Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2007-2008

Jean-Marc Delort

Stabilité en temps grand pour les petites solutions d'équations de Klein-Gordon quasilinéaires sur $\mathbb{S}^1$

Séminaire É. D. P. (2007-2008), Exposé n° XI, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2007-2008____A11_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2007-2008
Exposé n° XI, 1-17

Stabilité en temps grand pour les petites solutions d'équations de Klein-Gordon quasilinéaires sur $\mathbb{S}^1$

J.-M. DELORT

Introduction

Nous présentons dans cet exposé des résultats récents [6] concernant le problème de l'existence en temps grand de solutions à données petites régulières d'équations de Klein-Gordon quasi-linéaires sur $\mathbb{S}^1$. Nous obtenons en parallèle des estimations uniformes $H^s(s \gg 1)$ de ces solutions. De manière générale, lorsque la nonlinéarité de l'équation s'annule à l'ordre $\kappa+1$ en 0, la théorie locale fournit des solutions définies sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-\kappa}$. Le but de l'étude est d'obtenir des solutions définies sur des intervalles de longueur $c\varepsilon^{-\kappa-\alpha}$ avec $\alpha > 0$, et des bornes uniformes pour les normes Sobolev en espace sur de tels intervalles.

La spécificité d'un tel problème sur une variété compacte comme $\mathbb{S}^1$ réside dans le fait que les propriétés dispersives de l'équation ne fournissent pas de décroissance des solutions linéaires lorsque $t \to +\infty$, et n'aident donc pas à la construction de solutions définies sur de grands intervalles de temps. La méthode utilisée pour pallier cette difficulté, depuis les travaux de Bourgain [5] consacrés au cas semi-linéaire, est celle des formes normales, qui permet essentiellement d'augmenter l'ordre d'annulation de la nonlinéarité à l'origine. De telles idées, classiques en dimension finie, ont été utilisées également pour l'étude de problèmes dispersifs (sur $\mathbb{R}^d$) par Shatah [11], puis de nombreux autres auteurs, dont en particulier Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [10].

Nous exposons ici des résultats valables pour des équations quasi-linéaires. La difficulté supplémentaire par rapport au cas semi-linéaire réside bien entendu dans la perte de dérivées provenant du caractère quasi-linéaire de l'équation. Après avoir rappelé cela dans la première section, nous mettons en place les outils qui permettent classiquement de compenser une telle perte, à savoir la paradiagonalisation du symbole principal de l'équation. Comme nous l'expliquons ci-dessous, nous devons pour cela utiliser des symboles paradifférentiels dont la variable de phase varie dans un ensemble discret i.e. des symboles correspondant à des opérateurs globaux sur $\mathbb{S}^1$. Nous définissons et étudions ces symboles dans les sections 2 et 3, et concluons la preuve du théorème dans la section 4.

I Énoncé du théorème et stratégie de preuve

Soit $V : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ un potentiel C^∞. On considère l'équation de Klein-Gordon quasi-linéaire

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&\partial_t^2 v + (1 + c(v, \partial_t v, \partial_x v))^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + m^2\right] v = 0\\
&v_{|t=0} = \varepsilon v_0\\
&\partial_t v_{|t=0} = \varepsilon v_1
\end{aligned}
$$

où $m \in]0, +\infty[$, c est un polynôme homogène de degré impair $\kappa, \varepsilon > 0$ un petit paramètre, et où $v_0 \in H^{s+1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}), v_1 \in H^s(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ avec s assez grand. On sait alors, par la théorie locale de résolution des équations quasi-linéaires, que la solution de (1) existe sur un intervalle de temps minoré par $c\varepsilon^{-\kappa}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, si s est suffisamment grand. Le but de l'exposé est de prouver que pour presque toute valeur de m, la solution se prolonge à un intervalle de longueur minorée par $c\varepsilon^{-2\kappa}$.

Théorème 1 *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{N} \subset]0, +\infty[$, de mesure nulle, et pour tout $m \in]0, +\infty[-\mathcal{N}$, il existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \geq s_0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$ tels que lorsque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et (v_0, v_1) est dans la boule unité de $H^{s+1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$, (1) admet une unique solution*

$$
v \in C_b^0(] - T_\varepsilon, T_\varepsilon[; H^{s+1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})) \cap C_b^1(] - T_\varepsilon, T_\varepsilon[; H^s(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}))
$$

avec $T_\varepsilon \geq c\varepsilon^{-2\kappa}$ ($C_b^j(I, E)$ désignant l'espace des fonctions C^j, bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à j, définies sur I à valeurs dans E).

Remarques :

- Le théorème se généralise au cas où c est somme de composantes homogènes de degré impair supérieur ou égal à κ.
- Dans le cas particulier $\kappa = 1$ et $V \equiv 0$ (i.e. lorsque la nonlinéarité est quadratique), il a été prouvé dans [7] que le résultat est vrai pour tout

$m \in]0, +\infty[$. De plus, pour les nonlinéarités quadratiques et le potentiel nul, le théorème est vrai sur le tore $\mathbb{T}^d (d \geq 1)$.

• Dans le cas semi-linéaire, i.e. pour une équation de la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + m^2\right) v = F(v, \partial_t v, \partial_x v) \tag{2}$$

de meilleurs résultats sont connus. Si F ne dépend que de v, on sait qu'il existe une solution globale à données petites, qui reste bornée dans $H^{s+1} \times H^s$ sur un intervalle de longueur $c_N \varepsilon^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ donné (à condition que s soit assez grand devant N et que m reste hors d'un ensemble exceptionnel de mesure nulle). Ce résultat a été prouvé par Bourgain [5] et précisé par Bambusi [1], Bambusi-Grébert [3]. Si l'on considère des nonlinéarités dépendant des dérivées $\partial_t v$, $\partial_x v$, il a été prouvé que (2) admet, lorsque le second membre est homogène de degré pair $\kappa + 1$, et que m est hors d'un ensemble de mesure nulle, une unique solution définie sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-2\kappa}$ (si les données initiales sont prises comme dans (1)). Ce résultat est vrai non seulement en dimension 1, mais aussi pour l'analogue de (2) sur la sphère $\mathbb{S}^d$ (ou sur une variété de Zoll) : cf. [7], [8]. De plus, pour des nonlinéarités ne dépendant que de v, il a été prouvé dans [2] que le résultat d'existence presque globale connu en dimension 1 s'étend à l'équation de Klein-Gordon sur $\mathbb{S}^d$ (ou sur une variété de Zoll).

Pour expliquer quelles sont les difficultés supplémentaires qui apparaissent dans le cas quasi-linéaire, rappelons sur un exemple comment se traite le cas semi-linéaire. Considérons une équation de la forme

$$\begin{aligned} &(D_t - \sqrt{-\Delta + m^2})u = \bar{u}^p u^{q+1} \\ &u_{|t=0} = \varepsilon u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

avec p, q entiers, $p+q = \kappa D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$. Soit $\Lambda_m = \sqrt{-\Delta + m^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons Π_n le projecteur spectral sur le sous-espace engendré par e^{inx}, e^{-inx}. Alors

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\langle \Lambda_m^s u(t,.), \Lambda_m^s u(t,.)\rangle = \\ &\underbrace{-Im\langle \Lambda_m^{s+1} u, \Lambda_m^s u\rangle}_{\equiv 0} - Im\langle \Lambda_m^s(\bar{u}^p u^{q+1}), \Lambda_m^s u\rangle \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Le dernier terme s'écrit $-Im M_0(\bar{u}, \cdots, \bar{u}, u, \cdots, u)$ avec

$$M_0\,(\underbrace{\bar{u},\cdots,\bar{u}}_{p+1},\underbrace{u,\cdots,u}_{q+1}) = \tag{5}$$

$$\sum_{n_0}\cdots\sum_{n_{p+q+1}}(m^2+n_0^2)^s\int_{\mathbb{S}^1}\Pi_{n_0}\bar{u}\cdots\Pi_{n_p}\bar{u}\Pi_{n_{p+1}}u\cdots\Pi_{n_{p+q+1}}u\,dx\ .$$

On cherche alors à perturber le membre de gauche de (4) par une expression de la forme $ReM_1(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)$ telle que $\frac{d}{dt}ReM_1(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)$ compense le membre de droite de (4), modulo un reste en $O(\|u\|_{H^s}^{2\kappa+2})$. En utilisant l'équation on obtient

$$\frac{d}{dt}M_1(\underbrace{\bar{u},\cdots,\bar{u}}_{p+1},\underbrace{u,\cdots,u}_{q+1}) = iL(M_1)(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)+R(u,\bar{u}) \tag{6}$$

où R, qui provient de la substitution de la nonlinéarité de l'équation à $\frac{\partial u}{\partial t}$ ou $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, est un reste en $O(\|u\|_{H^s}^{2\kappa+2})$, et où

$$\begin{aligned} L(M_1)(u_0,\cdots,u_{p+q+1}) = \ & -\textstyle\sum_{j=0}^{p}M_1(u_0,\cdots,\Lambda_m u_j,\cdots,u_{p+q+1}) \\ & +\textstyle\sum_{j=p+1}^{p+q+1}M_1(u_0,\cdots,\Lambda_m u_j,\cdots,u_{p+q+1})\ . \end{aligned}$$

Comme $\Lambda_m\Pi_n = \sqrt{m^2+n^2}\,\Pi_n$, on a pour tous $n_0,\cdots,n_{p+q+1}\in\mathbb{N}$

$$L(M_1)(\Pi_{n_0}u_0,\cdots,\Pi_{n_{p+q+1}}u_{p+q+1}) = \tag{7}$$

$$-F_m(n_0,\cdots,n_{p+q+1})M_1(\Pi_{n_0}u_0,...,\Pi_{n_{p+q+1}}u_{p+q+1})$$

avec

$$F_m(n_0,\cdots,n_{p+q+1}) = \sum_{j=0}^{p}\sqrt{m^2+n_j^2}-\sum_{j=p+1}^{p+q+1}\sqrt{m^2+n_j^2}\ . \tag{8}$$

Pour éliminer dans

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle\Lambda_m^s u,\Lambda_m^s u\rangle + ReM_1(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)\right] \tag{9}$$

le terme homogène d'ordre $\kappa+2$, on doit assurer $L(M_1) = -M_0$ et donc d'après (5), (7) et (8) poser

$$(10) \qquad M_1(\Pi_{n_0}u_0,\cdots,\Pi_{n_{p+q+1}}u_{p+q+1}) =$$
$$= F_m(n_0,\cdots,n_{p+q+1})^{-1}(m^2+n_0^2)^s\int_{\mathbb{S}^1}\Pi_{n_0}u_0\cdots\Pi_{n_{p+q+1}}u_{p+q+1}dx\ .$$

Cela est possible si F_m ne s'annule pas aux entiers et admet de bonnes minorations.

Or on peut montrer que si m est hors d'un ensemble de mesure nulle.

$$|F_m(n_0,\cdots,n_{p+q+1})^{-1}| \leq C\mu(n_0,\cdots,n_{p+q+1})^{N_1}$$

où $\mu(n_0,\cdots,n_{p+q+1})$ est le troisième plus grand parmi $n_0,\cdots,n_{p+q+1}$ et où N_1 est un exposant assez grand (cf. [7]). Cela permet de montrer que si s est assez grand $|M_1(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)| \leq C\|u\|_{H^s}^{\kappa+2}$, donc que dans (9) le terme en M_1 est, pour $\|u\|_{H^s}$ petit, une petite perturbation de l'énergie. Il résulte alors de (9), (10) et (6) qu'aussi longtemps que $\|u(t,.)\|_{H^s}$ reste assez petit, l'estimation a priori

$$(11) \qquad \|u(t,.)\|_{H^s}^2 \leq C\left[\|u(0,.)\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|u(\tau,.)\|_{H^s}^{2\kappa+2}d\tau\right]$$

est vérifiée. Si $\|u(0,.)\|_{H^s} \leq C\varepsilon$ avec ε assez petit, on en déduit une borne a priori de la forme $\|u(t,.)\|_{H^s} \leq C'\varepsilon$ aussi longtemps que $0 \leq t \leq c\varepsilon^{-2\kappa}$ pour un certain $c > 0$, qui entraine le résultat d'existence et de borne uniforme en grand temps cherché.

Essayons d'utiliser la même méthode dans le cas quasi-linéaire, i.e. lorsque le second membre de (3) est remplacé par $a(u,\bar{u})\Lambda_m u$, avec a fonction à valeurs réelles homogène de degré impair κ. Alors (4) s'écrit

$$(12) \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\langle\Lambda_m^s u(t,.),\Lambda_m^s u(t,.)\rangle &= -Im\langle\Lambda_m^s(a\Lambda_m u),\Lambda_m^s u\rangle \\ &= \tfrac{1}{2i}\langle\Lambda_m^s\,[\Lambda_m^{-2s+1},a\Lambda_m^{2s}]\,u,\Lambda_m^s u\rangle\ . \end{aligned}$$

Grâce au commutateur, le dernier terme est $O(\|u\|_{H^s}^{\kappa+2})$. Si l'on tente d'imiter la méthode du cas semi-linéaire en rajoutant à l'énergie une quantité $ReM_1(\bar{u},\cdots,u)$ choisie de manière à compenser le membre de droite de (12), modulo un reste nul à l'ordre $2\kappa+2$ en u, et si l'on raisonne comme dans (6), on fera apparaitre un reste $R(u,\bar{u})$ donné par une expression du type

$$-i\left(\sum_{0}^{p} M_1(\bar{u},\cdots,a\Lambda_m\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,u)\right.$$
$$\left.-\sum_{p+1}^{p+q+1} M_1(\bar{u},\cdots,\bar{u},u,\cdots,a\Lambda_m u,\cdots,u)\right) \tag{13}$$

qui s'estimera par $C\|u\|_{H^s}^{2\kappa+1}\|u\|_{H^{s+1}}$. On a donc une perte d'une dérivée qui empèche de conclure. Pour obtenir un contrôle du reste en $C\|u\|_{H^s}^{2\kappa+2}$, il faut pouvoir dans (13) faire apparaitre des commutateurs, comme dans le membre de droite de (12). Cela nécessite d'obtenir, pour le membre de droite de (12) ou pour (13), une expression relativement explicite, de la forme $\langle Op(c(u,\cdots,\bar{u};.))u,u\rangle$ où c sera un symbole convenable d'opérateur paradifférentiel, et $Op(c)$ l'opérateur associé.

La difficulté qui se pose est la suivante : si l'on tente d'utiliser la description des opérateurs paradifférentiels sur $\mathbb{S}^1$ par carte locale, les symboles considérés $c(x,\xi)$ dépendent d'une variable de phase ξ décrivant $\mathbb{R}$. Or pour construire l'analogue de M_1, on devra comme dans (10) diviser par une quantité $F_m(\xi_0,\cdots,\xi_{p+q+1})$ qui s'annule toujours en certains points, lorsque $\xi_0,\cdots,\xi_{p+q+1}$ décrivent $\mathbb{R}$. La seule manière d'obtenir une expression non nulle (pour m hors d'un sous-ensemble de mesure nulle) consiste à ne devoir calculer F_m que sur un ensemble discret, comme dans (10). Il faut pour cela utiliser une théorie globale des opérateurs paradifférentiels sur $\mathbb{S}^1$, associée à des symboles dont la variable de phase décrit $\mathbb{Z}$. Lorsque le potentiel V dans $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ est nul, il suffit d'utiliser des développements en séries de Fourier. Lorsque V n'est pas nul, et que l'on désire quantifier globalement des symboles à partir des fonctions propres de $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$, on doit définir un calcul paradifférentiel adapté. Pour cela, la première étape consite à construire des "bonnes bases" de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

II Bonnes bases

On sait que les grandes valeurs propres de $\sqrt{-\Delta+V}$ forment des couples $\omega_-(n)\le\omega_+(n)$ indexés par $n\to+\infty, \omega_+(n)$ et $\omega_-(n)$ ayant un même développement asymptotique

$$\omega(n)=n+\frac{1}{4\pi n}\int_{\mathbb{S}^1}V(x)dx+\frac{\alpha_3}{n^3}+\frac{\alpha_5}{n^5}+\cdots \tag{14}$$

(cf. par exemple le livre de Marchenko [9]). On note Π_n le projecteur spectral associé au couple $\{\omega_-(n), \omega_+(n)\}$ et E_n son image. On a

$$\|\sqrt{-\Delta + V}\Pi_n - \omega(n)\Pi_n\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(n^{-\infty}), n \to +\infty$$

et $E_n \subset L^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ est de dimension 2.

Théorème 2 *Il existe pour $n \geq \tau$ assez grand une base orthonormée $(\varphi_n^1, \varphi_n^2)$ de E_n vérifiant la propriété suivante : Il existe $\nu \in \mathbb{R}_+$ et pour tous α, β, γ, N dans $\mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que pour tout opérateur pseudo-différentiel T d'ordre 0 sur $\mathbb{S}^1$, de symbole a, pour tous $n, n' \in \mathbb{N}, n, n' \geq \tau$, tous $j, j' \in \{1, 2\}$, on ait*

$$\begin{aligned} &|\tfrac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} \tfrac{\partial^\beta}{\partial n'_\beta} (\tfrac{\partial}{\partial n} + \tfrac{\partial}{\partial n'})^\gamma \langle \varphi_n^j, T\varphi_{n'}^{j'} \rangle| \leq \\ &C\langle n - n' \rangle^{-N} (n + n')^{-\gamma} |a|_{\nu+N+\alpha+\beta+\gamma} \end{aligned} \tag{15}$$

où $|a|_k$ désigne la semi-norme naturelle de a :

$$|a|_k = \sup_{\alpha \leq k} \sup_{\beta \leq k} \sup_{(x,n) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{N}} (1 + |n|)^\beta |\partial_x^\alpha \partial_n^\beta a(x, n)| \ . \tag{16}$$

Remarque : Dans la mesure où les fonctions considérées de n, n' sont définies seulement sur les entiers, il faudrait interpréter les opérateurs de dérivation en n, n' comme des différences finies. Nous renvoyons à [6] pour cela, et nous continuerons dans ce texte à noter ces différences finies comme des dérivées par rapport à une variable continue.

Définition 3 *On appelle "bonne base" de $L^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ toute base hilbertienne $(\varphi_n^j)_{j,n}$ de $L^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ telle que pour tout n assez grand les propriétés du théorème 2 soient satisfaites.*

Remarque : Une bonne base n'est pas nécessairement formée de fonctions propres. En effet, d'après la définition des E_n et la formule (14), on a

$$\|\sqrt{-\Delta + V}\varphi_n^j - \omega(n)\varphi_n^j\|_{L^2} = O(n^{-\infty}) \ .$$

Exemple : Considérons le cas $V \equiv 0$. Nous pouvons alors définir

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \varphi_n^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \ n \geq 1.$$

On obtient alors une bonne base : si l'on prend pour opérateur T un simple opérateur de multiplication par une fonction C^∞ sur le cercle, a, le crochet $\langle \varphi_n^j, a\varphi_{n'}^{j'}\rangle$ s'exprime à partir de quantités de la forme

$$\int_{\mathbb{S}^1} e^{\pm i(n-n')x} a(x)dx = \hat{a}(\pm(n-n')) \text{ et } \int_{\mathbb{S}^1} e^{\pm i(n+n')x} a(x)dx = \hat{a}(\pm(n+n'))\ .$$

La première des expressions précédentes vérifie bien (15) ; quant à la seconde, elle est à décroissance rapide en $(n+n')$. La signification de (15) est que, même dans le cas $V \not\equiv 0$, les quantités $\langle \varphi_n^j, T\varphi_{n'}^{j'}\rangle$ ne peuvent avoir un comportement oscillant que relativement à la variable $n-n'$.

Idée de la démonstration du théorème : On obtient un développement semi-classique de φ_n^1, φ_n^2 en fonction du petit paramètre h_n défini par $h_n^{-1} - \omega(n) = O(n^{-\infty})$. Plus précisément, on construit des quasi-modes $U_n \simeq e^{i\theta(x,h_n)/h_n} b(x,h_n)$ où θ est une phase réelle vérifiant $\theta'(x,h) = 1 + h^2\phi_2'(x) + \cdots$ et où $b(x,h)$ est un symbole en h. On montre qu'à des perturbations en $O(n^{-\infty})$ près, il existe une base orthonormée de E_n proche de $\left(\frac{ReU_n}{\sqrt{2}}, \frac{ImU_n}{\sqrt{2}}\right)$. L'expression asymptotique de U_n permet alors de prouver (15).

III Opérateurs paradifférentiels

Il s'agit de définir un calcul paradifférentiel basé sur la donnée d'une bonne base de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Commençons en raisonnant comme si les sous-espaces E_n étaient de dimension 1 au lieu d'être de dimension 2, i.e. comme si nous avions une décomposition orthogonales $L^2 = \oplus E_n$ avec E_n sous-espace engendré par une unique fonction φ_n, telle que $\|\varphi_n\|_{L^2} = 1$, et que la condition (15) soit satisfaite (une telle situation se présente si l'on se restreint aux fonctions sur $\mathbb{S}^1$ paires ou impaires). Soit $a \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ et considérons l'opérateur $u \to au$. On peut écrire

$$\begin{aligned} au &= \textstyle\sum_{n_{p+1}} a\langle u, \varphi_{n_{p+1}}\rangle \varphi_{n_{p+1}} \\ &= \textstyle\sum_{n_0}\sum_{n_{p+1}} \langle a\varphi_{n_{p+1}}, \varphi_{n_0}\rangle\langle u, \varphi_{n_{p+1}}\rangle\varphi_{n_0}\ . \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}_{n_{p+1}}$ l'application $u \to \langle u, \varphi_{n_{p+1}}\rangle$ de L^2 dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_{n_0}^* : \mathbb{R} \to E_{n_0}$ l'application linéaire envoyant 1 sur φ_{n_0}. On a donc

$$au = \sum_{n_0}\sum_{n_{p+1}} \mathcal{F}_{n_0}^* \left[\langle a\varphi_{n_{p+1}}, \varphi_{n_0}\rangle \mathcal{F}_{n_{p+1}} u\right]\ .$$

(Dans le cas $\varphi_n = \frac{e^{in.x}}{\sqrt{2\pi}}$, on a $au = \frac{1}{2\pi}\sum_{n_0}\sum_{n_{p+1}} e^{in_0 x}\hat{a}(n_0 - n_{p+1})\hat{u}(n_{p+1})$, les sommations pour cet exemple étant prises pour n_0, n_{p+1} décrivant $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$). D'après la définition des bonnes bases

$$|\partial_{n_0}^{\alpha}\partial_{n_{p+1}}^{\beta}(\partial_{n_0} + \partial_{n_{p+1}})^{\gamma}\langle a\varphi_{n_{p+1}}, \varphi_{n_0}\rangle| \leq C_N(n_0 + n_{p+1})^{-\gamma}\langle n_0 - n_{p+1}\rangle^{-N} \ .$$

On veut généraliser la formule ci-dessus donnant au de telle manière que :

• les opérateurs soient paradifférentiels i.e. seuls interviennent les indices vérifiant $|n_0 - n_{p+1}| < \delta(n_0 + n_{p+1})$ pour un $\delta \in]0,1[$ petit,

• la quantité $\langle a\varphi_{n_{p+1}}, \varphi_{n_0}\rangle$ soit remplacée par une expression multilinéaire de fonctions $u_1, \cdots, u_p$, localisées sur des fréquences petites par rapport à $n_0 \sim n_{p+1}$.

Pour la définition générale, on écrit $L^2(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\geq\tau} E_n$ où pour $n \geq \tau + 1$, E_n est l'image du projecteur spectral associé au couple de valeurs propres $(\omega_-(n), \omega_+(n))$ de $\sqrt{-\Delta + V}$ (donc $\dim E_n = 2$). Le premier sous-espace E_τ correspond aux petites valeurs propres. Soit $(\varphi_n^j)_{j,n}$ une bonne base vérifiant les conditions de la définition 3 et définissons en notant $K(n) = \dim E_n$

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}_n : & E_n \to \mathbb{R}^{K(n)} \\ & u \to (\langle u, \varphi_n^j\rangle)_j \\ \mathcal{F}_n^* : & \mathbb{R}^{K(n)} \to E_n \\ & (v_j)_j \to \sum\limits_j v_j \varphi_n^j \ . \end{array} \tag{17}$$

On prend comme espace de fonctions test $\mathcal{E} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}_\tau} E_n$ où $\mathbb{N}_\tau = \{n \in \mathbb{N}; n \geq \tau\}$.

Définition 4 *Soient $d \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $N_0 \in \mathbb{N}^*$. On note $\Sigma_{p,N_0}^{d,\nu}$ l'espace des applications*

$$\begin{array}{ll} (u_1, \cdots, u_p, n_0, n_{p+1}) & \to a(u_1, \cdots, u_p; n_0, n_{p+1}) \\ \mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E} \times \mathbb{N}_\tau \times \mathbb{N}_\tau & \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{K(n_{p+1})}, \mathbb{R}^{K(n_0)}) \end{array} \tag{18}$$

qui sont p-linéaires en $(u_1, \cdots, u_p)$ et vérifient pour un $\delta \in]0,1[$

$$\begin{array}{l} a(\Pi_{n_1}u_1, \cdots, \Pi_{n_p}u_p; n_0, n_{p+1}) \equiv 0 \ \textit{si} \\ |n_0 - n_{p+1}| > \delta(n_0 + n_{p+1}) \ \textit{ou} \ |n'| > \delta(n_0 + n_{p+1}), \end{array} \tag{19}$$

(avec $n' = (n_1, \cdots, n_p)$ et $|n'| = n_1 + \cdots + n_p$) et pour tous $\alpha, \beta, \gamma, N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\|\partial_{n_0}^{\alpha}\partial_{n_{p+1}}^{\beta}(\partial_{n_0} + \partial_{n_{p+1}})^{\gamma} a(\Pi_{n_1}u_1, \cdots, \Pi_{n_p}u_p; n_0, n_{p+1})\| \\ &\leq C(n_0 + n_{p+1})^{d-\gamma} \frac{|n'|^{\nu+N+(\alpha+\beta+\gamma)N_0}}{(|n_0 - n_{p+1}| + |n'|)^N} \prod_1^p \|u_j\|_{L^2},\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme des applications linéaires.

Remarque : La condition (19) exprime que les opérateurs condidérés sont de type paradifférentiel. La propriété (20) est une estimation ressemblant à l'inégalité (15) définissant les bonnes bases. La perte en $|n'|^{(\alpha+\beta+\gamma)N_0}$ provient du fait suivant : si a est un symbole et si, pour un certain ℓ, $0 \leq \ell \leq p$ on pose

$$F_m(n_0, \cdots, n_{p+1}) = \sum_{j=0}^{\ell} \sqrt{m^2 + \omega(n_j)^2} - \sum_{j=\ell+1}^{p+1} \sqrt{m^2 + \omega(n_j)^2} ,$$

on souhaite que

$$(21)\qquad a(u_1, \cdots, u_p; n_0, n_{p+1}) F_m(n_0, \cdots, n_{p+1})^{-1}$$

soit aussi un symbole. Or on peut montrer que si m est hors d'un ensemble de mesure nulle, et si $n_0, n_{p+1} \geq n_1, \cdots, n_p$, on a une estimation

$$|F_m(n_0, \cdots, n_{p+1})|^{-1} \leq C(1 + |n'|)^{N_1}$$

pour un certain $N_1 \in \mathbb{N}$. De plus comme $F_m(n_0, \cdots, n_{p+1}) = n_0 - n_{p+1} + \mathcal{O}(1/n_0) + \mathcal{O}(1/n_{p+1}) +$ terme en n', on a

$$(\partial_{n_0} + \partial_{n_{p+1}}) F_m(n_0, \cdots, n_{p+1}) = \mathcal{O}((n_0 + n_{p+1})^{-1})$$

qui entraîne que

$$|(\partial_{n_0} + \partial_{n_{p+1}}) F_m(n_0, \cdots, n_{p+1})^{-1}| \leq C(n_0 + n_{p+1})^{-1}(1 + |n'|)^{2N_1},$$

ce qui montre que l'on doit s'autoriser à perdre une puissance assez grande de $|n'|$ lorsqu'on dérive en n_0, n_{p+1}, proportionnelle au nombre de dérivées.

On peut quantifier les symboles de la définition 4 de la manière suivante.

Définition 5 *Si $a \in \Sigma_{p,N_0}^{d,\nu}$ on lui associe un opérateur par la formule*

$$(22)\qquad Op(a(u_1, \cdots, u_p; \cdot))u_{p+1} = \sum_{n_0} \sum_{n_{p+1}} \mathcal{F}_{n_0}^* [\underbrace{a(u_1, \cdots, u_p; n_0, n_{p+1})}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{K(n_{p+1})}, \mathbb{R}^{K(n_0)})} \underbrace{\mathcal{F}_{n_{p+1}} u_{p+1}}_{\in \mathbb{R}^{K(n_{p+1})}}]$$

pour tous $u_1, \cdots, u_{p+1} \in \mathcal{E}$.

Utilisant les estimations (19), (20) on montre qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, tous $u_1, \cdots, u_{p+1} \in \mathcal{E}$

$$\|Op(a(u_1, \cdots, u_p; \cdot))u_{p+1}\|_{H^{s-d}} \leq C \prod_1^p \|u_j\|_{H^{s_0}} \|u_{p+1}\|_{H^s}\ . \tag{23}$$

Cela permet d'étendre l'action des opérateurs aux espaces de Sobolev.

Calcul symbolique

Proposition 6 *i) Soient $a \in \Sigma^{d,\nu}_{p,N_0}, b \in \Sigma^{d'\nu}_{q,N_0}$ vérifiant la propriété de support (19) avec un $\delta > 0$ assez petit. Il existe un symbole $a\sharp b \in \Sigma^{d+d',\nu'}_{p+q,N_0}$ (pour un certain $\nu' > 0$) tel que pour tous $u_1, \cdots, u_{p+q+1} \in \mathcal{E}$*

$$Op(a(u_1, \cdots, u_p; \cdot))Op(b(u_{p+1}, \cdots, u_{p+q}; \cdot))u_{p+q+1} = \tag{24}$$

$$Op(a\sharp b(u_1, \cdots, u_{p+q}; \cdot))u_{p+q+1}.$$

ii) Supposons de plus, en notant $U' = (u_1, \cdots, u_p), U'' = (u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})$, que les symboles $a(U'; n_0, n_{p+1})$ et $b(U''; n'_0, n'_{q+1})$ commutent lorsque les indices sont assez grands. Il existe alors $c(U', U''; .) \in \Sigma^{d+d'-1,\nu'}_{p+q,N_0}$ tel que

$$[Op(a(U'; \cdot)), Op(b(U''; \cdot))] = Op(c(U', U''; \cdot)) \tag{25}$$

Une formule de paralinéarisation à la Bony [4]

Considérons une expression multilinéaire de la forme

$$(T_1 u_1) \cdots (T_p u_p)(\Lambda_m u_{p+1}) \tag{26}$$

où les T_j sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, à support assez petit, $\chi \equiv 1$ près de 0. Définissons un symbole d'opérateur paradifférentiel par

$$\begin{aligned} a_\chi(u_1, \cdots, u_p; n_0, n_{p+1}) = \ & \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_p} \chi\left(\tfrac{|n'|}{n_0+n_{p+1}}\right)\chi\left(\tfrac{n_0-n_{p+1}}{n_0+n_{p+1}}\right)\times \\ & \underbrace{\mathcal{F}_{n_0}\left[T_1(\Pi_{n_1}u_1)\cdots T_p(\Pi_{n_p}u_p)\lambda_m(n_{p+1}) \circ \mathcal{F}^*_{n_{p+1}}\right]}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{K(n_{p+1})},\mathbb{R}^{K(n_0)})} \end{aligned} \tag{27}$$

où on a noté $\lambda_m(n)$ la restriction de Λ_m à l'image de Π_n. Par construction l'hypothèse de support (19) est satisfaite. La majoration (20) peut se lire sur les coefficients, dans la bonne base donnée, de la matrice de l'application linéaire apparaissant dans le membre de droite de (27). Ces coefficients seront de la forme $\langle \varphi^j_{n_0}, a\varphi^{j'}_{n_{p+1}}\rangle \lambda_m^{rr'}(n_{p+1})$, où $\lambda_m^{rr'}(n_{p+1})$ sont les coefficients de la matrice de $\lambda_m(n_{p+1})$ dans la base $(\varphi^r_{n_{p+1}})_{r=1,2}$, et où

$$a = (T_1\Pi_{n_1}u_1)\cdots(T_p\Pi_{np}u_p),$$

vérifie par les injections de Sobolev, pour un $\nu > 0$ assez grand,

$$|\nabla_x^\alpha a| \leq C_\alpha(1+|n'|)^{\nu+|\alpha|}\prod_1^p \|u_j\|_{L^2} .$$

Les inégalités (20) découlent alors des inégalités (15) de définition des bonnes bases. L'action de $Op(a_\chi)$ sur u_{p+1} représente la partie principale dans la décomposition de Bony de (26). On a en effet

Proposition 7 *Il existe $\nu' > 0$ et des symboles $a_j \in \Sigma^{0,\nu'}_{p,1}$ $j = 1,\cdots,p$ tels que l'on puisse écrire*

$$\begin{aligned}(T_1u_1)\cdots(T_pu_p)\Lambda_m u_{p+1} &= Op(a_\chi(u_1,\cdots,u_p;\cdot))u_{p+1} \\ &+\textstyle\sum_{j=1}^p Op(a_j(u_1,\cdots,\hat{u}_j,\cdots,u_{p+1};\cdot))u_j \\ &+R(u_1,\cdots,u_{p+1})\end{aligned} \tag{28}$$

où R est un opérateur de reste, qui est en particulier continu de $H^s\times\cdots\times H^s$ dans $H^{2s-\theta}$ pour tout s assez grand et un θ indépendant de s.

Remarques : • La formule (28) n'est rien d'autre qu'une version de la décomposition de Bony [4]

$$u(\Lambda_m v) = T_u\Lambda_m v + T_{(\Lambda_m v)}u + R(u,\Lambda_m v) .$$

• Comme les a_j sont d'ordre 0, les termes de la somme en j dans le membre de droite de (28) donnent des contributions de type semi-linéaire. De même pour le terme de reste.

IV Inégalité d'énergie et démonstration du théorème 1

Réécrivons d'abord l'équation (1) en définissant $u = \begin{bmatrix}\Lambda_m v\\ \partial_t v\end{bmatrix}$ d'où $v = \Lambda_m^{-1}u_1$, $\partial_t v = u_2$. Posons

$$a(u) = c(\Lambda_m^{-1}u_1, u_2, \partial_x\Lambda_m^{-1}u_1) .$$

Il s'agit d'une expression multilinéaire de degré κ, que l'on peut écrire sous la forme $(T_1 u_{j(1)}) \cdots (T_\kappa u_{j(\kappa)})$ avec $j(\ell) \in \{1,2\}$ et T_ℓ opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. L'équation (1) peut donc se réécrire

$$\partial_t u = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_m \\ -(1+a(u))^2 \Lambda_m & 0 \end{bmatrix} u \ . \tag{29}$$

Désignons toujours par $\lambda_m(n)$ la matrice de $\Lambda_m \Pi_n$ dans la bonne base. D'après le début de la section 2, on a $\lambda_m(n) - \omega_m(n) Id = \mathcal{O}(n^{-\infty})$, si $\omega_m(n) = \sqrt{m^2 + \omega(n)^2}$, $\omega(n)$ désignant le développement asymptotique (14) des valeurs propres. Posons

$$M(u;n) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_m(n) \\ -(1+a(u))^2 \lambda_m(n) & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \ . \tag{30}$$

On peut lui associer comme en (27) un symbole d'opérateur paradifférentiel d'ordre 1 $M_\chi(u;n)$, et en appliquant la proposition 7 écrire (29)

$$\partial_t u = Op(M_\chi(u;.))u + \text{ termes d'ordre 0 en } u \ . \tag{31}$$

Les termes d'ordre 0 sont essentiellement semi-linéaires, et seront oubliés dans la suite. On cherche ensuite à diagonaliser le symbole M en trouvant P et Q telles que
(32)

$$\begin{aligned} &P(u;n)Q(u;n) = Q(u;n)P(u;n) = Id \\ &Q(u;n)M(u;n)P(u;n) = D(u;n) \overset{\text{déf}}{=} i(1+a(u))^2 \begin{bmatrix} \lambda_m(n) & 0 \\ 0 & -\lambda_m(n) \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

En fait, cela n'est pas possible si l'on veut se limiter à des symboles qui sont des (sommes d'expressions) multilinéaires en $u_1, \cdots, u_p$ comme dans la définition 4 : en effet, si $P(u;n)$ est multilinéaire en u, $P(u;n)^{-1}$ ne peut aussi être de ce type là. On peut toutefois contourner cette difficulté en prenant pour Q non pas $P(u;n)^{-1}$ mais la transposée de la comatrice de P. Les relations (32) ne sont vraies alors que modulo des symboles s'annulant à un ordre supérieur lorsque $u \to 0$, ce qui est suffisant pour assurer la validité des raisonnements qui suivent. Nous négligerons donc ce point dans la suite, et ferons comme si les relations (32) étaient valables comme indiqué, renvoyant le lecteur à [6] pour une discussion plus précise.

En utilisant la notation (27), et en posant $\tilde{u} = Op(Q_\chi(u;.))u$, en effectuant dans (31) le changement d'inconnue $u \to \tilde{u}$ et en utilisant (32), on se ramène à une équation de la forme

$$\partial_t \tilde{u} = Op(D_\chi(u;\cdot))\tilde{u} + \text{termes semi-linéaires} \ . \tag{33}$$

La nouvelle inconnue $\tilde{u}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ et d'après la seconde relation (32)

$$Op(D_\chi(u;\cdot)) = i \begin{bmatrix} \Lambda_m & 0 \\ 0 & -\Lambda_m \end{bmatrix} + iOp(D^\kappa_\chi(u;\cdot))$$

où $D^\kappa(u,n)$ est un symbole diagonal d'ordre 1 en n, homogène de degré κ en u. Au lieu de poursuivre avec le système (33), nous allons indiquer la preuve du théorème 1 sur le modèle scalaire suivant, correspondant essentiellement à la première équation du système 2×2 (33) :

$$D_t w = \Lambda_m w + Op(b(w,\bar{w};\cdot))w \tag{34}$$

où $D_t = \frac{1}{i}\partial_t$, b est un symbole réel d'opérateur paradifférentiel de degré 1 homogène de degré impair κ en $(w,\bar{w})$ (i.e. b s'écrit sous la forme d'une somme $\sum_{i=0}^{\kappa} b_\ell(\underbrace{w,\cdots,w,}_{\ell}\bar{w},\cdots,\bar{w},\cdot)$ avec b_ℓ symbole à valeurs complexes (au lieu d'être à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$), satisfaisant les conditions (19) et (20).

Inégalité d'énergie

Nous reprenons le raisonnement esquissé dans la section 1, en exploitant le calcul symbolique que nous venons d'introduire. D'après l'équation (34), on a

(35)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\langle \Lambda_m^s w(t,.), \Lambda_m^s w(t,.)\rangle &= -Im\langle \Lambda_m^{2s} Op(b(w,\bar{w};\cdot))w, w\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2i}\langle [\Lambda_m^{2s} Op(b(w,\bar{w};\cdot)) - Op(b(w,\bar{w};\cdot))^* \Lambda_m^{2s}]\, w, w\rangle\ .\end{aligned}$$

Comme b est à symbole principal réel, le terme entre crochets est en fait un opérateur d'ordre $2s$, et (35) s'écrit donc

$$\langle Op(c(w,\bar{w};\cdot))w, w\rangle$$

avec c symbole réel d'ordre $2s$, homogène de degré κ en $(w,\bar{w})$. On cherche alors un symbole réel c^1, d'ordre $2s$, homogène de degré κ en $(w,\bar{w})$ tel que

$$\frac{d}{dt}\langle Op(c^1(w,\bar{w};\cdot))w, w\rangle = \langle Op(c(w,\bar{w};\cdot))w, w\rangle + O(\|w\|_{H^s}^{2\kappa+2})\ . \tag{36}$$

Si on trouve un tel symbole et si l'on pose

$$\Theta(w(t,.)) = \frac{1}{2}\langle \Lambda_m^s w(t,.), \Lambda_m^s w(t,.)\rangle - \langle Op(c^1(w,\bar{w};\cdot))w, w\rangle$$

on aura

$$\frac{d}{dt}\Theta(w(t,.)) = O\left(\|w(t,.)\|_{H^s}^{2\kappa+2}\right)\ .$$

De plus, comme c^1 est d'ordre $2s$ et homogène de degré κ en $(w,\bar{w})$

$$|\Theta(w(t,.)) - \frac{1}{2}\langle \Lambda_m^s w(t,.), \Lambda_m^s w(t,.)\rangle| \leq C\|w(t,.)\|_{H^s}^{\kappa+2} .$$

Il en résulte que pour $\|w(t,.)\|_{H^s}$ assez petit, $\Theta(w(t,.)) \sim \|w(t,.)\|_{H^s}^2$ d'où une estimation

$$\|w(t,.)\|_{H^s}^2 \leq C\left[\|w(0,.)\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|w(\tau,.)\|_{H^s}^{2\kappa+2} d\tau\right]$$

qui entraîne une borne a priori sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-2\kappa}$, et donc la conclusion du théorème 1, pour le modèle (34) considéré.

Construction du symbole c^1

Décomposons c sous la forme

$$c(w,\bar{w};\cdot) = \sum_{\ell=0}^{\kappa} c_\ell\,(\underbrace{w,\cdots,w,}_{\ell}\bar{w},\cdots,\bar{w};\cdot)$$

et décomposons de même $c^1 = \sum_{\ell=0}^{\kappa} c_\ell^1$. On peut écrire

$$\frac{d}{dt}\langle Op(c^1(w,\bar{w};\cdot))w,w\rangle = I + II + III \tag{37}$$

où

•I s'obtient en faisant agir ∂_t sur l'un des w ou l'un des $\bar{w}$ de l'argument de $c_\ell^1(w,\cdots,w,\bar{w},\cdots,\bar{w};\cdot)$, et en remplaçant $\partial_t w$ par $iOp(b(w,\bar{w};\cdot))$ en utilisant (34). On peut donc écrire I comme combinaison linéaire d'expressions

$$\langle Op(c_\ell^1(w,\cdots,Op(b(w,\bar{w};\cdot))w,\cdots,w,\bar{w},\cdots,\bar{w};\cdot)w,w\rangle$$

et de quantités analogues où $Op(b)$ agit sur l'un des $\bar{w}$ de l'argument de c_ℓ^1. On obtient donc des contributions majorées par $c\|w\|_{H^{s_0}}^{2\kappa}\|w\|_{H^s}^2$ si s_0 est assez grand, indépendamment de s (la perte de dérivées provenant du fait que b est d'ordre 1 est sans conséquence, puisqu'elle intervient sur les coefficients de c^1). La quantité I est donc de la forme du reste dans le membre de droite de (36).

•II s'obtient en faisant agir ∂_t sur l'un des w dans $\langle Op(c^1)w,w\rangle$ et en le remplaçant par $iOp(b(w,\bar{w};.))w$. On obtient donc

$$i\langle\left[Op(c^1(w,\bar{w};\cdot))Op(b(w,\bar{w};\cdot)) - Op(b(w,\bar{w};\cdot))^* Op(c^1(w,\bar{w};\cdot))\right]w,w\rangle$$

Comme b est réel, $Op(b(w,\bar{w};\cdot))^* = Op(b(w,\bar{w};\cdot))$ modulo un opérateur d'ordre zéro. Par calcul symbolique, l'opérateur à l'intérieur du crochet est d'ordre $2s$, et II est encore majoré par $C\|w\|_{H^{s_0}}^{2\kappa}\|w\|_{H^s}^2$ donc contribue au reste de (36).

•III s'obtient en faisant agir dans (37) successivement ∂_t sur chaque w ou $\bar{w}$, puis en remplaçant $\partial_t w$ par $i\Lambda_m w$ i.e. la contribution linéaire provenant de (34). On obtiendra la somme en ℓ des quantités

$$\begin{aligned}(38)\qquad & i\langle Op\Bigg(\sum_{j=1}^{\ell} c_\ell^1(w,\cdots,\Lambda_m w,\cdots,w,\bar{w},\cdots,\bar{w};\cdot) - \\ & \sum_{j=\ell+1}^{\kappa} c_\ell^1(w,\cdots,w,\bar{w},\cdots,\Lambda_m\bar{w},\cdots,\bar{w};\cdot)\Bigg) w,w\rangle \\ & +i\langle\big[Op(c_\ell^1(w,\cdots,\bar{w};\cdot))\Lambda_m - \Lambda_m Op(c_\ell^1(w,\cdots,\bar{w};\cdot))\big]\, w,w\rangle\ .\end{aligned}$$

Il reste donc, pour assurer (36), à construire c_ℓ^1 de telle manière que (38) vaille $\langle Op(c_\ell(w,\cdots,\bar{w};\cdot))w,w\rangle$. Remplaçons d'abord dans (38) les $(w,\cdots,\bar{w})$ de l'argument de c_ℓ^1 par $(\Pi_{n_1}u_1,\cdots,\Pi_{n_\kappa}u_\kappa)$. De plus dans $\langle Op(\cdots)w,w\rangle$ remplaçons le premier (resp. le second) w par $\Pi_{n_{k+1}}u_{k+1}$ (resp. $\Pi_{n_0}u_0$). Raisonnons de plus, pour simplifier l'argument, comme si $\Lambda_m\Pi_n = \omega_m(n)\Pi_n$ avec $\omega_m(n) = \sqrt{\omega(n)^2+m^2}$ (cela n'est vrai que modulo un reste en $O(n^{-\infty})$). Alors (36) sera vrai dés que l'on aura pour tout ℓ

$$\begin{aligned} i\left(\omega_m(n_1)+\cdots+\omega_m(n_\ell)-\omega_m(n_{\ell+1})-\cdots-\omega_m(n_\kappa)+\omega_m(n_{\kappa+1})-\omega_m(n_0)\right) \\ \times c_\ell^1(\Pi_{n_1}u_1,\cdots,\Pi_{n_\kappa}u_\kappa;n_0,n_{\kappa+1}) = \\ c_\ell(\Pi_{n_1}u_1,\cdots,\Pi_{n_\kappa}u_\kappa\ ;n_0,n_{\kappa+1})\ .\end{aligned}$$

On doit donc diviser le membre de droite par le coefficient entre parenthèses du membre de gauche. Or ce coefficient n'est rien d'autre qu'une fonction de la forme (8), et nous vu que, si m est hors d'un ensemble de mesure nulle, et si $n_0,n_{\kappa+1}\geq n_1,\cdots,n_\kappa$, on a une minoration du module de ce coefficient par $c(1+n_1+\cdots+n_\kappa)^{-N_1}$ pour un certain N_1. D'après la formule (21), la division de c_ℓ par ce coefficient donnera un élément de $\Sigma_{\kappa,N_0}^{2s,\nu'}$ pour un certain ν'. On a donc bien construit un symbole $c^1=\sum_\ell c_\ell^1$ tel que (36) soit vrai. Cela conclut la démonstration du théorème 1.

Références

[1] D. Bambusi : *Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs*, Comm. Math. Phys. 234 (2003), no. 2, 253–285.

[2] D. Bambusi, J.-M. Delort, B. Grébert and J. Szeftel : *Almost global existence for Hamiltonian semi-linear Klein-Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 60 (2007), n° 11, 1665-1690.

[3] D. Bambusi and B. Grébert : *Birkhoff normal form for partial differential equations with tame modulus*, Duke Math. J. 135 (2006), no. 3, 507–567.

[4] J.-M. Bony : *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 14 (1981), no. 2, 209–246.

[5] J. Bourgain : *Construction of approximative and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations*, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 2, 201–230.

[6] J.-M. Delort : *Long-time Sobolev stability for small solutions of quasi-linear Klein-Gordon equations on the circle*, prépublication (2007), à paraître Trans. Amer. Math. Soc.

[7] J.-M. Delort and J. Szeftel : *Long-time existence for small data nonlinear Klein-Gordon equations on tori and spheres*, Internat. Math. Res. Notices (2004), no. 37, 1897–1966.

[8] J.-M. Delort and J. Szeftel : *Long-time existence for semi-linear Klein-Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds*, Amer. J. Math. 128 (2006), no. 5, 1187–1218.

[9] V. Marchenko : *Sturm-Liouville operators and applications*, Operator Theory : Advances and Applications, 22. Birkhäuser Verlag, Basel, (1986), xii+367 pp.

[10] T. Ozawa, K. Tsutaya et Y. Tsutsumi : *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z, 222, (1996) 341–362.

[11] J. Shatah : *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985) 685–696.

Jean-Marc DELORT
CNRS, UMR 7539
Université de Paris-Nord
LAGA
99, avenue Jean-Baptiste Clément
F - 93430 Villetaneuse cedex