet opérateur est bien sûr $\mathbb{C}$ -linéaire, et est auto-adjoint dès que la fonction b est à valeurs réelles.

D'autre part, pour tout $u \in L^\infty_+(S^1)$, on note

$$K_u(h) = u\overline{(1-\Pi)(u\overline{h})}$$

Là encore, K_u est $\mathbb{C}$-linéaire, et est auto-adjoint pour tout u en vertu de

$$(K_u(h_1)|h_2)_{L^2} = (u\overline{h_2}|(1-\Pi)(u\overline{h_1}))_{L^2} = (h_1|K_u(h_2))_{L^2} \ ,$$

puisque Π est auto-adjoint.

Enfin, pour tout $u \in L^\infty_+$, on introduit l'opérateur anti-adjoint

$$B_u = -\frac{i}{2}(T_{|u|^2} + K_u) \ .$$

Le résultat principal de ce paragraphe est alors

Théorème 4.1. — *Pour tout $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+)$, $s > 1/2$, l'équation de Szegö cubique*

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$$

est équivalente à l'équation

$$\frac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u] \ . \tag{4.1}$$

En d'autres termes, (H_u, B_u) est une paire de Lax pour l'équation de Szegö cubique.

La démonstration du théorème 4.1 est une conséquence très simple de la double identité

$$H_{|u|^2u} = T_{|u|^2}H_u + H_uK_u = H_uT_{|u|^2} + K_uH_u \ . \tag{4.2}$$

Pour montrer cette double identité, il suffit de montrer la première identité, puis de prendre les adjoints réels de chaque membre. Pour $h \in L^2_+$, on vérifie alors que

$$T_{|u|^2}H_u(h) + H_uK_u(h) = \Pi(|u|^2\Pi(u\overline{h})) + \Pi(u\overline{u}(1-\Pi)(u\overline{h})) = \Pi(|u|^2u\overline{h}) \ .$$

Ensuite, puisque B_u est anti-adjoint pour le produit scalaire hermitien, donc antisymétrique pour le produit scalaire réel, et puisque H_u est $\mathbb{C}$-antilinéaire, il vient

$$[B_u, H_u] = -\frac{i}{2}((T_{|u|^2} + K_u)H_u + H_u(T_{|u|^2} + K_u)) = H_{-i|u|^2u} = H_{-i\Pi(|u|^2u)} \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Une conséquence importante de ce théorème est bien sûr que l'équation de Szegö cubique admet une infinité de lois de conservation. En effet, suivant [**12**], on introduit la famille $U(t)$ d'opérateurs unitaires solution de

$$\frac{d}{dt}U = B_u U\ ,\ U(0) = I\ ,$$

et on observe que (4.1) assure que

$$U(t)^* H_{u(t)} U(t) = H_{u(0)}$$

pour tout t. En d'autres termes, le spectre de $H_{u(t)}$ est indépendant de t. En utilisant les résultats de Nehari, Peller et Semmes cités ci-dessus, il s'ensuit que les normes BMO et B^p de $u(t)$ sont essentiellement conservées. En particulier, en utilisant de plus le lemme de Gronwall, on obtient

Corollaire 3. — *Pour tout $u_0 \in B^1_+$, $u(t) \in B^1_+$ pour tout t et sa norme reste bornée pour tout t. Si $u_0 \in H^s_+$, $s > 1$, on a de plus*

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq C\|u_0\|_{H^s}\, \mathrm{e}^{Ct\|u_0\|^2_{B^1}}\ . \tag{4.3}$$

Notons que l'estimation (4.3) est une amélioration notable de l'estimation en double exponentielle fournie par l'inégalité de Brezis-Gallouët (2.4). Nous reviendrons un peu plus loin sur les estimations des normes H^s en grand temps.

En outre, il existe une autre classe de lois de conservation, reliée à l'évolution de la mesure spectrale sous H_u du vecteur 1 de L^2_+ . En observant que

$$B_u(1) = -\frac{i}{2} H_u^2(1),$$

on montre facilement à partir de (4.1) le résultat suivant.

Corollaire 4. — *La mesure spectrale de* 1 *sous H_u^2 est indépendante de t, au sens où, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornée sur le spectre de $H^2_{u_0}$,*

$$(f(H^2_{u(t)})(1)|1) = (f(H^2_{u_0})(1)|1)\ .$$

De plus, si on note

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_t(\lambda) = (H_{u(t)} f(H^2_{u(t)})(1)|1)\ ,$$

on a

$$\mu_t(\lambda) = \mathrm{e}^{-it\lambda}\mu_0(\lambda) \ .$$

Pour tout entier naturel n, posons

$$J_n(u) := (H_u^n(1)|1) \ .$$

Le corollaire ci-dessus assure que J_n est une loi de conservation pour tout entier n pair. On retrouve ainsi $Q = J_2$ et $E = 2J_4 - J_2^2$, mais on peut aussi noter que

$$J_6(u) = \|\Pi(|u|^2u)\|_{L^2}^2 + \|u\Pi(|u|^2)\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^6}^6 \ .$$

Enfin, l'usage de la fonction borélienne $f = \mathbf{1}_{\{0\}}$ conduit au fait que

$$S(u) := \inf_{h\in L^2_+} \|1 - H_u(h)\|_{L^2}^2 = \mathrm{dist}(1, \mathrm{Im}(H_u))^2$$

est aussi une loi de conservation.

4.3. Variétés de dimension finie invariantes.— Pour tout entier $N \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}(N, N-1)$ l'ensemble des fractions rationnelles de la forme

$$u = \frac{A}{B} \ ,$$

où $A \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$, $B \in \mathbb{C}_N[X]$, $B(0) = 1$, $d(A) = N-1$ ou $d(B) = N$, A et B sont premiers entre eux, et les zéros de B sont tous de module > 1. Il est clair que $\mathcal{M}(N, N-1)$ est une sous-variété complexe de dimension $2N$ de L^2_+, contenue dans tous les H^s. Notons que $\mathcal{M}(1, 0)$ n'est autre que la variété des $\varphi_{\alpha,p}$ pour $\alpha \neq 0$ et $|p| < 1$. Un théorème de Kronecker établit que $\mathcal{M}(N, N-1)$ est exactement l'ensemble des u tels que l'opérateur H_u est de rang N. On en déduit

Proposition 2. — *Si $u_0 \in \mathcal{M}(N, N-1)$, alors, pour tout t, $u(t) \in \mathcal{M}(N, N-1)$.*

Génériquement, un point de $\mathcal{M}(N, N-1)$ s'écrit

$$u = \sum_{j=1} \frac{\alpha_j}{1 - p_j z} \ , \tag{4.4}$$

où les p_j sont des éléments non nuls du disque unité. L'équation (1.6) devient alors un système d'équations différentielles ordinaires,

$$
\left\{
\begin{aligned}
i\dot\alpha_j &= \sum_k \frac{\alpha_j^2\overline{\alpha_k}}{(1-p_j\overline{p_k})^2} + 2\sum_k\sum_{\ell\neq j}\frac{\alpha_j\overline{\alpha_k}\alpha_\ell\, p_j}{(p_j-p_\ell)(1-p_j\overline{p_k})}\ ,\\
i\dot p_j &= \sum_k \frac{\alpha_j\overline{\alpha_k}}{1-p_j\overline{p_k}}\, p_j\ ,
\end{aligned}
\right.
\tag{4.5}
$$

avec en particulier les lois de conservation

$$
Q=\sum_{j,k}\frac{\alpha_j\overline{\alpha}_k}{1-p_j\overline{p}_k}\ ,\ M=\sum_{j,k}\frac{\alpha_jp_j\overline{\alpha}_k\overline{p}_k}{(1-p_j\overline{p}_k)^2}\ ,
$$

$$
E=\sum_{j,k,l,m}\frac{\alpha_j\overline{\alpha}_k\alpha_l\overline{\alpha}_m(1-p_j\overline{p}_kp_l\overline{p}_m)}{(1-p_j\overline{p}_k)(1-p_j\overline{p}_m)(1-p_l\overline{p}_k)(1-p_l\overline{p}_m)}\ ,\ S=|p_1\cdots p_N|^2\ .
$$

Bien sûr, il peut arriver que les p_j se croisent, il faut alors changer de carte pour suivre l'évolution.

Appelons $\tilde{\mathcal M}(N-1,N-1)$ l'hypersurface de $\mathcal M(N,N-1)$ définie par $S=0$. Les éléments de $\tilde{\mathcal M}(N-1,N-1)$ ont un numérateur A de degré exactement $N-1$, tandis que le dénominateur B est de degré au plus $N-1$; par exemple, un polynôme de degré exactement $N-1$ appartient à $\tilde{\mathcal M}(N-1,N-1)$. Il découle de la proposition précédente que la variété $\tilde{\mathcal M}(N-1,N-1)$ est invariante par le flot. Remarquons que ses éléments génériques sont encore de la forme (4.4), avec toutefois l'un des p_j, disons p_N, égal à 0. L'évolution générique est donc encore donnée par le système (4.5), avec $p_N=0$, et la loi S est remplacée par

$$
\tilde S = |\,\alpha_Np_1\cdots p_{N-1}|^2\ ,
$$

que l'on peut interpréter de la manière suivante : puisque $1\in \mathrm{Im}(H_u)$, on peut écrire

$$
1=H_u(w)
$$

avec $w\in \mathrm{Im(H_u)}$ unique. Alors on vérifie que

$$
\tilde S=\frac{1}{\|w\|_{L^2}^2}=\frac{1}{(f(H_u^2)(1)|1)}\ ,\ f(\lambda):=\frac{\mathbf 1_{]0,+\infty[}}{\lambda}\ .
$$

4.4. Évolution sur $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$ et instabilité des ondes stationnaires.— L'équation de Szegö cubique définit un système hamiltonien à trois degrés de liberté sur la variété kählerienne $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$, et admettant les trois lois de conservation en involution $Q, M, \tilde{S}$. Ce système est donc complètement intégrable. On peut pourtant mettre en évidence certains phénomènes d'instabilité pour l'évolution qu'il décrit.

Pour commencer, observons que les ondes stationnaires de $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$,

$$u = C\frac{z-\overline{p}}{1-pz}$$

sont caractérisées par la colinéarité des vecteurs $H_u(u)$ et 1, ou encore celle de u et de w, ce qui s'écrit

$$|(u|w)|^2 = \|u\|^2\|w\|^2$$

soit encore

$$Q = \tilde{S}\ .$$

Plaçons-nous donc dans la situation $Q > \tilde{S}$. En notant

$$u = \frac{az+b}{1-pz}$$

le point courant dans $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$, on réduit l'équation de Szegö cubique au système linéaire suivant en les inconnues $a, J_1 = (u|1) = b, J_3 = (H_u^3(1)|1) = Ma\overline{p} + (M+Q)b$,

$$i\dot{a} = Qa\ ,\ i\dot{J}_1 = J_3\ ,\ i\dot{J}_3 = (M+Q)J_3 - M\tilde{S}J_1\ .$$

En résolvant explicitement ce système, on constate que $|p|^2$ est une fonction trigonométrique de t, de pulsation Ω donnée par

$$\Omega^2 = (M+Q)^2 - 4M\tilde{S}$$

et oscillant entre les valeurs ρ_- et ρ_+ données par

$$0 \le \rho_- = \frac{M+\tilde{S}-2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q+M-2\sqrt{M\tilde{S}}} < \rho_+ = \frac{M+\tilde{S}+2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q+M+2\sqrt{M\tilde{S}}} < 1\ .$$

Partons par exemple de

$$u_0^\varepsilon(z) = z + \varepsilon,$$

qui approche l'onde stationnaire $\varphi = z$ lorsque le paramètre ε tend vers 0. Alors on calcule facilement

$$\rho_-^\varepsilon = 0\ ; \rho_+^\varepsilon = 4(4+\varepsilon^2)^{-1} \to 1\ ;\ \Omega^\varepsilon = \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2}.$$

Il en résulte que, pour tout $r\in]0,1[$, il existe une famille de temps t^ε tendant vers l'infini tels que $|p^\varepsilon(t^\varepsilon)|=r$. Puisque $Q(u_0^\varepsilon)$ et $\tilde S(u_0^\varepsilon)$ tendent vers 1, toute valeur d'adhérence dans $H^{1/2}$ (faible ou fort) de $u^\varepsilon(t^\varepsilon)$ est du type

$$\psi=C\frac{z-\overline{p}}{1-pz}\ ,\ |C|=1\ ,\ |p|=r\ .$$

L'onde stationnaire $\varphi=z$ est donc orbitalement instable. Une modification de ce calcul permet d'établir le même résultat pour toutes les ondes stationnaires de $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$.

En outre, le même exemple montre que, pour un (autre) temps t^ε bien choisi de l'ordre de $1/\varepsilon$, on aura

$$|p^\varepsilon(t^\varepsilon)|^2=\rho_+^\varepsilon$$

donc, pour tout $s>1/2$,

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^s}\sim\frac{1}{(1-\rho_+^\varepsilon)^{s-\frac12}}\simeq\frac{1}{\varepsilon^{2s-1}}\simeq(t^\varepsilon)^{2s-1}\ .$$

En d'autres termes, on a montré que, même pour une famille de données de Cauchy bornée dans C^∞, la norme H^s peut exploser en temps infini au moins aussi vite que t^{2s-1}. Précisons bien qu'il s'agit d'une explosion sur une *famille* de données, puisque le fait que $\sup_{t\in\mathbb{R}}|p(t)|^2\le\rho_+<1$ assure que, pour toute donnée $u_0\in\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$, pour tout s,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^s}<+\infty\ .$$

Nous résumons ces observations dans l'énoncé suivant.

Théorème 4.2. — *L'évolution de l'équation de Szegö cubique dans $\tilde{\mathcal{M}}(1,1)$ possède les propriétés suivantes.*

1. *Les ondes stationnaires sont orbitalement instables.*
2. *Toute solution vérifie, pour tout $s\ge 0$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^s}<+\infty.$$

3. *Il existe une partie bornée $\mathcal{B}$ de C_+^∞ telle que, pour tout $s>1/2$,*

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{u_0\in\mathcal{B}}\frac{\|u(t)\|_{H^s}}{1+|t|^{2s-1}}>0\ .$$

Remarquons qu'une forme faible de la propriété 3 dans le théorème ci-dessus a été établie récemment pour l'équation de Schrödinger non linéaire cubique défocalisante sur le tore bidimensionnel par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, Tao [**8**], sous le nom de "turbulence faible". Le théorème ci-dessus montre qu'une telle propriété peut avoir lieu bien que toute solution *individuelle* reste uniformément bornée dans H^s (propriété 2), et de surcroît pour des systèmes complètement intégrables. Notons aussi que la propriété 3 n'a pas lieu pour des équations complètement intégrables telles que l'équation de Korteweg de Vries ou l'équation de Schrödinger non linéaire cubique monodimensionnelle, dont on vérifie que les lois de conservation contrôlent toutes les normes H^s (voir par exemple Lax [**13**] dans le cas de KdV, et Zakharov-Shabat [**23**] dans le cas de NLS).

4.5. Perspectives. — Les résultats précédents soulèvent évidemment de nombreuses questions. La plus simple consiste à généraliser la propriété (2) du théorème 4.2 à toutes les données C^∞_+, voire seulement à toutes les données dans $\mathcal{M}(N, N-1)$ pour tout N. Nous disposons de résultats partiels dans cette direction (par exemple le cas $N = 2$).

Un autre problème naturel est la classification de toutes les ondes progressives, et l'étude de leur stabilité orbitale.

Plus naturel encore est de savoir si le programme de résolution de l'équation de Korteweg de Vries ou l'équation de Schrödinger non linéaire cubique monodimensionnelle par la méthode spectrale inverse peut se généraliser à l'équation de Szegö cubique, et dans quelle mesure notre paire de Lax pourrait permettre de construire des solutions avec des données moins régulières que $H^{1/2}$.

Enfin, pour revenir à la problématique de l'introduction, il serait utile de savoir mettre en oeuvre une théorie KAM sur l'équation de Szegö cubique, comme l'ont fait par exemple Kuksin [**11**] et Kappeler et Pöschel [**10**] pour KdV, afin de construire des solutions globales régulières à l'équation non dispersive

$$i\partial_t u - Au = |u|^2 u \ , \ A = |D_{x_1}| + |D_{x_2}| \ , \tag{4.6}$$

ce qui demeure un problème ouvert.

Références

[1] Bahouri, H., Gérard, P., Xu, C.J. : *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg*, Journal d'Analyse Mathématique, 82, 93-118 (2000).

[2] Birnir, B., Kenig, C., Ponce, G., Svansted, N., Vega, L. : *On the ill-posedness of the IVP for the generalized KdV and nonlinear Schrödinger equation.* J. London Math. Soc. 53, 551-559 (1996).

[3] Bourgain, J. : *Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D NLS with critical nonlinearity*, IMRN, 5, 253-283 (1998).

[4] Brezis, H., Gallouët, T. : *Nonlinear Schrödinger evolution equations.* Nonlinear Anal. 4, 677-681 (1980).

[5] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N. : *An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d.* Math. Res. Lett., 9, 323–335 (2002).

[6] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N. : *Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces.* Invent. math. 159, 187-223 (2005)

[7] Burq, N., Gérard, P., Tzvetkov, N. : *Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 38, 255-301 (2005).

[8] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H., Tao, T., : *Weakly turbulent solutions for the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation*, preprint, 2008, arXiv : 08081742v2 [math.AP].

[9] Gérard, P. : *Nonlinear Schrödinger equations in inhomogeneous media : wellposednes and illposedness results.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society.

[10] Kappeler, T., Pöschel, J. : *KdV & KAM*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 45, Springer-Verlag, 2003.

[11] Kuksin, S. B. : *Analysis of Hamiltonian PDEs.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 19. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[12] Lax, P. : *Integrals of Nonlinear equations of Evolution and Solitary Waves*, Comm. Pure and Applied Math. 21, 467-490 (1968).

[13] Lax, P. : *Periodic solutions of the the KdV equation.* Comm. Pure Appl. Math. 28 , 141–188 (1975).

[14] Nikolski, N. K. : *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz.* Translated from the French by Andreas Hartmann. Mathematical Surveys and Monographs, 92. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[15] Ogawa, T. : *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations.* Nonlinear Anal. 14, 765–769 (1990).

[16] Peller, V. V. : *Hankel operators and their applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[17] Rudin, W. : *Real and Complex Analysis*, Mac Graw Hill, Second edition, 1980.

[18] Tzvetkov, N. : *A la frontière entre EDP semi et quasi linéaires*, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université Paris-Sud, Orsay, 2003.

[19] Vladimirov, M. V. : *On the solvability of a mixed problem for a nonlinear equation of Schrödinger type.* Sov. math. Dokl. 29, 281-284 (1984).

[20] Weinstein, M. *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates.* Comm. Math. Phys. 87 567–576 (1982/83).

[21] Weinstein, M. : *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations.* Comm. Pure Appl. Math. 39 , 51–67 (1986).

[22] Yudovich, V. I. : *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid.* (Russian) Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. 3, 1032–1066 (1963).

[23] Zakharov, V. E., Shabat, A. B. : *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media.* Soviet Physics JETP 34 (1972), no. 1, 62–69.

Patrick Gérard, Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628, France • *E-mail :* patrick.gerard@math.u-psud.fr

S. Grellier, MAPMO-UMR 6628, Département de Mathématiques, Université d'Orleans, 45067 Orléans Cedex 2, France
E-mail : Sandrine.Grellier@univ-orleans.fr