SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2006-2007

Søren Fournais

Le troisième champ critique en théorie de Ginzburg-Landau

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° VI, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A6_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

LE TROISIÈME CHAMP CRITIQUE EN THÉORIE DE GINZBURG-LANDAU.

S. FOURNAIS

D'APRÈS FOURNAIS-HELFFER

Résumé. L'objectif de cet exposé est d'étudier la transition de l'état supraconducteur à l'état normal pour un matériau soumis à un champ magnétique. Nous allons donner une démonstration simple et générale de l'équivalence des différentes définitions possibles du champ critique correspondant à cette transition.

1. Introduction

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau est un modèle généralement accepté de la supraconductivité. Pour une introduction physique au modèle et à la théorie de la supraconductivité voir par exemple [S-JSaTh, TiTi, Ti].

Pour un échantillon cylindrique de section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la fonctionnelle prend la forme suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\psi, \mathbf{A}] = \mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi, \mathbf{A}] = \int_\Omega \Big\{ &|p_{\kappa H \mathbf{A}}\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \\ &+ \kappa^2 H^2 |\operatorname{rot}\mathbf{A} - 1|^2 \Big\}\, dx\ . \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Ici $(\psi, \mathbf{A}) \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}) \times W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et nous utilisons les écritures $p_{\mathbf{A}} = (-i\nabla + \mathbf{A})$ et $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}(A_1, A_2) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$.

La fonction ψ (dite fonction d'onde ou paramètre d'ordre) décrit l'état du matériau. Si $|\psi(x)| \approx 0$, le matériau n'a pas de propriété supraconductrice près du point x, et on dit que le matériau est dans son état *normal*. Le cas $|\psi(x)| \approx 1$ signifie que le matériau est dans son état supraconducteur[1]. Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ décrit le champ magnétique, $\operatorname{rot}\mathbf{A}$, à l'intérieur de Ω. Les états physiques sont donnés par les minimiseurs (plus généralement les points stationnaires) de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$.

Le paramètre κ dépend du matériau, H est une mesure du champ magnétique extérieur. Nous allons étudier les minimiseurs de la fonctionnelle $\mathcal{E}$ dans la limite $\kappa, H \to \infty$, ce qui correspond dans le langage physique à l'étude des matériaux de 'Type II' soumis à des champs magnétiques forts.

La fonctionnelle est invariante de jauge, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}[\psi, \mathbf{A}] = \mathcal{E}[e^{-i\kappa H\phi}\psi, \mathbf{A} + \nabla\phi]$$

[1] Un résultat standard, dont nous n'avons pas besoin dans la suite, est que $\|\psi\|_\infty \le 1$ pour tout point stationnaire de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$. Ce résultat donne plus de rigueur à l'interprétation ci-dessus et est une conséquence du principe du maximum (voir [DGP] pour une démonstration élémentaire).

pour toute fonction ϕ. Pour éliminer cette symétrie nous allons imposer la condition de jauge suivante.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{dans } \Omega\ , \qquad\qquad \mathbf{A}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\ . \tag{1.2}$$

Ici et dans la suite de l'exposé, ν est la normale intérieure de $\partial\Omega$. Nous allons toujours supposer que les domaines Ω sont bornés, réguliers et simplement connexes.

Nous allons fixer la notation $\mathbf{F}$ pour un potentiel vecteur qui engendre le champ magnétique extérieur :

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 1, \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega\ , \qquad\qquad \mathbf{F}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\ .$$

La configuration $(\psi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{F})$ s'appelle l'*état normal*.

Notre point de départ est le théorème suivant [GiPh].

Théorème 1.1.
Il existe une constante $\phi_0 > 0$ telle que si $H \geq \max(1/\kappa, \phi_0\kappa)$, alors l'unique minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ est l'état normal.

Ce théorème permet de définir un champ critique correspondant à la transition de phase de l'état supraconducteur ($\psi \neq 0$) à l'état normal.

$$H_{C_3}(\kappa) := \inf\big\{ H > 0 \,\big|\, \text{l'état normal est l'unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H} \text{ pour tout } H' > H \big\}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.
H_{C_3} est la troisième champ critique. Les deux autres champs critiques H_{C_1} et H_{C_2} correspondent respectivement à la valeur du champ magnétique où apparaît (par champ extérieur croissant) le premier vortex du minimiseur et à la valeur où la supraconductivité se concentre sur le bord de l'échantillon. Ces deux champs critiques ne jouent aucun rôle dans le reste de l'exposé.

Beaucoup d'auteurs ont calculé l'asymptotique de $H_{C_3}(\kappa)$ dans la limite $\kappa \to \infty$. Le résultat optimal est le suivant (voir par exemple [LuPa1, PiFeSt, HePa, FoHe2]).

Théorème 1.3.
Il existe deux constantes universelles $\Theta_0 > 0$ et $C_1 > 0$, telles que pour tout domaine Ω borné, régulier et simplement connexe, on trouve l'asymptotique suivante

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + C_1 \frac{k_{\max}}{\Theta_0^{3/2}} + \mathcal{O}(\kappa^{-1/2}), \tag{1.4}$$

où $k_{\max}$ est la courbure maximale du bord $\partial\Omega$.

Les constantes Θ_0 et C_1 sont déterminées par l'analyse d'un problème spectral explicite. Leur définition sera donnée en (2.1) et (2.3).

Dans ce texte nous allons considérer une question plus fondamentale qui est celle de la définition même du champ critique. Il est assez évident que la définition (1.3) est un peu arbitraire— ci-dessous nous allons donner des définitions alternatives. D'un point de vue physique on aimerait que ces définitions soient équivalentes. Nous avons réussi à démontrer que cela est bien le cas quand le paramètre κ est assez grand. Outre l'importance d'avoir clarifié la définition d'un objet d'intérêt physique ce résultat permet aussi d'obtenir plus facilement les asymptotiques du type (1.4), car une des définitions équivalentes ne fait référence qu'à un problème linéaire.

On peut au moins proposer les deux définitions suivantes (correspondant aux champs critiques supérieurs et inférieurs)

$$\begin{aligned}
&\underline{H}_{C_3}(\kappa) := \inf\{H > 0 \,|\, (0, \mathbf{F}) \text{ est un minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\},\\
&\overline{H}_{C_3}(\kappa) := H_{C_3}(\kappa).
\end{aligned}$$

L'inégalité $\underline{H}_{C_3}(\kappa) \leq \overline{H}_{C_3}(\kappa)$ est évidente.

En plus, on voudrait clarifier les relations entre ces champs globaux et les champs locaux correspondants, où on remplace le mot 'minimiseur' par 'minimiseur local' dans la définition. C'est-a-dire on demande que la Hessienne de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ soit non-négative au point $(\psi, \mathbf{A}) = (0, \mathbf{F})$. Pour les champs locaux on peut donner une définition équivalente ne faisant intervenir que des quantités spectrales. Pour cela nous allons introduire quelques notations.

Soit $Q_{\mathbf{A}}$ la forme quadratique

$$u \mapsto Q_{\mathbf{A}}[u] := \int_\Omega |(-i\nabla + \mathbf{A})u|^2 \, dx, \tag{1.5}$$

de domaine $W^{1,2}(\Omega)$. Dans le cas $\mathbf{A} = B\mathbf{F}$, on utilise la notation $\mathcal{H}(B)$ pour l'opérateur autoadjoint associé à la forme quadratique. De manière équivalente, $\mathcal{H}(B)$ est l'opérateur différentiel $(-i\nabla + B\mathbf{F})^2$, avec la condition de Neumann magnétique $\nu \cdot (-i\nabla + B\mathbf{F})u\big|_{\partial\Omega} = 0$ au bord. Nous allons aussi utiliser la notation

$$\lambda_1(B) := \inf \operatorname{Spec} \mathcal{H}(B), \tag{1.6}$$

pour la première valeur propre de $\mathcal{H}(B)$.

Les champs locaux peuvent alors être définis de la manière suivante

$$\begin{aligned}
&\underline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa) := \inf\{H > 0 \,|\, \lambda_1(\kappa H) \geq \kappa^2\},\\
&\overline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa) := \inf\{H > 0 \,|\, \lambda_1(\kappa H') \geq \kappa^2 \text{ pour tout } H' > H\}.
\end{aligned}$$

Il est évident que la question de l'identité $\underline{H}^{\rm lin}_{C_3} \stackrel{?}{=} \overline{H}^{\rm lin}_{C_3}$ est très liée à la question de monotonie de la fonction $B \mapsto \lambda_1(B)$.

Nous allons démontrer les deux théorèmes 1.4 et 1.6 suivants.

Théorème 1.4.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe, alors il existe $B_0 > 0$ tel que l'application $[B_0, +\infty) \ni B \mapsto \lambda_1(B)$ est continue, strictement croissante et satisfait $\lambda_1(B) \to +\infty$ quand $B \to +\infty$.

On en déduit la propriété suivante.

Corollaire 1.5.
Pour κ assez grand on a l'égalité,

$$\underline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa).$$

Notre dernier théorème concerne la relation entre les champs locaux et globaux.

Théorème 1.6.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe, alors il existe $\kappa_0 > 0$ tel que

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = \underline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}^{\rm lin}_{C_3}(\kappa),$$

pour tout $\kappa \geq \kappa_0$.

La conclusion du Théorème 1.6 a été démontré dans [FoHe2] sous des hypothèses plus restrictives. Vu l'intérêt de clarifier la définition du champ critique, il semble important d'avoir une démonstration simple et générale de ce résultat. Ceci a été achevé dans [FoHe3]. Des généralisations au cas des domaines à coins et à la dimension 3 sont prévus (voir [FoHe4, BoFo]).

En particulier, la simplification par rapport à [FoHe2] est que nous n'avons besoin que de calculer les premier deux termes de l'asymptotique de $\lambda_1(B)$ (voir (3.9) ci-dessous).

2. Le demi-plan

On considère $\mathbb{R}^2_+ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, t > 0\}$ et l'opérateur $\mathcal{H}(B) := (-i\nabla + B\mathbf{F})^2$ sur $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ avec la condition de Neumann $\nu \cdot (-i\nabla + B\mathbf{F})u\big|_{t=0} = 0$ au bord. Pour convenance nous prenons ici une jauge un peu différente de celle définie dans l'introduction, $\mathbf{F}(s,t) := (-t, 0)$. Ceci nous permet de faire le changement d'échelles $\sqrt{B}(s,t) =: (\sigma, \tau)$ et une transformation de Fourier partielle par rapport à σ pour arriver à l'équivalence unitaire suivante

$$\mathcal{H}(B) \sim B \int_{\oplus} \mathfrak{h}(\xi)\, d\xi,$$

avec $\xi \in \mathbb{R}$ et

$$\mathfrak{h}(\xi) := -\frac{d^2}{d\tau^2} + (\tau + \xi)^2,$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec condition de Neumann à 0.

L'étude spectrale de cette famille d'opérateurs à été faite dans [DaHe] et on sait en particulier les choses suivantes

- Il existe $\xi_0 \in (-1, 0)$ tel que la fonction $\xi \mapsto \inf \operatorname{Spec} \mathfrak{h}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $(-\infty, \xi_0]$ et strictement croissante sur $[\xi_0, \infty)$. On peut donc identifier le minimum
$$\Theta_0 := \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \inf \operatorname{Spec} \mathfrak{h}(\xi) = \inf \operatorname{Spec} \mathfrak{h}(\xi_0). \tag{2.1}$$
- On a l'inégalité (élémentaire mais importante) suivante
$$\Theta_0 < 1. \tag{2.2}$$
(Numériquement on trouve $\Theta_0 \approx 0.59$...)
- Pour chaque ξ le spectre $\operatorname{Spec} \mathfrak{h}(\xi)$ est constitué de valeurs propres simples. En particulier il existe une unique fonction (à multiplication par une constante $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ près) u_0, normalisée dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ et telle que
$$\mathfrak{h}(\xi_0) u_0 = \Theta_0 u_0.$$
Nous allons définir une constante $C_1 > 0$ par la formule
$$C_1 := \frac{|u_0(0)|^2}{3}. \tag{2.3}$$

3. Diamagnétisme généralisé

Dans ce chapitre nous allons démontrer le Théorème 3.1 suivant. Il est évident que le Théorème 1.4 est une conséquence du Théorème 3.1.

Théorème 3.1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe. Alors $B \mapsto \lambda_1(B)$ est continue, les dérivées directionnelles,

$$\lambda'_{1,+}(B) = \lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{\lambda_1(B+\epsilon) - \lambda_1(B)}{\epsilon}, \qquad \lambda'_{1,-}(B) = \lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{\lambda_1(B) - \lambda_1(B-\epsilon)}{\epsilon}$$

existent pour tout $B > 0$ et

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) > 0. \tag{3.1}$$

Plus précisément, si Ω n'est pas un disque alors les limites existent et

$$\lim_{B\to\infty} \lambda'_{1,-}(B) = \lim_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) = \Theta_0. \tag{3.2}$$

Si Ω est un disque alors,

$$\begin{aligned} &\limsup_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) > \Theta_0, \\ 0 < &\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) < \Theta_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En particulier, dans tous les cas, il existe $B_0 > 0$ tel que $B \mapsto \lambda_1(B)$ est strictement croissante sur $[B_0, \infty)$.

Pour $s \in \partial\Omega$ soit $k(s)$ la courbure de $\partial\Omega$ au point s. Soit Π l'ensemble des points sur le bord à courbure maximale,

$$\Pi := \{s \in \partial\Omega \,|\, k(s) = k_{\max}\}.$$

La différence élémentaire mais cruciale entre le disque et les autres domaines est que, si Ω n'est pas un disque, alors on peut trouver un voisinage $\mathcal{O}$ de Π tel que l'intersection

$$\mathcal{O} \cap \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq t_1\} \tag{3.4}$$

soit simplement connexe pour tout t_1 assez petit.

Nous rappelons le résultat suivant qui est démontré par exemple dans [HeMo2].

Proposition 3.2.
L'énergie fondamentale admet l'asymptotique suivante

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B + o(B)\,, \tag{3.5}$$

dans la limite $B \to \infty$.

Soit $(D_1, D_2) = -i\nabla + B\mathbf{F}$, alors $i[D_1, D_2] = B$. Pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ (donc à support disjoint du bord $\partial\Omega$), nous pouvons obtenir l'inégalité suivante en intégrant par parties

$$\begin{aligned} B\|u\|_2^2 &= i\int_\Omega \overline{u}\,[D_1, D_2]u\,dx = -2\Im\langle D_1 u, D_2 u\rangle \\ &\leq \int |D_1 u|^2 + |D_2 u|^2\,dx \\ &= \langle u, \mathcal{H}(B)u\rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vu que $\Theta_0 < 1$, l'inégalité (3.6), (3.5) et les techniques des estimations d'Agmon [Ag, Hel2] entraînent que la première fonction propre est exponentiellement localisée près du bord $\partial\Omega$.

Lemme 3.3 (Estimations d'Agmon dans le variable normale).
Il existe $\alpha, M, C > 0$ tels que pour tout $B \geq 1$ et toute fonction propre $\psi_1(\,\cdot\,;B)$ de $\mathcal{H}(B)$ associée au premier valeur propre $\lambda_1(B)$ on a

$$\int_\Omega e^{2\alpha\sqrt{B}\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}\big\{|\psi_1(x;B)|^2 + \frac{1}{B}|p_{B\mathbf{F}}\psi_1(\,\cdot\,;B)|^2\big\}\,dx$$
$$\leq C\int_{\{\sqrt{B}\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\leq M\}} |\psi_1(x;B)|^2\,dx\,. \tag{3.7}$$

En particulier pour tout $N > 0$,

$$\int \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^N|\psi_1(x;B)|^2\,dx = \mathcal{O}(B^{-N/2}). \tag{3.8}$$

D'après [HeMo2, Proposition 10.5] nous avons aussi un contrôle plus fin de l'énergie.

Proposition 3.4.
Soient Θ_0, C_1 les constantes universelles définies dans (2.1) et (2.3) et soit, pour tout $C > 0$,

$$U_B(x) = \begin{cases} B, & \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geq 2B^{-1/6}, \\ \Theta_0 B - C_1 k(s)\sqrt{B} - CB^{1/3}, & \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq 2B^{-1/6}. \end{cases}$$

Alors si $B \geq 1$ et C est assez grand, nous avons pour toute $\psi \in W^{2,2}(\Omega)$,

$$\langle \psi\,,\, \mathcal{H}(B)\psi\rangle \geq \int_\Omega U_B(x)|\psi(x)|^2\,dx.$$

La Proposition 3.4 et une borne supérieure correspondante (aussi démontrée dans [HeMo2]) nous donne l'asymptotique

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B - C_1 k_{\max}\sqrt{B} + o(\sqrt{B}), \tag{3.9}$$

De plus la Proposition 3.4 et (3.9) entraînent une localisation dans la variable parallèle au bord. En fait nous n'allons utiliser que la version faible suivante de cette localisation.

Lemme 3.5.
Soit $\epsilon_0 > 0$ et soit Π l'ensemble donné par (3.4). Alors pour tout $N > 0$ il existe $C > 0$ telle que, si $\psi_1(\,\cdot\,;B)$ est un état fondamental de $\mathcal{H}(B)$, alors

$$\int_{\{\operatorname{dist}(x,\Pi)\geq\epsilon_0\}} |\psi_1(x;B)|^2\,dx \leq C\;B^{-N}\;.$$

Maintenant nous allons introduire des coordonnées adaptées près du bord. Soit $\gamma : \frac{|\partial\Omega|}{2\pi}\mathbb{S}^1 \to \partial\Omega$ une paramétrisation du bord avec $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout s. Pour $t_0 > 0$ soit

$$\Phi : \frac{|\partial\Omega|}{2\pi}\mathbb{S}^1 \times (0,t_0) \to \Omega \qquad\qquad \Phi(s,t) = \gamma(s) + t\nu(s).$$

Pour t_0 assez petit on démontre que Φ est un difféomorphisme avec comme image $\{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < t_0\}$. De plus le Jacobien est donné par $|D\Phi| = 1 - tk(s)$.

Lemme 3.6.
Soient $\epsilon \leq \min(t_0/2, |\partial\Omega|/2)$, $s_0 \in \partial\Omega$ et

$$\Omega(\epsilon,s_0) := \{x = \Phi(s,t)\,\big|\, t \leq \epsilon, |s - s_0| \geq \epsilon\}.$$

Alors il existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ telle que la fonction $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{F} + \nabla\phi$ satisfait

$$|\widehat{\mathbf{A}}(x)| \leq C\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega),$$

pour tout $x \in \Omega(\epsilon, s_0)$.

Démonstration.
Soit $\widetilde{\mathbf{A}} = (\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$ la 1-forme magnétique dans les coordonnées (s,t),

$$F_1 dx + F_2 dy = \widetilde{A}_1 ds + \widetilde{A}_2 dt.$$

Après une dérivée et en utilisant que $dx \wedge dy = |D\Phi| ds \wedge dt$, on trouve

$$\mathrm{rot}_{\,s,t}\widetilde{\mathbf{A}} = \partial_s \widetilde{A}_2 - \partial_t \widetilde{A}_1 = (1 - tk(s)).$$

Puisque l'ensemble $\{(s,t)\,|\,t \leq \epsilon, |s - s_0| \geq \epsilon\}$ est simplement connexe il existe une fonction (changement de jauge) $\widetilde{\phi} \in C^\infty(\phi^{-1}(\Omega(\epsilon, s_0)))$ telle que

$$\widetilde{\mathbf{A}} + \nabla_{s,t}\widetilde{\phi} = (t - t^2 k(s)/2, 0).$$

Soit $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, avec

$$\begin{aligned} \chi = 1 \quad &\text{on} \quad \{x\,|\,t \leq \epsilon, |s - s_0| \geq \epsilon\}, \\ \chi = 0 \quad &\text{on} \quad \{x\,|\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\epsilon \text{ ou } |s - s_0| \leq \epsilon/2\}, \end{aligned}$$

et soit $\phi(x) = \widetilde{\phi}(\Phi^{-1}(x))\chi(x)$. Alors ϕ est la fonction cherchée. □

Les deux prochains lemmes sont élémentaires et permettent de faire des changements de jauge dans l'expression de la dérivée de $\lambda_1(B)$.

Lemme 3.7.
Soit $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$ et soit $\mathbf{a} \in W^{1,2}(\Omega)$ tel que $\nu \cdot \mathbf{a}\big|_{\partial\Omega} = 0$. Alors

$$\langle \psi\,,\, \big(\mathbf{a} \cdot p_{\mathbf{A}} + \mathbf{a} \cdot p_{\mathbf{A}}\big)\psi \rangle = 2\Re\langle \mathbf{a}\psi\,,\, p_{\mathbf{A}}\psi \rangle$$

Démonstration.
Elle résulte d'intégrations par parties. □

Lemme 3.8.
Soit $\mathcal{H}$ l'opérateur $p_{\mathbf{A}}^2$ avec la condition de Neumann $\nu \cdot p_{\mathbf{A}}\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$, et soit ψ une fonction propre de $\mathcal{H}$. Alors pour toute $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\Re\langle (\nabla\phi)\psi\,,\, p_{\mathbf{A}}\psi \rangle = 0.$$

Démonstration.
Elle résulte aussi d'intégrations par parties. □

Démonstration du Théorème 3.1.
La continuité de λ_1 et l'existence des dérivées directionnelles, $\lambda'_{1,+}(B)$ et $\lambda'_{1,-}(B)$ sont des conséquences de la théorie analytique des perturbations et de la compacité de la résolvante $(\mathcal{H}(B) + 1)^{-1}$. Ici on utilise le fait que $\nu \cdot \mathbf{F}\big|_{\partial\Omega} = 0$ et donc que le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{H}(B))$ est indépendant de B. Il ne reste donc plus qu'à démontrer les énoncés sur les limites des dérivées.

Cas 1. Ω n'est pas un disque.
Si Ω n'est pas un disque, alors $\Pi \neq \partial\Omega$. Par conséquent il existe un point du bord paramétré par $s_0 \in [-|\partial\Omega|/2, |\partial\Omega|/2]$ et $0 < \epsilon_0 < \min(t_0/2, |\partial\Omega|/4)$ tels que

$$[s_0 - 2\epsilon_0, s_0 + 2\epsilon_0] \cap \Pi = \emptyset.$$

Soit $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{F} + \nabla\phi$ le potentiel vecteur défini dans le Lemme 3.6, et $\widehat{\mathcal{H}}(B)$ l'opérateur $(-i\nabla + B\widehat{\mathbf{A}})^2$ avec condition de Neumann au bord. Puisque les opérateurs sont unitairement équivalents, $\widehat{\mathcal{H}}(B)$ et $\mathcal{H}(B)$ ont le même spectre.

Par la théorie analytique des perturbations il existe pour tout B un choix de fonction propre $\psi_{1,+}(\cdot, B)$ avec $\mathcal{H}(B)\psi_{1,+}(\cdot, B) = \lambda_1(B)\psi_{1,+}(\cdot, B)$ et tel que

$$\begin{aligned}\lambda'_{1,+}(B) &= \langle \psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, \big(\mathbf{F}\cdot p_{B\mathbf{F}} + p_{B\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}\big)\psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\rangle \\ &= 2\Re\big\langle \mathbf{F}\psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{B\mathbf{F}}\psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ici on a utilisé le Lemme 3.7 pour obtenir la deuxième égalité.

Soit $\widehat{\psi}_{1,+}(\cdot, B) := e^{iB\phi}\psi_{1,+}(\cdot, B)$. Par l'invariance de jauge, Lemme 3.8, on obtient

$$2\Re\big\langle \mathbf{F}\psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{B\mathbf{F}}\psi_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle = 2\Re\big\langle \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{B\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle.$$

On peut donc continuer le calcul de la dérivée de λ_1 de la manière suivante

$$\begin{aligned}\lambda'_{1,+}(B) &= 2\Re\big\langle \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{B\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle \\ &= \beta^{-1}\Big\{\big\langle p_{(B+\beta)\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{(B+\beta)\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle \\ &\qquad - \big\langle p_{B\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\,,\, p_{B\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\psi}_{1,+}(\,\cdot\,; B)\big\rangle \\ &\qquad - \beta^2\int_\Omega |\widehat{\mathbf{A}}|^2\,|\widehat{\psi}_{1,+}(x; B)|^2\,dx\Big\} \\ &\geq \frac{\lambda_1(B+\beta) - \lambda_1(B)}{\beta} - \beta\int_\Omega |\widehat{\mathbf{A}}|^2\,|\psi_{1,+}(x; B)|^2\,dx\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

où l'inégalité découle du principe variationnel et de l'égalité $|\widehat{\psi}_{1,+}| = |\psi_{1,+}|$. En utilisant le Lemme 3.6, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\widehat{\mathbf{A}}|^2\,|\psi_{1,+}(x; B)|^2\,dx \leq C\int_\Omega \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^2|\psi_{1,+}(x; B)|^2\,dx \\ + \|\widehat{\mathbf{A}}\|_\infty^2\int_{\Omega\setminus\Omega(\epsilon_0, s_0)} |\psi_{1,+}(x; B)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

En combinant les Lemmes 3.3 et 3.5, on trouve qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_\Omega |\widehat{\mathbf{A}}|^2\,|\psi_{1,+}(x; B)|^2\,dx \leq C\,B^{-1}\,. \tag{3.13}$$

On choisit $\beta = \eta\,B$, avec $\eta > 0$. En appliquant l'asymptotique (3.5) de $\lambda_1(B)$, nous obtenons de (3.11) et (3.13) :

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0 - \eta\,C\,. \tag{3.14}$$

Puisque η est arbitraire cela entraîne que

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0\,. \tag{3.15}$$

Le même argument s'applique à la dérivée à gauche, $\lambda'_{1,-}(B)$, et on obtient

$$\limsup_{B\to\infty} \lambda'_{1,-}(B) \leq \Theta_0. \tag{3.16}$$

C'est une conséquence facile de la théorie des perturbations que, $\lambda'_{1,+}(B) \leq \lambda'_{1,-}(B)$ pour tout B, ce qui achève la preuve de (3.2).

Cas 2. Le cas du disque.
Dans le cas d'un disque on ne peut pas trouver une jauge telle que $\mathbf{A}\psi$ soit petit, et par conséquent il faut calculer une asymptotique plus précise de $\lambda_1(B)$. Il est possible de l'obtenir par un calcul explicite utilisant la symétrie rotationnelle du problème. Ce calcul à été fait dans [FoHe1]. Nous allons ici seulement indiquer les résultats.

D'abord on démontre l'asymptotique suivante pour $\lambda_1(B)$ pour le cas d'un disque de rayon 1 (cette asymptotique contient un terme de plus que le résultat de [BaPhTa]) :

$$\lambda_1(B) = \Theta_0 B - C_1\sqrt{B} + 3C_1\sqrt{\Theta_0}\big(\Delta_B^2 + C_0\big) + \mathcal{O}(B^{-\frac{1}{2}})\,. \tag{3.17}$$

Ici

$$\Delta_B := \inf_{m\in\mathbb{Z}} |\delta(m,B) - \delta_0|\,, \tag{3.18}$$

avec

$$\delta(m,B) = m - \tfrac{B}{2} - \xi_0\sqrt{B}. \tag{3.19}$$

et δ_0, C_0 sont deux constantes universelles. L'inégalité (3.11) reste vraie (avec $\mathbf{F}$ au lieu de $\mathbf{A}$ partout). Nous allons prendre $\beta > 0$ indépendant de B. L'estimation

$$\int_\Omega |\mathbf{F}|^2\,|\psi_{1,+}(x;B)|^2\,dx \leq \|\mathbf{F}\|_\infty^2 \|\psi_{1,+}\|_2^2 \leq C,$$

combiné avec (3.17) entraîne l'inégalité

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0 + 3C_1\sqrt{\Theta_0}\beta^{-1}\liminf_{B\to\infty}(\Delta_{B+\beta}^2 - \Delta_B^2) + \mathcal{O}(\beta). \tag{3.20}$$

Des considérations élémentaires, utilisant que $-1 \leq \xi_0 \leq 0$, donnent

$$\Delta_{B+\beta}^2 - \Delta_B^2 \geq -\beta/2,$$

pour tout $B > 1, \beta > 0$. Par conséquent (3.20) devient, après avoir pris la limite $\beta \to 0$,

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0 - 3C_1\sqrt{\Theta_0}/2. \tag{3.21}$$

Des estimations connues sur les constantes Θ_0 et C_1 entraînent que le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus est strictement positif. Ceci donne l'estimation

$$0 < \liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B),$$

et donc la monotonie de λ_1 pour B grand. Une analyse un peu plus détaillée permet d'obtenir les autres inégalités de (3.3). □

4. Champs critiques

Nous allons maintenant identifier les différents champs critiques. Avant de procéder à la démonstration nous allons énoncer les inégalités utilisées dans la preuve.

Un premier ingrédient est une inégalité de type Agmon pour le problème non-linéaire (voir [Pan, HePa, FoHe2]).

Théorème 4.1.
Soit $\delta > 0$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe. Alors il existent $\alpha, C > 0$, tels que pour tout minimiseur $(\psi, \mathbf{A})_{\kappa,H}$ de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ avec

$$\kappa/H < 1 - \delta\,, \qquad\qquad \kappa > C\,, \tag{4.1}$$

on a l'inégalité

$$\int_\Omega e^{\alpha\sqrt{\kappa H}\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)}\big(|\psi|^2 + \tfrac{1}{\kappa H}|p_{\kappa H\mathbf{A}}\psi|^2\big)\,dx \leq C\int_\Omega |\psi|^2\,dx\;. \tag{4.2}$$

Le théorème précédent permet de contrôler la norme L^2 de ψ par sa norme L^p, pour $p > 2$, avec gain d'une puissance de κH :

Corollaire 4.2.
Sous les hypothèses du théorème précédent, soit $p \geq 2$. Alors il existe $C_p > 0$ tel que

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\kappa H)^{-\frac{p-2}{4p}}\|\psi\|_{L^p(\Omega)}\;. \tag{4.3}$$

Démonstration.
En utilisant le théorème on trouve qu'il existe $D > 0$ indépendant de κ, H tel que :

$$\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq D\int_{\{d(x,\partial\Omega)\leq D/\sqrt{\kappa H}\}} |\psi(x)|^2\,dx\;.$$

L'inégalité de Hölder avec $q \geq 1$ implique que

$$\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{D}(\kappa H)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})}\Big(\int |\psi(x)|^{2q}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\;.$$

Le choix $q = p/2$ entraîne (4.3). □

La deuxième inégalité que nous allons utiliser est une conséquence de l'ellipticité du système rot-div (voir [Te]).

Théorème 4.3.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{F}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - 1\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $\mathbf{A} \in H^1(\Omega)$ qui vérifie la condition de jauge (1.2).

En combinant cette inégalité avec l'inclusion continue (de Sobolev) de $L^p(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour tout $p < \infty$, on trouve en particulier

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{F}\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - 1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Démonstration du Théorème 1.6.
Le Théorème 1.4 combiné avec l'asymptotique (3.5) donne que

$$\underline{H}^{\mathrm{lin}}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}^{\mathrm{lin}}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + o(\kappa),$$

pour $\kappa \to \infty$. En outre, le Théorème 1.1 nous dit que $\overline{H}_{C_3}(\kappa) \leq \phi_0\kappa$, pour une constante ϕ_0. Finalement, soit u_B l'état fondamental de $\mathcal{H}(B)$, c'est-à-dire vérifiant $\mathcal{H}(B)u_B = \lambda_1(B)u_B$. En utilisant la paire $(\psi, \mathbf{A}) = (\eta u_{\kappa H}, \mathbf{F})$, avec $\eta \ll 1$, comme fonction test dans la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$, on obtient que

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) \geq \frac{\kappa}{\Theta_0} + o(\kappa).$$

Le résultat de cette analyse préliminaire est qu'il suffit de montrer le Théorème 1.6 avec la restriction supplémentaire

$$\Lambda^{-1}\kappa \leq H \leq \Lambda\kappa, \tag{4.5}$$

pour $\Lambda > 0$ assez grand.

Soit maintenant $(\psi, \mathbf{A})$ un minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$. Alors

$$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi, \mathbf{A}] \leq \mathcal{E}_{\kappa,H}[0, \mathbf{F}] = 0,$$

et donc

$$\Delta := \kappa^2 \|\psi\|_2^2 - Q_{\kappa H \mathbf{A}}[\psi] \geq 0. \tag{4.6}$$

En outre, on en déduit de la non-positivité de l'énergie que

$$\frac{\kappa^2}{2} \|\psi\|_4^4 \leq \Delta, \tag{4.7}$$

et

$$(\kappa H)^2 \|\operatorname{rot} \mathbf{A} - 1\|_2^2 \leq \Delta. \tag{4.8}$$

Maintenant nous pouvons calculer pour $\delta > 0$ arbitraire,

$$\begin{aligned} 0 \geq -\Delta &= Q_{\kappa H \mathbf{A}}[\psi] - \kappa^2 \|\psi\|_2^2 \\ &\geq (1-\delta) Q_{\kappa H \mathbf{F}}[\psi] - \kappa^2 \|\psi\|_2^2 - \delta^{-1} (\kappa H)^2 \int |\mathbf{A} - \mathbf{F}|^2 \, |\psi|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $\lambda_1(B)$ on trouve

$$\begin{aligned} 0 \geq -\Delta \geq (\lambda_1(\kappa H) - \kappa^2) \|\psi\|_2^2 - \delta \lambda_1(\kappa H) \|\psi\|_2^2 \\ - \delta^{-1} (\kappa H)^2 \|\mathbf{A} - \mathbf{F}\|_4^2 \|\psi\|_4^2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

pour tout $\delta > 0$.
Les inégalités (4.3), (4.4), (4.7) et (4.8) permettent de tout contrôler par Δ :

$$\|\psi\|_2^2 \leq C (\kappa H)^{-1/4} \frac{\sqrt{\Delta}}{\kappa}, \tag{4.11}$$

$$(\kappa H)^2 \|\mathbf{A} - \mathbf{F}\|_4^2 \leq C \Delta, \tag{4.12}$$

$$\|\psi\|_4^2 \leq \sqrt{2} \frac{\sqrt{\Delta}}{\kappa}. \tag{4.13}$$

En outre, nous allons utiliser que $\lambda_1(B) = \mathcal{O}(B)$ et que $\kappa \approx H$ par (4.5). Par conséquent, avec le choix $\delta := \frac{\sqrt{\Delta}}{\kappa^{3/4}}$, l'estimation (4.10) devient

$$0 \geq -\Delta \geq (\lambda_1(\kappa H) - \kappa^2) \|\psi\|_2^2 - C \frac{\Delta}{\kappa^{1/4}}. \tag{4.14}$$

Nous en déduisons que pour κ assez grand les ensembles

$$\mathcal{H}_1(\kappa) := \{H \ : \ \mathcal{E}_{\kappa,H} \text{ admet un minimiseur different de } (0, \mathbf{F})\},$$

et

$$\mathcal{H}_2(\kappa) := \{H \ : \ \lambda_1(\kappa H) < \kappa^2\},$$

respectent l'inclusion

$$\mathcal{H}_1(\kappa) \subseteq \mathcal{H}_2(\kappa).$$

Soit u_B l'état fondamental de $\mathcal{H}(B)$: $\mathcal{H}(B) u_B = \lambda_1(B) u_B$. En utilisant l'état $(\psi, \mathbf{A}) = (\eta u_{\kappa H}, \mathbf{F})$ avec $\eta \ll 1$ comme fonction test dans la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$, on trouve l'inclusion inverse et donc

$$\mathcal{H}_1(\kappa) = \mathcal{H}_2(\kappa).$$

En combinant ce résultat avec le Théorème 1.4, nous en déduisons le Théorème 1.6. □

Références

[Ag] S. Agmon : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Math. Notes, T. 29, Princeton University Press (1982).

[BaPhTa] P. Bauman, D. Phillips et Q. Tang : Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 1-43 (1998).

[BeSt] A. Bernoff et P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39, p. 1272-1284 (1998).

[BoFo] V. Bonnaillie-Noël et S. Fournais : Superconductivity in domains with corners. In preparation.

[DaHe] M. Dauge et B. Helffer : Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. J. Differential Equations 104 (2), p. 243-262 (1993).

[DGP] X. Du, M. D. Gunzburger et J. S. Peterson : Analysis and approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity. SIAM Rev. 34 (1), p. 54-81 (1992).

[FoHe1] S. Fournais et B. Helffer : Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. Ann. Inst. Fourier 56(1), p. 1-67 (2006).

[FoHe2] S. Fournais et B. Helffer : On the third critical field in Ginzburg-Landau theory. Comm. Math. Phys. 266, 153-196 (2006).

[FoHe3] S. Fournais et B. Helffer : Strong diamagnetism for general domains and applications. Preprint (2006).

[FoHe4] S. Fournais et B. Helffer : On the Ginzburg-Landau critical field in three dimensions. In preparation.

[GiPh] T. Giorgi et D. Phillips : The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. SIAM J. Math. Anal. 30, 341-359 (1999).

[Hel1] B. Helffer : Bouteilles magnétiques et supraconductivité. Séminaire équations aux dérivées partielles du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique (2000-2001).

[Hel2] B. Helffer : *Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications.* Springer Lecture Notes in Math. 1336 (1988).

[HeMo2] B. Helffer et A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal. 185 (2), p. 604-680 (2001).

[HePa] B. Helffer et X-B. Pan : Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Analyse non linéaire) 20 (1), p. 145-181 (2003).

[LuPa1] K. Lu et X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127, p. 73-104 (1999).

[LuPa2] K. Lu et X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. J. Math. Phys. 40 (6), p. 2647-2670, June 1999.

[LuPa3] K. Lu et X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (3), p. 1247-1276 (2000).

[LuPa4] K. Lu et X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. Differential Equations 168 (2000).

[Pan] X-B. Pan : Surface superconductivity in applied magnetic fields above H_{C_2}. Comm. Math. Phys. 228, 327-370 (2002).

[PiFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer et P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210, p. 413-446 (2000).

[S-JdG] D. Saint-James et P. G. de Gennes : Onset of superconductivity in decreasing fields. Phys. Lett. 7, 5 p. 306-308 (1963).

[S-JSaTh] D. Saint-James, G. Sarma et E.J. Thomas : *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[Te] R. Temam : *Navier-Stokes equation. Theory and numerical analysis.* Second printing of 3rd (revised) edition. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 1984.

[TiTi] D. R. Tilley et J. Tilley : *Superfluidity and superconductivity.* 3rd edition. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 1990.

[Ti] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity.* McGraw-Hill Inc., New York, 1975.

(S. Fournais) Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, University of Aarhus, Ny Munkegade, Building 1530, DK-8000 Aarhus C, Denmark
E-mail address: fournais@imf.au.dk