



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2006-2007**

Bernard Helffer

**Domaines nodaux et partitions spectrales minimales**

*Séminaire É. D. P.* (2006-2007), Exposé n° VIII, 21 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2006-2007\\_\\_\\_\\_A8\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A8_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Domaines nodaux et partitions spectrales minimales.

B. HELFFER (UNIV PARIS-SUD ET CNRS)

(D'APRÈS B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF ET S. TERRACINI)

## Abstract

Nous considèrerons principalement le problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un domaine borné  $\Omega$ . Nous nous proposons d'analyser les liens entre les partitions de  $\Omega$  constituées des domaines nodaux d'une fonction propre de ce laplacien et celles constituées de  $k$  ouverts  $D_i$  qui sont minimales en ce sens qu'elles minimisent (pour  $k$  fixé) le maximum sur les  $D_i$  de la plus petite valeur propre  $\lambda(D_i)$  de la réalisation de Dirichlet du laplacien dans  $D_i$ .

La plupart des résultats s'étendent au cas où le laplacien est remplacé par l'opérateur de Schrödinger  $-\Delta + V$  avec  $V \in L^\infty$  mais ceci ne sera pas détaillé ici.

# 1 Introduction aux partitions.

Cet exposé est en quelque sorte une suite à l'exposé de P. Bérard [6] donné dans le cadre de ce séminaire il y a plus de vingt-cinq ans.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine à bord régulier (i.e.  $C^{(1,\alpha)}$  pour un  $\alpha > 0$ ). Nous considérons la réalisation de Dirichlet du laplacien  $H(\Omega)$  dans  $\Omega$ . On désigne par  $\lambda_j(\Omega)$  la suite (rangée par ordre croissant) de ses valeurs propres et par  $u_j$  une base orthonormale associée constituée de fonctions propres. Il est classique que la première valeur propre est simple et qu'on peut choisir  $u_1$  strictement positif dans  $\Omega$ . Toutes les autres fonctions propres doivent (par orthogonalité) s'annuler dans  $\Omega$  et admettent un représentant continu. Ceci nous conduit à définir pour  $u \in C_0^0(\overline{\Omega})$  son **ensemble nodal**

$$N(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}}, \quad (1)$$

et les composantes connexes de  $\Omega \setminus N(u)$  sont par définition les **domaines nodaux** de  $u$ . On désignera alors par  $\mu(u)$  le nombre d'ensembles nodaux de  $u$ .

Nous introduisons maintenant les notions de partition et de partition minimale. La première notion est une notion de partition en un sens faible.

## Définition 1.1

Soit  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Une *k-partition* de  $\Omega$  est une famille  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$  d'ouverts de  $\Omega$  tels que

$$\cup_{i=1}^k D_i \subset \Omega, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j. \quad (2)$$

Nous dirons qu'elle est *ouverte* si les  $D_i$  sont des ouverts de  $\Omega$ , *connexe* si les  $D_i$  sont connexes.

$\mathfrak{D}_k$  désignera l'ensemble des *k-partitions* ouvertes de  $\Omega$ .

Parfois (pour certaines preuves) nous serons amenés à considérer aussi des partitions mesurables.

Nous introduisons maintenant ce que nous entendons par **partition minimale**

## Définition 1.2

Pour tout entier  $k \geq 1$ , et pour  $\mathcal{D}$  dans  $\mathfrak{D}_k$ , nous introduisons<sup>1</sup>

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_i \lambda(D_i). \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Dans le cas où  $D_i$  n'est pas assez régulier, on doit définir la notion de première valeur propre différemment.

Alors nous posons

$$\mathfrak{L}_k = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}). \quad (4)$$

et disons qu'une  $k$ -partition  $\mathcal{D}_0 \in \mathfrak{D}_k$  est minimale si elle vérifie

$$\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D}_0).$$

Une autre définition est utile.

### Définition 1.3

On dira qu'une partition est une *partition nodale* si elle est constituée des domaines nodaux d'une fonction propre.

### Remarque 1.4

Si  $k = 2$ , il est assez bien connu (voir par exemple [17] ou [11]) que  $\mathfrak{L}_2$  est la seconde valeur propre et que toute 2-partition minimale correspond<sup>2</sup> à une partition nodale.

Nos partitions minimales vont hériter de représentants réguliers en un sens que nous allons maintenant préciser.

### Définition 1.5

Une partition  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$  de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{D}_k$  est appelée *forte* si

$$\text{Int}(\overline{\cup_i D_i}) \setminus \partial\Omega = \Omega. \quad (5)$$

Lorsqu'une partition est forte on peut lui associer naturellement un fermé dans  $\overline{\Omega}$  qui joue le rôle de l'ensemble nodal dans le cas d'une partition nodale et qui est défini par :

$$N(\mathcal{D}) = \overline{\cup_i (\partial D_i \cap \Omega)}. \quad (6)$$

Toujours pour décrire les propriétés des partitions minimales, nous sommes conduits à introduire l'ensemble  $\mathcal{R}(\Omega)$  des partitions régulières. Nous commençons par décrire l'ensemble  $M(\Omega)$  des fermés complémentaires.

---

<sup>2</sup>après une modification de "capacité" nulle

**Définition 1.6**

Un fermé  $N$  de  $\overline{\Omega}$  est régulier s'il vérifie :

(i) Il existe un nombre fini de points distincts  $x_i \in \Omega \cap N$ , des entiers  $\nu_i \geq 2$  et des voisinages  $B(x_i, \delta_i)$  de ces points tels que,  $N \cap B(x_i, \delta_i)$  est la réunion de  $\nu_i(x_i)$  courbes régulières (sans points doubles) se rencontrant transversalement en  $x_i$  et tels que dans le complémentaire de ces voisinages  $N$  is localement difféomorphe à une courbe régulière.

(ii)  $\partial\Omega \cap N$  est un ensemble fini (éventuellement vide) de points  $z_i$ , tel que en  $z_i$ ,  $\rho_i \geq 1$  lignes touchent le bord transversalement avec le bord et transversalement deux à deux.

(iii) Enfin,  $N$  a la propriété des croisements à angle égal aux points  $x_i$  de  $\Omega$  et de croisements à angle égal avec le bord aux points  $z_i$ .

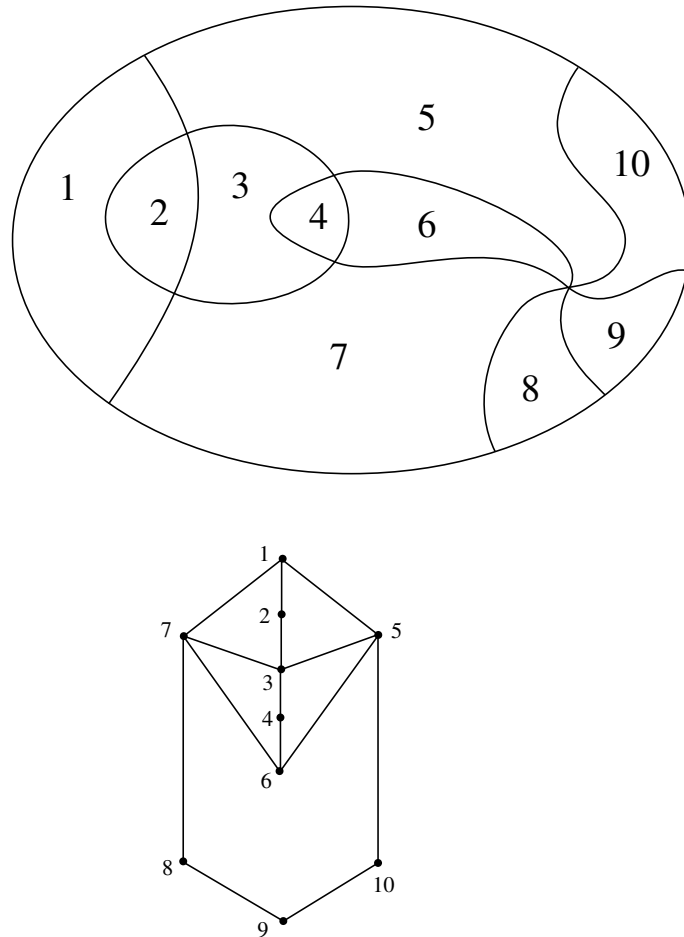


Figure 1: Un exemple de partition régulière avec graphe associé bipartite.

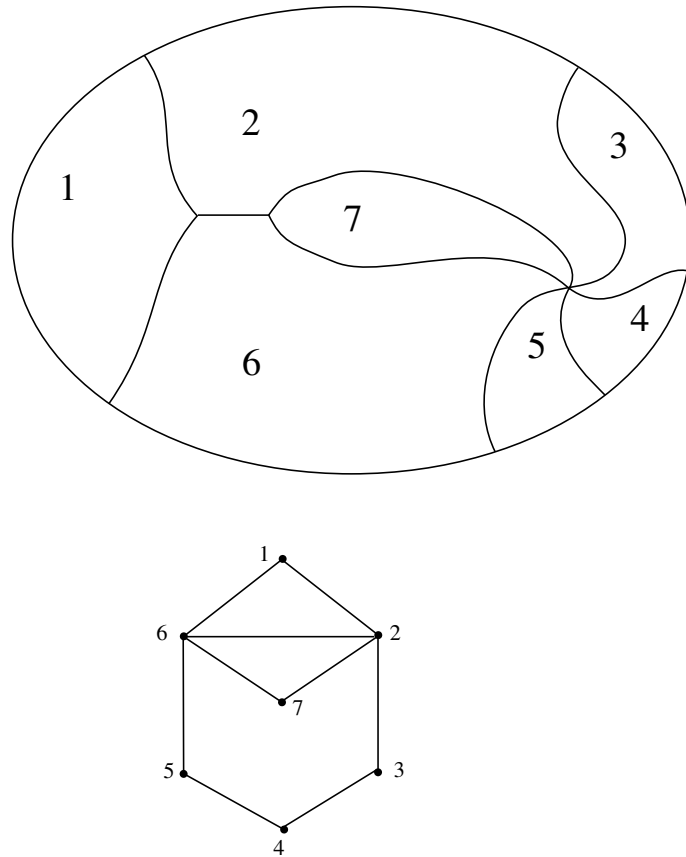


Figure 2: Un exemple de partition régulière avec graphe associé non bipartite

## 2 Principaux résultats

Le premier résultat est dû<sup>3</sup> à Conti-Terracini-Verzini [9, 10, 11].

### **Théorème 2.1**

*Pour tout entier positif  $k$ , il existe une partition  $k$ -minimale régulière.*

On notera aussi que ce théorème (avec une conclusion plus faible) résulte du travail<sup>4</sup> de Bucur-Buttazzo-Henrot [8].

Ce résultat est complété par Helffer–Hoffmann-Ostenhof–Terracini [20] :

<sup>3</sup>du moins sous des hypothèses plus restrictives ensuite améliorées dans [20],

<sup>4</sup>Je remercie A. Henrot pour cette remarque transmise après mon exposé oral.

## Théorème 2.2

Toute  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  minimale de  $\Omega$  a un représentant<sup>5</sup> régulier.

Ce théorème est obtenu en raffinant (par une technique de pénalisation) les résultats de Conti-Terracini-Verzini. Nous allons plus développer dans cet exposé les applications de ces deux théorèmes à la question naturelle de savoir si cette partition minimale est nodale. Avant de répondre à cette question, nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

Nous dirons que  $D_i$  et  $D_j$  sont **voisins** et nous écrirons  $D_i \sim D_j$ , si

$$D_{i,j} := \text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$$

est connexe. On peut alors définir pour toute famille  $\mathcal{D}$  un **graphe**  $G(\mathcal{D})$  en associant à chaque  $D_i$  un sommet et à chaque paire  $D_i \sim D_j$  une flèche. Nous dirons que le graphe associée est **bipartite** s'il peut être colorié avec deux couleurs, deux voisins étant de couleur différente. Nous rappelons que tout graphe associé à une famille nodale est bipartite. Toute partition dont le graphe est bipartite sera aussi appelée bipartite. Nous avons établi dans [20] la propriété suivante :

## Théorème 2.3

Toute partition minimale bipartite est nodale.

Une question naturelle est alors d'examiner si la situation décrite dans ce théorème est générale ou pas. Ce fut au départ pour nous une surprise de constater qu'elle ne pouvait se produire que dans une situation dite **strictement Courant**. Pour être plus précis et justifier cette terminologie, rappelons tout d'abord le théorème classique de Courant.

## Théorème 2.4

Soit  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k$  la  $k$ -ème valeur propre. Alors pour toute fonction réelle non identiquement nulle  $u$  dans l'espace propre  $E(\lambda_k)$  de  $H(\Omega)$  associé à  $\lambda_k$ ,  $\mu(u) \leq k$ .

Avec les notations précédentes, nous dirons que  $u$  est strictement Courant si  $u \in E(\lambda_k) \setminus \{0\}$  et  $\mu(u) = k$ .

---

<sup>5</sup>On peut définir le représentant ainsi. Pour tout ouvert  $D_i$  on peut associer une fonction propre positive  $u_i$  de la réalisation de Dirichlet du Laplacien dans  $D_i$  que l'on considère comme un élément de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Considérant son représentant continu  $\hat{u}_i$  dont on peut montrer l'existence, le représentant régulier de  $D_i$  est défini par  $\hat{u}_i^{-1}(]0, +\infty[)$ .

Pour tout entier  $k \geq 1$ , nous désignons par  $L_k$  la plus petite valeur propre dont l'espace propre contient une fonction propre à  $k$  domaines nodaux. Nous poserons  $L_k = \infty$ , s'il n'existe aucune fonction propre à  $k$  domaines nodaux. On peut montrer en toute généralité [20] que :

$$\lambda_k \leq \mathfrak{L}_k \leq L_k . \quad (7)$$

L'examen des cas d'égalité s'avère très intéressant. C'est l'objet du

### **Théorème 2.5**

*Si  $\mathfrak{L}_k = L_k$  ou  $\mathfrak{L}_k = \lambda_k$  alors  $\lambda_k = \mathfrak{L}_k = L_k$  .*

*De plus, on peut alors trouver dans  $E(\lambda_k)$  une fonction propre  $u$  strictement Courant.*

En d'autres termes, le seul cas où une partition nodale est minimale est le cas strictement Courant.

### **Remarques 2.6**

(i) *Dans le cas de la dimension un, la théorie de Sturm-Liouville montre que*

$$L_k = \mathfrak{L}_k = \lambda_k , \forall k \geq 1 . \quad (8)$$

(ii) *Il est aussi facile de montrer que*

$$\mathfrak{L}_1 = L_1 = \lambda_1 , \quad (9)$$

*et on rappelle que*

$$\mathfrak{L}_2 = L_2 = \lambda_2 , \quad (10)$$

*en utilisant l'orthogonalité de  $u_2$  à la première fonction propre (qui est strictement positive) et le théorème de Courant.*

(iii) *La suite  $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.*

Pour reconnaître si une partition est effectivement minimale, l'observation suivante est utile :

### **Proposition 2.7**

*Soit  $\mathcal{D} = (D_i)_{i=(1,\dots,k)}$  une  $k$ -partition minimale pour  $\mathfrak{L}_k(\Omega)$ . Alors, toute sous-famille  $I \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{D}^I = (D_i)_{i \in I}$  vérifie*

$$\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D}^I) = \mathfrak{L}_{|I|}(\Omega_I^*) , \quad (11)$$



où

$$\Omega_I^* := \text{Int}(\overline{\cup_{i \in I} D_i} \setminus \partial\Omega) .$$

### Remarque 2.8

On en tire des conséquences pour les sous-familles de  $\mathcal{D}$  bipartites. En particulier, l'énoncé (pour  $k = 2$ ) implique la compatibilité des paires de voisins. Nous obtenons en effet des 2-partitions minimales, bien entendu bipartites. Par conséquent toute paire  $(D_i, D_j)$  de voisins est la partition nodale d'une fonction propre associée à la seconde valeur propre de  $H(D_{i,j})$ .

## 3 Variations sur un thème de Pleijel.

Comme conséquence d'un théorème plus général de [4], nous avons l'analogue suivant de la proposition 2.7.

### Proposition 3.1

Supposons que  $u$  soit strictement Courant. Soit  $\{D_i\}_1^k$  la famille des domaines nodaux associés. Soit  $L$  un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, k\}$  avec  $\#L = \ell < k$  et soit  $\Omega_L^* = \text{Int}(\overline{\cup_{i \in L} D_i}) \setminus \partial\Omega$ . Alors

$$\lambda_\ell(\Omega_L^*) = \lambda_k \tag{12}$$

où, pour  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_j(\Omega_L^*)$  désigne la  $j$ -ème valeur propre de  $H(\Omega_L^*)$ .

De plus, si  $\Omega_L^*$  est connexe,  $u|_{\Omega_L^*}$  est strictement Courant et  $\lambda_\ell(\Omega_L^*)$  est simple.

Il est bien connu qu'en dimension un, la  $k$ -ème fonction propre d'un opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$  sur un intervalle a exactement  $k$  domaines nodaux et que ce résultat est faux en dimension plus élevée. Le théorème de Pleijel [23] dit en effet :

### Théorème 3.2

L'ensemble des  $k \in \mathbb{N}$  pour lesquels on peut trouver dans  $E(\lambda_k)$  une fonction propre avec  $k$  ensembles nodaux est fini.

Les arguments de cette preuve donnent en fait plus d'informations que ce seul énoncé. Décrivons-en les deux principaux aspects.

Tout d'abord nous avons une borne inférieure universelle pour  $\mathfrak{L}_k$  qui implique celle sur  $L_k$ .

### Proposition 3.3

$$L_k(\Omega) \geq \mathfrak{L}_k(\Omega) \geq \frac{\pi j^2}{|\Omega|} k, \quad (13)$$

où  $|\Omega|$  désigne l'aire de  $\Omega$  et  $j$  est le plus petit zéro<sup>6</sup> non trivial de la fonction de Bessel  $J_0$ .

La preuve est une conséquence directe de l'inégalité de Faber-Krahn, qui dit qu'à aire fixée la première valeur propre est minimale dans le cas du disque. Le théorème de Pleijel est alors démontré par l'absurde, en observant que  $j^2 > 4$ , et en utilisant l'estimation asymptotique de Weyl qui donne :

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi n}{|\Omega|}, \quad (14)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## 4 Estimation asymptotique

En utilisant une partition (faible!) de  $\Omega$  par des hexagones réguliers d'aire  $\frac{|\Omega|}{k}$ , constituant un pavage partiel, nous obtenons la proposition suivante.

### Proposition 4.1

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} \leq \lambda_1(Hx_1)/|\Omega|, \quad (15)$$

où  $Hx_1$  est l'hexagone régulier d'aire unité.

Notons que l'on peut obtenir un résultat du même type pour d'autres pavages (triangles équilatéraux, carrés) mais c'est l'hexagone régulier qui donne la meilleure majoration connue.

Nous devons à M. Van den Berg la conjecture de l'existence de la limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k}{k}$  et de son égalité à  $\lambda_1(Hx_1)$ . Cette conjecture a été explorée numériquement par V. Bonnaillie-Noël et G. Vial. On pourra consulter le site <http://www.bretagne.ens-cachan/math/Simulations/MinimalPartitions/> et l'article<sup>7</sup> [7].

---

<sup>6</sup> $j \sim 2.4048 \dots$

<sup>7</sup>écrit après l'exposé oral.

## 5 Partitions minimales et Courant strict

Nous esquissons la preuve du Théorème 2.5. Elle commence par l'introduction d'une famille exhaustive  $N(u, \alpha)$ .

### 5.1 Famille exhaustive

Soit  $u$  une fonction propre de  $H(\Omega)$  avec  $k$  domaines nodaux et considérons  $N(u) \in \mathcal{N}(\Omega)$ . Tout d'abord nous considérons les points singuliers (correspondant aux intersections de lignes entre elles ou avec le bord).

De chacun de ces points part dans  $N(u)$  un arc régulier qui est ou bien fermé (et revenant au point initial) ou bien rencontrant un autre point singulier. Nous désignons par  $\mathcal{A}_*$  la famille constitués de ces arcs. Nous ajoutons la classe  $\mathcal{A}_{**}$  des lacets réguliers (sans selfintersections ou croisements) et posons

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}_{**} .$$

Pour chaque élément de  $A \in \mathcal{A}$  on peut définir naturellement<sup>8</sup> un point médian  $x_A$ . On paramètre alors naturellement  $A$  par une application  $L : [-1, +1] \ni t \mapsto L(A, t)$  telle que

$$L(A, 0) = x_A , L(A, -1) = y_A^- , L(A, 1) = y_A^+ ,$$

où  $y_{A^-}$  et  $y_{A^+}$  sont les extrémités de l'arc<sup>9</sup>. Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , nous considérons alors

$$N(u, \alpha) = \{N(u) \setminus L(A, (-1 + \alpha, 1 - \alpha))\} \quad (16)$$

et complétons la définition par

$$N(u, 0) = \emptyset \text{ et } N(u, 1) = N(u) . \quad (17)$$

Notons que par construction, pour tout  $0 < \alpha$ ,  $N(u, \alpha)$  contient tous les points critiques.

### 5.2 Preuve du théorème 2.5.

---

<sup>8</sup>ou arbitrairement dans le cas d'un lacet

<sup>9</sup>le point opposé dans le cas d'un lacet

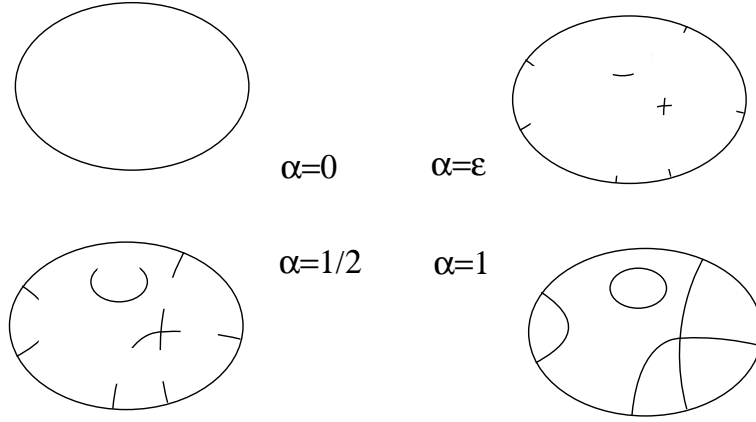


Figure 3: Exemple de famille exhaustive.

Supposons par l'absurde que, pour un  $k$ ,

$$\mathfrak{L}_k = L_k ,$$

mais que  $\lambda_k < \lambda_m = L_k$  pour  $m > k$ .

On suppose que  $m$  est minimal avec cette propriété, et donc que

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m . \quad (18)$$

Soit  $u_m$  une fonction propre normalisée avec donc  $\mu(u_m) = k$  domaines nodaux  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Alors nous associons à  $N(u_m, \alpha)$  la famille décroissante d'ouverts

$$\Omega(\alpha) = \Omega \setminus N(u_m, \alpha) , \quad (19)$$

et considérons le spectre de

$$H(\alpha) := H(\Omega(\alpha)) . \quad (20)$$

Ainsi  $H(0)$  est notre opérateur initial  $H(\Omega)$  et

$$H(1) = \bigoplus_{i=1}^k H(D_i) . \quad (21)$$

Par conséquent  $H(1)$  a comme première valeur propre  $\lambda_m$  avec la multiplicité  $k$ . Par construction  $\sigma(H(0)) = \sigma(H)$ . De plus  $\lambda_1(H(1))$  est de multiplicité  $k$  et

$$\lambda_{k+1}(H(1)) > \lambda_k(H(1)) = \lambda_m(H(0)) .$$

Nous avons alors :

- Pour tout  $\ell$ ,  $\lambda_\ell(H(\alpha))$  est strictement croissante avec  $\alpha$ .
- Pour tout  $\ell$ ,  $\lambda_\ell(H(\alpha))$  dépend continûment de  $\alpha$ .
- Pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\lambda_m \in \sigma(H(\alpha))$ .

Pour le dernier item, il suffit d'observer que, par la construction de  $N(u_m, \alpha)$ , la restriction de  $u_m$  à  $\Omega(\alpha)$  est une fonction propre de  $H(\alpha)$ .

Rappelons que nous sommes au milieu d'un raisonnement par l'absurde et considérons d'abord le cas où  $\lambda_m$  est simple. Alors, il existe un plus petit  $\alpha_1 \in (0, 1)$  tel que

$$\lambda_1(\alpha_1) < \lambda_2(\alpha_1) \leq \dots \leq \lambda_{m-1}(\alpha_1) = \lambda_m(\alpha_1), \quad (22)$$

avec  $\lambda_m(\alpha_1) = \lambda_m$ .

Considérons cette valeur propre de  $H(\alpha_1)$ . La restriction de  $u_m$  à  $\Omega(\alpha_1)$  donne une première fonction propre mais il existe une fonction propre réelle linéairement indépendante  $v$  de  $H(\alpha_1)$  telle que  $v$  soit orthogonal à  $u_m$  dans  $L^2(\Omega(\alpha_1))$  :

$$\langle u_m | v \rangle = 0. \quad (23)$$

Nous allons maintenant jouer dans l'espace vectoriel engendré par  $u_m$  et  $v$ .

### Lemme 5.1

Il existe  $\beta_0 > 0$ , tel que  $\forall \beta \in (-\beta_0, +\beta_0)$  la fonction  $w_\beta = u_m + \beta v$  a exactement  $k$  ensembles nodaux.

De plus, la partition nodale de  $w_\beta$  donne, pour  $\beta \neq 0$ , une partition minimale de  $\Omega$ , distincte de celle de  $u_m$  et bipartite.

### Preuve

Nous rappelons que cette construction est faite pour  $\alpha = \alpha_1 \in (0, 1)$ . Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , soit

$$I_A := L(A, (-1 + \alpha_1, 1 - \alpha_1)),$$

et  $\mathcal{V}_A \subset \Omega$  un voisinage ouvert  $\overline{I_A}$ , dont le bord croise deux fois (et transversalement)  $N(u)$  et tel que chaque composante connexe de  $\Omega(\alpha_1) \setminus \cup_{A \in \mathcal{A}} \overline{\mathcal{V}_A}$  (qui est contenue dans  $\Omega(1)$ ), est contenu dans un unique domaine nodal de  $u_m$ .

Nous supposons que nous avons colorié ces domaines nodaux par des  $+$  et des  $-$ , et ceci permet d'écrire, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la décomposition

$$\partial \mathcal{V}_A \cap \Omega(\alpha_1) = b_A^+ \cup b_A^-,$$

où  $b_A^\pm$  est contenu dans un domaine nodal positif ou négatif de  $u_m$ . Par le Lemme de Hopf, il existe  $\beta_0$  tel que, si  $|\beta| \leq \beta_0$ , alors  $\mu(u_m + \beta v)$  peut seulement augmenter. À l’opposé, si ce nombre augmentait strictement, ceci donnerait une majoration de  $\mathfrak{L}_{k+1}$ , qui, jointe à la stricte monotonie de  $\ell \mapsto \mathfrak{L}_\ell$ , donnerait

$$\lambda_m = \mathfrak{L}_k < \mathfrak{L}_{k+1} \leq \lambda_m ,$$

d’où la contradiction.

Ainsi  $w_\beta$  a exactement  $k$  domaines nodaux constituant une  $k$ -partition minimale  $\mathcal{D}' \in \mathfrak{D}_k$  de  $\Omega$ . Mais  $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$  car  $u_m$  et  $v$  (et donc  $w_\beta$  pour  $\beta \neq 0$ ) sont linéairement indépendants. De plus, on peut vérifier que  $G(\mathcal{D}')$  est bipartite.  $\square$

Maintenant, par le théorème 2.3, l’extension naturelle de  $w_\beta$  à  $\Omega$  est une fonction propre de  $H = H(0)$  et ceci impliquerait que  $\lambda_m$  a la multiplicité au moins deux, en contradiction avec l’hypothèse faite au départ.

Dans le cas où  $\lambda_m$  est de plus grande multiplicité, on peut aussi faire marcher la démonstration moyennant un truc supplémentaire.

La conjonction du théorème 2.5 et du théorème de Pleijel donne l’existence de  $k_0$  tel que  $\mathfrak{L}_k < L_k$  pour tout  $k \geq k_0$ .

Il est maintenant plus simple d’analyser à la main la situation pour le disque et pour les rectangles (au moins dans le cas irrationnel), car nous avons juste à déterminer les fonctions propres strictement Courant.

## 6 Exemple 1: Le cas du disque

Par les tables sur les fonctions de Bessel on n’a pas mal d’information sur les premières valeurs propres. Ce qui nous intéresse ici est d’ordonner les différentes valeurs propres pouvant correspondre à des moments angulaires différents. En particulier, cela va nous donner un premier exemple où les inégalités (7) deviennent strictes.

Considérons  $H(B_1)$ . En coordonnées polaires, nous avons :

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

avec une condition de Dirichlet sur  $r = 1$ . Pour chaque  $\ell \in \mathbb{N}$ , on a à regarder les valeurs propres  $\lambda_{\ell,j}$  de

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell^2}{r^2}\right) f_{\ell,j} = \lambda_{\ell,j} f_{\ell,j}, \quad \text{dans } (0, 1).$$

Observons que cet opérateur est autoadjoint sur  $L^2((0, 1), r dr)$ . Les fonctions propres correspondantes de ce problème sont

$$u(r, \theta) = f_{\ell,j}(r) (a \cos \ell \theta + b \sin \ell \theta), \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0), \quad (24)$$

où  $f_{\ell,j}(r)$  sont des fonctions de Bessel satisfaisant pour  $\ell = 0$ ,  $f'_{0,j}(0) = 0$  et  $f_{0,j}(1) = 0$  et pour  $\ell > 0$ ,  $f_{\ell,j}(0) = f_{\ell,j}(1) = 0$ .

On sait ordonner facilement les quinze premières valeurs propres  $\lambda_{\ell,j}$  en regardant dans des tables [1]. On rappelle que les zéros des fonctions de Bessel sont liés aux valeurs propres par

$$\lambda_{\ell,k} = (j_{\ell,k})^2. \quad (25)$$

Dans le cas du disque nous pouvons montrer

### Proposition 6.1

*Sauf si  $k = 1, 2$  et  $4$ , les partitions minimales ne sont jamais nodales.*

Expliquons le cas  $k = 3$ . On peut découper le disque  $B_1$  en trois secteurs égaux d'ouverture  $2\pi/3$ . Notons  $S_{1/3}$  un tel secteur. Alors la première valeur propre correspondante  $\lambda(S_{1/3})$  vérifie :

$$\mathfrak{L}_3 \leq \lambda(S_{1/3})$$

Par monotonie, nous avons :

$$\lambda(S_{1/3}) < \lambda(S_{1/4})$$

et on vérifie que

$$\lambda(S_{1/4}) = \lambda_4 = \lambda_{2,1},$$

(voir (24)). On en déduit

$$L_3 > \lambda_4 = \mathfrak{L}_4 > \lambda(S_{1/3}) \geq \mathfrak{L}_3.$$

On est alors tenté de conjecturer que la 3-partition minimale du disque est ce que nous appellerons la partition (du sigle) Mercedes.

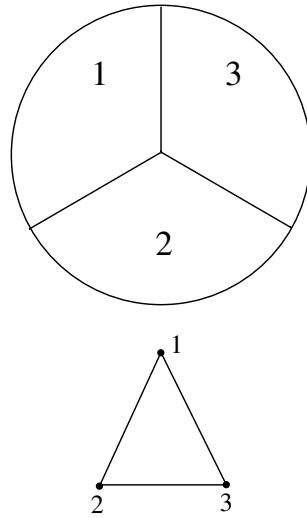


Figure 4: Le logo Mercedes et graphe associé.

Malgré beaucoup d'efforts, l'égalité  $\mathfrak{L}_3 = \lambda(S_{\frac{1}{3}})$  reste une conjecture. Des résultats partiels non triviaux (de Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof) ont permis de montrer que :

- (i) Il n'y a essentiellement que trois types topologiques possibles pour une **3**-partition minimale.
- (ii) Même si on s'attend à ce que la partition minimale hérite de certaines des symétries du disque, elle ne peut pas être trop symétrique. Par exemple, une **3**-partition minimale ne peut pas être invariante par la symétrie par rapport à l'origine.
- (iii) S'il existe une **3**-partition minimale invariante par permutation, alors c'est la partition Mercedes.
- (iv) S'il existe une **3**-partition minimale  $\mathcal{D}$  qui n'a qu'un point singulier dans le disque et si  $0$  est dans  $N(\mathcal{D})$ , alors c'est de nouveau la partition Mercedes.



## 7 Exemple 2: le cas du rectangle

Pour un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , le spectre est donné par

$$\lambda_{m,n} := \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$$

$$((m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2).$$

La première remarque est que toutes les valeurs propres sont simples si  $\frac{a^2}{b^2}$  est irrationnel ce que nous supposons maintenant (sauf précision du contraire). On peut associer à  $\lambda_{m,n}$ , une fonction propre (essentiellement) unique  $u_{m,n}$  telle que  $\mu(u_{m,n}) = nm$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , la plus petite valeur propre correspondant à  $k$  domaines nodaux est

$$L_k = \pi^2 \inf_{mn=k} (m^2/a^2 + n^2/b^2).$$

Le comportement de  $L_k$  dépend des propriétés arithmétiques de  $k$  mais on a toujours

$$L_k \geq 2\pi^2 k / (ab). \quad (26)$$

Ceci implique immédiatement

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{L_k}{k} \geq \frac{2\pi^2}{ab}. \quad (27)$$

### Proposition 7.1

Dans le cas irrationnel,  $\lambda_{m,n}$  ne peut correspondre à une situation Courant-strict si  $\inf(m, n) \geq 3$  ou si  $\inf(m, n) \geq 2$  et  $\max(m, n) \geq 4$ .

Il ne reste donc que peu de cas à analyser à la main pour lesquels la réponse peut dépendre de  $\frac{a}{b}$ .

Dans le cas du carré, un argument similaire au cas du disque montre que

$$\mathcal{L}_3 < L_3.$$

On observe en effet que  $\lambda_4$  admet une fonction propre Courant-strict, de sorte que

$$\mathcal{L}_4 = \lambda_4,$$

et qu'il n'y a pas dans l'espace propre correspondant à  $\lambda_2 = \lambda_3$  de fonctions propres avec trois domaines nodaux (par le théorème de Courant).

Si on fait l'hypothèse qu'il existe une 3-partition minimale du carré symétrique par rapport à un des deux axes, on peut faire une réduction au demi-carré et on peut au moins définir une approche pour rechercher une 2-partition minimale du demi-carré. Ceci se ramène à rechercher une fonction propre correspondant à la deuxième valeur propre dont la partition nodale donnerait la partition minimale. On est ainsi amené à minimiser sur une famille de problèmes mixtes Dirichlet-Neumann.

Des calculs numériques de V. Bonnaillie-Noël et G. Vial ont conduit au candidat naturel suivant pour une partition minimale symétrique<sup>10</sup>.



Figure 5: Trace sur le demi-carré d'un candidat à être une 3-partition minimale.

La structure complète est obtenue à partir du demi-carré par réflexion par rapport à l'axe horizontal. Les trois éléments de la partition sont donc le domaine bleu, le domaine réfléchi et comme troisième domaine le domaine rouge complété par son réfléchi.

---

<sup>10</sup><http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/simulations/MinimalPartitions/>

## 8 Une approche alternative dans le cas régulier.

Même si ces techniques sont moins puissantes que dans les travaux mentionnés auparavant, il est instructif de rappeler quelques résultats antérieurs de [17, 18] qui donnent un éclairage différent.

Le théorème principal est le suivant :

### Théorème 8.1

Soit  $\Omega$  régulier et simplement connexe, et  $N$  un fermé régulier dans  $\overline{\Omega}$ . Supposons que la partition associée  $\mathcal{D}(N) = \{D_1, \dots, D_\mu\}$  soit bipartite et qu'on ait pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- $\lambda$  est la première valeur propre de  $H(D_i)$ .
- Condition de compatibilité par paire :  
 $\lambda$  est valeur propre de  $H(D_{i,j})$  pour toute paire de voisins  $D_i$  et  $D_j$ , qui sont alors les deux domaines nodaux d'une fonction propre.

Alors, il existe  $u$  dans  $E(\lambda) \setminus \{0\}$  dont  $\mathcal{D}(N)$  est la partition nodale.

### Remarques 8.2

- Si  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, on doit ajouter une condition d'holonomie (voir [18]). Dans le cas des partitions minimales, cette condition se réduit à la condition bipartite.
- Remarquons que la condition de compatibilité par paire est plus faible que celle de dire que  $\lambda$  est la seconde valeur propre de  $H(D_{i,j})$  pour toute paire de voisins  $(D_i, D_j)$ .

Ce théorème 8.1 implique :

### Corollaire 8.3

Soit  $\Omega$  simplement connexe,  $k \in \mathbb{N}$  ( $k \geq 2$ ) et soit  $\mathcal{D}^{min} = (D_i)_{i=1, \dots, k}$  une partition minimale forte et régulière. Alors, il existe une fonction propre  $u$  de  $H(\Omega)$  associée à

$$\lambda = \max_i (\lambda(D_i)) ,$$

telle que  $\mathcal{D}^{min}$  est la partition nodale associée à  $u$ .

### Preuve du corollaire

Si on pose  $\lambda = \max_i(\lambda(D_i))$ , le premier point est que tous les  $\lambda(D_i)$  doivent être égaux. Sinon, on pourrait déformer la frontière commune à deux voisins  $D_i$  et  $D_j$  avec  $\lambda(D_i) \neq \lambda(D_j)$  au voisinage d'un point régulier permettant de diminuer  $\max\{\lambda(D_i), \lambda(D_j)\}$  puis en itérant  $\Lambda(\mathcal{D})$  en contradiction avec l'hypothèse de minimalité.

Le second point est d'observer que pour toute paire de voisins  $D_i$  et  $D_j$ ,  $\lambda$  doit être la seconde valeur propre de  $H(D_{i,j})$ . Si ce n'était pas le cas pour une paire  $(i, j)$ , les deux ensembles nodaux d'une fonction propre correspondant à la deuxième valeur propre  $H(D_{i,j})$  donneraient deux nouveaux ouverts  $D'_i$  et  $D'_j$  avec  $\lambda(D'_i) = \lambda(D'_j) < \lambda$ , en contradiction avec l'hypothèse de minimalité et la première partie de la preuve.

Par conséquent, la condition de compatibilité par paire est vérifiée.

### Remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes coauteurs dans les travaux présentés ici : T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini. Je remercie également M. Van den Berg pour des discussions motivantes, A. Henrot pour d'utiles remarques, T. Ramond pour sa disponibilité et V. Bonnaillie-Noël et G. Vial pour tous les résultats numériques obtenus sur cette question et débouchant sur le travail en collaboration [7]

## References

- [1] M. Abramowitz et I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*, Volume 55 of Applied Math Series. National Bureau of Standards, 1964.
- [2] G. Alessandrini. Critical points of solutions of elliptic equations in two variables. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 14 (2)p. 229-256 (1988).
- [3] G. Alessandrini. Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains. *Comment. Math. Helv.* 69 (1), p. 142-154 (1994).
- [4] A. Ancona, B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Nodal domain theorems à la Courant. *Documenta Mathematica*, Vol. 9, p. 283-299 (2004)
- [5] C. Bandle. Isoperimetric inequalities and applications. *Monographs and Studies in Mathematics*, 7, Pitman, 1980.
- [6] P. Bérard. Inégalités isopérimétriques et applications : domaines nodaux des fonctions propres. Exposé XI. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz (1982).
- [7] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer et G. Vial. Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. Prépublication IRMAR 07-35 (2007).
- [8] D. Bucur, G. Buttazzo et A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.* 8 (2), p. 571-579 (1998).

- [9] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *Journal of Functional Analysis* 198, p. 160-196 (2003).
- [10] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.* 54 (3), p. 779-815 (2005).
- [11] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. On a class of optimal partition problems related to the Fucik spectrum and to the monotonicity formula. *Calc. Var.* 22, p. 45-72 (2005).
- [12] M. Dauge et B. Helffer. Eigenvalue variation II. Multidimensional problems. *Journal of differential equations* 104 (2), p. 263-297 (1993).
- [13] R. Diestel. Graph Theory, (second edition). *Graduate Texts in Mathematics* 173, Springer 2000.
- [14] D. Gilbarg et N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer* 1983.
- [15] M.J. Greenberg et J.R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 de *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.
- [16] P. Hartman et A. Wintner. On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. *Amer. J. Math.* 75, p. 449-476 (1953).
- [17] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Converse spectral problems for nodal domains. Version développée de [18]. Prépublication Sept. 2005, mp\_arc 05343.
- [18] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Converse spectral problems for nodal domains. *Moscow Mathematical Journal* 7, p. 67-84 (2007).
- [19] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. On nodal patterns and spectral optimal partitions. Notes non publiées, Décembre 2005.
- [20] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. Prépublication Novembre 2006. Soumis aux Annales de l'Institut Henri Poincaré (Section Analyse non-linéaire).
- [21] T. Hoffmann-Ostenhof, P. Michor et N. Nadirashvili. Bounds on the multiplicity of eigenvalues for fixed membranes. *GAF* 9, p. 1169-1188 (1999).
- [22] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Second edition. *Springer* 1977.
- [23] A. Pleijel. Remarks on Courant's nodal theorem. *Comm. Pure. Appl. Math.* 9, p. 543-550 (1956).
- [24] M. Reed et B. Simon. Methods of modern mathematical physics IV: Analysis of operators. *Academic Press*, 1978.
- [25] B. Simon. Lower semi-continuity of positive quadratic forms. *Proc. Roy. Soc. Edin.* 29, p. 267-273 (1977).
- [26] B. Simon. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. *J. of Funct. Analysis* 28, p. 377-385 (1978).
- [27] P. Stollmann. A convergence theorem for Dirichlet forms with applications to boundary value problems with varying domains. *Math. Z.* 219, p. 275-287 (1995).

- [28] J. Weidmann. Continuity of the eigenvalues of self-adjoint operators with respect to the strong operator topology. *Integral Equations Operator Theory* 3, p. 138-142 (1980).
- [29] J. Weidmann. Monotone continuity of the spectral resolution and the eigenvalues. *Proc. R. Soc. Edimb. Sect. A*85, p. 131-136 (1980).
- [30] J. Weidmann. Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren vom Gebiet. *Math. Scand.* 54, p. 51-69 (1984).

B. HELFFER: LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, BAT. 425, UNIV PARIS-SUD ET CNRS, 91 405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

EMAIL: BERNARD.HELFFER@MATH.U-PSUD.FR