Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2006-2007

Fabrice Bethuel, Giandomenico Orlandi, et Didier Smets

Dynamique des tourbillons de vorticité pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° XVIII, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Dynamique des tourbillons de vorticité pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

F. Bethuel, G. Orlandi and D. Smets

1 Introduction

Le but de cette note est de présenter quelques aspects de nos travaux récents [5, 6, 7, 8] sur l'équation de Ginzburg-Landau parabolique en deux dimensions d'espace. Cette dernière s'écrit, pour une fonction u_ε à valeurs complexes

$$(\mathrm{PGL})_\varepsilon \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \,,$$

où $0 < \varepsilon < 1$ représente un petit paramètre, homogène à une longueur. L'accent sera mis sur le comportement asymptotique lorsque ce petit paramètre tend vers zéro. Rappelons que $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$ correspond au flot de la chaleur pour la fonctionnelle de Ginzburg-Landau E_ε, qui prend la forme pour $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$,

$$E_\varepsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla v|^2}{2} + \frac{(1 - |v|^2)^2}{4\varepsilon^2} \,. \tag{1}$$

En particulier, pour tous temps $0 \leq T_1 \leq T_2$, nous avons l'identité d'énergie

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, T_2)) + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2 dx dt = E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, T_1)) \,. \tag{2}$$

La seule hypothèse que nous imposons sur la donnée initiale $u_\varepsilon^0(\cdot) \equiv u_\varepsilon(\cdot, 0)$ porte sur son énergie, à savoir

$$(\mathrm{H}_0) \qquad E_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \leq M_0 |\log \varepsilon| \,,$$

où $M_0 > 0$ désigne une constante arbitraire, indépendante du paramètre ε. La valeur $|\log \varepsilon|$ correspond en fait au régime énergétique de défauts topologiques, appelés dans le contexte tourbillons de vorticité.

2 Tourbillons de vorticité

Comme nous allons le voir, à l'échelle fixée par le paramètre ε, il n'y pas de définition tout 'a fait précise de la notion de tourbillon de vorticité (ou plus simplement "vortex", en se reférant à la terminologie anglo-saxonne) : en revanche, des énoncés précis peuvent être obtenus dans la limite asymptotique $\varepsilon \to 0$.

Pour fixer les idées, considérons un domaine simplement connexe Ω de $\mathbb{R}^2$, et une application continue $v : \Omega \to \mathbb{C}$. Si v ne s'annule pas sur Ω, on peut écrire

$$v = \rho \exp(i\varphi) \qquad \text{sur } \Omega\,,$$

où $\rho = |v|$ désigne le module de v, alors que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ représente la phase. Cette dernière est continue, déterminée de manière unique à un multiple de 2π près. Si v s'annule, il n'est pas toujours possible de faire une telle décomposition, en tout cas, avec une phase φ **continue**. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une application définie sur $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires (r, θ) par

$$v(r, \theta) = f(r) \exp(id\theta) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2\,, \tag{3}$$

où d est un entier relatif non nul ($d \in \mathbb{Z}^*$), et où f est une application continue, positive sur $\mathbb{R}^+$. La phase est ici donnée par $d\theta$, qui n'est bien entendu pas continue sur $\mathbb{R}^2$ (il y a un saut de 2π sur l'axe des abscisses positives). En revanche, pour que v définie par (3) le soit, il faut et il suffit que f s'annule en zéro. Le terme un peu vague de “vortex”, renvoie à ce type de singularités dans la phase. Sur notre exemple (3) l'origine est un zéro de v, donc un vortex. Si f ne s'annule pas hors de l'origine, comme le nombre d'enlacement autour de 0 est d, on dit qu'un tel vortex est un vortex de degré d (en réference au degré topologique des applications du cercle dans lui-même).

Revenons maintenant à l'énergie de Ginzburg-Landau (1). Remarquons tout d'abord que, si on impose une borne sur cette énergie (par exemple du type (H_0)), le potentiel

$$V_\varepsilon(v) \equiv \frac{(1 - |v|^2)}{\varepsilon^2}$$

force l'application v à prendre des valeurs proches du cercle S^1 pour des petites valeurs de ε. En particulier pour des solutions d'équations régularisantes comme $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$, on peut s'attendre à ce que l'ensemble des tourbillons soit petit, dans un sens à préciser. Regardons à cet effet un problème de minimisation très simple (dont la solution sera aussi une solution stationnaire de $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$ pour ses données aux bord prescrites). Prenons pour domaine $\Omega = D^2 = \{z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2\,,\ |z| = 1\}$, et considérons une valeur au bord $g : \partial\Omega = S^1 \to S^1$ définie par $g(z) = z^d$, i.e. $g(\theta) = \exp(id\theta)$. Soit alors le problème de minimisation

$$\mu_\varepsilon = \inf\{E_\varepsilon(v)\,,\ v \in H^1_g(D^2; \mathbb{C})\}\,. \tag{4}$$

Comme le degré d au bord est supposé non nul, toute fonction de comparaison $v \in H^1_g(D^2, \mathbb{C})$ doit s'annuler quelque part dans le domaine, i.e. avoir des tourbillons. Au vu des symétries du problème, il est naturel de commencer par regarder des solutions à symétrie radiale, c'est à dire de la forme

$$w_\varepsilon(z) = f_\varepsilon(r) \exp(id\theta) = f_\varepsilon(r) \frac{z^d}{|z^d|}\,, \tag{5}$$

où $z = r \exp(i\theta)$ en coordonnées polaires, et la fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est régulière, et s'annule en 0, i.e $f_\varepsilon(0) = 0$. Si on choisit f_ε telle que $f_\varepsilon(r) = 1$ pour $r \geq \varepsilon$ et $|f'| \leq 2$, un rapide calcul montre que

$$\mu_\varepsilon \leq E_\varepsilon(w_\varepsilon) = \pi d^2 |\log \varepsilon| + O(1)\,. \tag{6}$$

En effet, comme $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta} = idf(r)\exp(id\theta)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{D_2} |\nabla w_\varepsilon|^2 = \int_{D_2} \left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta}\right|^2 &= 2\pi \int_0^1 \left[|f'(r)|^2 + d^2\frac{|f(r)|^2}{r^2}\right] rdr \\ &= 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{d^2}{r^2} rdr \, + \, 2\pi \int_0^\varepsilon \left[|f'(r)|^2 + d^2\frac{|f(r)|^2}{r^2}\right] rdr.\end{aligned} \tag{7}$$

L'hypothèse sur f entraîne que le deuxième terme dans (7) est de l'ordre de $O(1)$, de sorte que

$$\int_{D_2} |\nabla w_\varepsilon|^2 = 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{d^2}{r} dr \, + O(1) = 2\pi d^2 |\log \varepsilon| + O(1) \,.$$

Par ailleurs, on a

$$\int_{D_2} \frac{(1-|w_\varepsilon|^2)^2}{\varepsilon^2} = O(1) \,,$$

et l'affirmation (6) en résulte. On vérifie que le facteur d^2 dans (6) n'est optimal que dans le cas $d = \pm 1$. Pour un entier arbitraire $d \in \mathbb{Z}$,il faut remplacer d^2 par $|d|$ et on a (voir [4])

$$\mu_\varepsilon = \pi |d| |\log \varepsilon| + O(1) \,.$$

Il en résulte en particulier que si $|d| \neq 1$ et ε est petit, alors les minima de l'énergie de Ginzburg-Landau ne sont pas à symétrie radiale. En revanche, pour $|d| = 1$, il a été montré que u_ε, pour ε petit, est à symétrie radiale [15, 16]. Le cas $|d| = 1$ et les solutions minimisantes radiales associées jouent donc le rôle d'un état fondamental dans la théorie. Plus précisément, il existe une unique solution $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -f'' - \frac{1}{r}f' + \frac{1}{r^2}f = f(1-f^2) \quad \text{sur} \quad [0, +\infty) \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On a alors

$$u_\varepsilon(z) \simeq f(\frac{|z|}{\varepsilon}) \exp(i\theta)$$

et

$$u_\varepsilon(z) \to u_*(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{lorsque} \;\; \varepsilon \to 0, \qquad \text{dans } W^{1,p} \,, \; p < 2 \,, \qquad \text{et dans } C^k_{loc}(D^2 \setminus \{0\}).$$

La limite singulière $u_*(z) = z/|z|$ représente le prototype des singularités qui peuvent apparaître dans l'asymptotique des solutions minimisantes. En effet, de manière générale, on peut montrer que les solutions minimisantes u_ε, convergent, à des sous-suites près, vers des applications u_* de la forme (si $d > 0$)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_* = \exp(i\varphi) \prod_{i=1}^d \frac{z - a_i}{|z - a_i|} \qquad \text{dans } W^{1,p}, \; p < 2 \,, \tag{8}$$

où φ est une fonction harmonique sur Ω, $a_1, ..., a_d$ sont d points distincts dans Ω. De plus, la convergence est dans C^k_{loc} en dehors des vortex. Lorsque la position des points $a_1, ..., a_d$ est connue, la phase φ est entièrement déterminée par les conditions aux limites et la position des points $a_1, ..., a_d$. L'ensemble des points où u_ε est proche de zéro se concentre près des points a_i. Ces points sont les singularités de u_* : on les appelle également "vortex". Notons également qu'ils sont des points de concentration de l'énergie,

$$\mu_\varepsilon = \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\log \varepsilon|} dx_1 dx_2 \to \pi \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{a_i}. \tag{9}$$

La discussion précédente sur le problème de minimisation (4) montre que le coût énergétique d'une singularité de degré d est (au moins) $\pi |d| |\log \varepsilon|$.

Des arguments basés sur les équations elliptiques mises en jeu jouent un rôle important dans les preuves des résultats précédents. Une question naturelle est alors de savoir si c'est le régime énergétique qui permet la condensation de vortex, où s'il s'agit plutôt d'une question liée aux équations de Ginzburg-Landau. Ces considérations nous conduisent à introduire l'ensemble de niveau W_ε^M défini par

$$W_\varepsilon^M = \{v \in H^1(\Omega)\,,\ E_\varepsilon(v) \leq M |\log \varepsilon|\}\,.$$

et à nous demander si un résultat comparable à (8) existe pour des suites $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans W_ε^M. En fait, en raison d'oscillations dans la phase, on ne peut espérer de résultat général de compacité dans des normes raisonnables dans W_ε^M. On peut par exemple considérer la suite d'applications

$$w_\varepsilon(z) = \exp(i\varphi(z)\sqrt{|\log \varepsilon|})\,, \tag{10}$$

où la fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ n'est pas constante, et indépendante de ε, choisie de sorte que $||\nabla\varphi||_{L^2}^2 \leq 2M$. Comme $|w_\varepsilon| = 1$, On a

$$E_\varepsilon(w_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_\varepsilon|^2 = \frac{|\log \varepsilon|}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \leq M |\log \varepsilon|\,.$$

Par ailleurs $|\nabla w_\varepsilon| = O(|\log \varepsilon|^{1/2})$, de sorte que le gradient diverge en toute norme lorsque $\varepsilon \to 0$.

Pour des suites quelconques dans W_ε^M le résultat suivant montre que l'on peut identifier la source de non compacité liée aux oscillations dans la phase, et la séparer de la contribution liée à la présence de vortex (voir [1, 2]).

Théorème 1. *Soient $M > 0$ et une famille de fonctions $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $v_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{C}$ tels que*

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq M |\log \varepsilon|\,.$$

Soit $G \subset\subset \Omega$ un domaine régulier. Il existe une sous-suite $\varepsilon_n \to 0$, ℓ points $a_1, \ldots, a_\ell \in G$, et des entiers $d_1, \ldots, d_\ell \neq 0$, $\sum_1^\ell |d_i| \leq M'$, pour une constante M' dependant seulement de M, et des fonctions $\varphi_{\varepsilon_n} : G \to \mathbb{R}$ telles que

$$\int_G |\nabla\varphi_{\varepsilon_n}|^2 \leq M |\log \varepsilon|$$

et

$$v_{\varepsilon_n} \cdot \exp(-i\varphi_{\varepsilon_n}) \to \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{z - a_i}{|z - a_i|}\right)^{d_i} \qquad \textit{dans}\ \ H^s(G)\,,\ s < 1. \tag{11}$$

Pour l'exemple (10) il n'y a pas de tourbillon, donc $\ell = 0$. si on pose $\varphi_\varepsilon = \varphi \cdot \sqrt{|\log \varepsilon|}$, on a alors

$$w_{\varepsilon_n} \cdot \exp(-i\varphi_{\varepsilon_n}) \equiv 1\,,$$

ce qui est en accord avec le résutat du Théorème 1.

Notons que contrairement à la convergence dans les problèmes de minimisation (8), les degrés d_i dans le Théorème 1 peuvent être différents de ± 1. Par exemple la suite w_ε definie dans (5) converge vers $w_* = (\frac{z}{|z|})^d$. Notons également qu'il n'y a pas de contrainte sur la phase φ_ε dans (11), alors qu'elle est contrainte à être harmonique réelle dans (8).

3 Dynamique des tourbillons et de la phase

Revenons à l'équation de Ginzburg-Landau parabolique $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$. Par l'hypothèse (H_0) sur la donnée initiale ainsi que par l'identité d'énergie (2) on a pour tout temps $t \geq 0$,

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, t)) \leq M_0 |\log \varepsilon|\,,$$

de sorte que l'on peut appliquer le résultat de compacité énoncé dans le Théorème 1 à la famille de fonctions $u_\varepsilon(\cdot, t)_{0<\varepsilon<1}$ tout temps $t \geq 0$ **fixé**, à savoir

$$u_\varepsilon(\cdot, t) \simeq \exp(i\varphi_\varepsilon(\cdot, t)) \prod_{i=1}^{\ell(t)} \left(\frac{z - a_i(t)}{|z - a_i(t)|} \right)^{d_i(t)}.$$

Ceci nous permet de déterminer tourbillons et phase à temps fixé et dans un sens asymptotique. La question principale est alors de déterminer l'évolution au cours du temps de la phase φ_ε ainsi que celle des points $a_i(t)$, et leur degré $d_i(t)$.

On peut se convaincre par des arguments heuristiques assez élémentaires que l'évolution de la phase doit être liée à l'équation de la chaleur homogène, en particulier en l'absence de tourbillons. Considérons pour ce faire une solution de $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$ de la forme

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon), \tag{12}$$

de sorte qu'il n'y a pas de tourbillons (on ne se préoccupe pas à stade de l'existence d'une telle solution, ni de savoir si des tourbillons peuvent apparaître spontanément). Dans ce cas, le système pour la phase φ_ε et le module ρ_ε s'écrit

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon^2 \partial_t \varphi_\varepsilon - \mathrm{div}\,(\rho_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon) & = 0 \\ \partial_t \rho_\varepsilon^2 - \Delta \rho_\varepsilon^2 + 2|\nabla u_\varepsilon|^2 & = \frac{2\rho_\varepsilon^2(1-\rho_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\,. \end{cases}$$

La seconde équation suggère que $\rho_\varepsilon^2 \simeq 1$ (le membre de gauche jouant le rôle d'une force de rappel vers 1). En reportant formellement dans la première équation, il vient

$$\partial_t \varphi_\varepsilon - \Delta \varphi_\varepsilon \simeq 0. \tag{13}$$

L'échelle de temps d'origine t est donc celle qui semble la mieux adaptée pour l'étude de l'évolution de la phase. En revanche, des arguments formels ([14, 10]) on montré que les tourbillons ne bougeaient pas dans l'échelle de temps d'origine t, et qu'il convenait donc de se placer dans une échelle de temps accélérée pour décrire leurs mouvements. L'échelle de temps adaptée a été identifiée comme étant $s = \frac{t}{|\log \varepsilon|}$. Ceci nous conduit à considérer l'application $\mathfrak{u}_\varepsilon$, définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\mathfrak{u}_\varepsilon(z, s) = u_\varepsilon(z, s|\log \varepsilon|). \tag{14}$$

Le résultat suivant, démontré dans [5, 6] après des résultats de [12, 11], donne un sens précis à la notion de tourbillon pour l'équation $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$, ainsi que des informations sur leurs trajectoires, dans cette échelle de temps accélérée.

Théorème 2. *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille des solutions de $(PGL)_\varepsilon$ vérifiant l'hypothèse (H_0) pour un $M_0 > 0$ donné. Alors, pour une sous-suite $\varepsilon_n \to 0$ et pour tout $s > 0$, on a*

$$\mathfrak{u}_{\varepsilon_n}(z, s) \to \mathfrak{u}_*(z, s) = \prod_{i=1}^{l(s)} \left(\frac{z - a_i(s)}{|z - a_i(s)|} \right)^{d_i(s)} \exp[i(\langle \vec{c}(s), z\rangle + b(s)], \tag{15}$$

où pour $i = 1, \ldots, \ell(s)$, $a_i(s) \in \mathbb{R}^2$, $d_i(s) \in \mathbb{Z}$, $b(s) \in [0, 2\pi)$ De plus la fonction $\vec{c} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ est régulière. La convergence (15) est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+_* \setminus \Sigma_\mathfrak{v}$, où $\Sigma_\mathfrak{v} = \cup_{s>0} \cup_{i=1}^{l(s)} \{(a_i(s), s)\}$ est un sous-ensemble fermé, rectifiable de dimension un de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+_*$.

Il est montré de plus que le nombre $l(s)$ de vortex présents à l'instant s ainsi que leurs degrés $d(s)$ sont bornés uniformément par une constante ne dépendant que de M_0.

Dans [5], nous avons utilisé le terme de "**compacité-rigidité**" pour décrire la nature de ce résultat. Nous avons choisi en particulier le terme "rigidité" pour illustrer le fait qu'à temps s fixé, la limite asymptotique ne dépend que d'un nombre fini de paramètres réels, à savoir les positions $a_i(s)$, les degrés $d_i(s)$, et les nombres $c(s)$ et $b(s)$. Au vu de la convergence (15), on voit que l'on peut prendre le terme de phase φ_ε dans (11) comme étant

$$\varphi_\varepsilon(z, s) = \langle \vec{c}(s), z\rangle + b(s)\,. \tag{16}$$

Cette phase φ_ε correspond à une onde plane de nombre d'onde donné par $\vec{c}(s)$. Comme la fonction $\vec{c}$ est lipschitzienne, le fait d'accélérer l'échelle de temps permet donc d'obtenir de la compacité pour la phase φ_ε. Rappelons que nous avons vu précédemment que dans l'échelle de temps originale t, il n'y avait pas de compacité pour la phase, en raison d'éventuelles oscillations d'ordre $O(\sqrt{|\log \varepsilon|})$ pour la phase de la donnée initiale. Après un temps de l'ordre de $O(|\log \varepsilon|)$ dans l'échelle de temps t, ces oscillations s'amortissent et finissent par être bornées. Remarquons également que le terme de phase décrit dans (16) est affine, donc en particulier harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Cette situation ressemble beaucoup au cas elliptique vu précédemment, et il s'agit de nouveau d'un phénomène lié aux deux échelles de temps : dans [5] nous avions qualifié ce phénomène de **relaxation** vers le cas elliptique.

Les propriétés de compacité décrites dans le Théorème 2 sont déduites pour une grande part par le caractère régularisant de l'équation de la chaleur. A cet effet, il faut bien entendu remplacer le discours heuristique menant à (13) déduit de l'ansatz (12) par une démarche prenant en compte la présence de tourbillons. La manière la plus directe pour obtenir de telles équations est probablement de partir de la quantité $u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon$, qui joue le rôle du gradient de la phase (en fait, on peut se convaincre aisément que si $v = \rho \exp i\varphi$, alors $v \times \nabla v = \rho^2 \nabla \varphi$). Si u_ε est solution de $(\mathrm{PGL})_\varepsilon$ alors l'évolution de $u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon$ est décrite par l'équation

$$\partial_t (u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon) - \Delta(u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon) = \nabla^\perp (J u_\varepsilon) + 2\partial_t u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon \,. \tag{17}$$

Ici Ju désigne le jacobien

$$Ju = u_{x_1} \times u_{x_2},$$

qui est précisément une quantité liée à la présence de tourbillons. L'équation (17) est une équation de la chaleur pour $u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon$, avec termes sources liés aux vortex. Notre analyse montre que dans le régime énergétique étudié, ces termes sources donnent des contributions qui sont d'ordre inférieur. Il en résulte en particulier que l'on peut calculer la fonction $\vec{c}(.)$ à partir de la donnée initiale en utilisant l'équation de la chaleur homogène sans connaître le mouvement précis des tourbillons (qui n'agissent donc pas sur $\vec{c}(s)$).

Plus précisément, supposons pour simplifier que $|u_\varepsilon^0| \leq 3$, de sorte que par l'hypothèse (H_0), on a $\|u_\varepsilon^0 \times \nabla u_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{3M_0 |\log \varepsilon|}$ et donc

$$\|u_\varepsilon^0 \times \nabla u_\varepsilon^0 (\cdot \sqrt{|\log \varepsilon|})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{3M_0}.$$

Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut donc toujours supposer que

$$u_{\varepsilon_n}^0 \times \nabla u_{\varepsilon_n}^0 (\cdot \sqrt{|\log \varepsilon|}) \rightharpoonup \vec{\sigma}_* \qquad \text{lorsque } n \to +\infty, \tag{18}$$

faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On montre alors (voir [8])

Proposition 1. *Soit $\vec{\sigma}_*$ la fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$ définie dans (18). La fonction $\vec{c} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ définie dans le Théorème 2 se calcule par la formule*

$$\vec{c}(s) = \frac{1}{4\pi s} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\frac{|x|^2}{4s}) \vec{\sigma}_*(x) dx \,. \tag{19}$$

On voit en particulier que la fonction $\vec{c}$ dépend uniquement du comportement des basses fréquences des données initiales. Remarquons également que l'expression (19) est analytique sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas forcément bornée près de zéro.

L'évolution des tourbillons est décrite dans le Théorème 2 par la donnée de l'ensemble $\Sigma_{\mathfrak{v}}$. Ce dernier, correspond, dans un sens faible (car le nombre des vortex peut, a priori, varier dans le temps) à l'ensemble des trajectoires. L'information sur sa dimension de Hausdorff montre en particulier que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+ \setminus \Sigma_{\mathfrak{v}}$ est un ouvert dense, et que la convergence (15) n'est pas dépourvue de contenu. Pour décrire et localiser les tourbillons, l'outil principal est la densité d'énergie normalisée

$$\mathfrak{v}_\varepsilon^s(x) \equiv \frac{e_\varepsilon(\mathfrak{u}_{\varepsilon_n}(x,s))}{|\log \varepsilon|} \, dx.$$

En vertu de l'hypothès (H_0), cette dernière vérifie $|\mathfrak{v}_\varepsilon^s|(\mathbb{R}^2) \leq M_0$ et est donc uniformément bornée en temps. On montre que cette densité se concentre exactement à l'emplacement des tourbillons. De plus, la densité limite est exactement un multiple entier de π. Cette propriété avait déja été observée pour l'équation de Ginzburg-Landau elliptique dans [9], et le fait qu'elle reste vraie dans le cadre parabolique doit être relié à la propriété de relaxation mentionnée plus haut. Plus précisément, on a ([6], Théorème 4 et Corollaire 3.1).

Théorème 3. *Il existe un nombre fini de temps $\tau_1, \ldots, \tau_q$ tels que pour $s \notin \{\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots, \tau_q\}$,*

$$\mathfrak{v}^s_{\varepsilon_n}(x) \equiv \frac{e_{\varepsilon_n}(\mathfrak{u}_{\varepsilon_n}(x,s))}{|\log \varepsilon_n|}\, dx \rightharpoonup \mathfrak{v}^s_* = \pi \sum_{i=1}^{\ell(s)} d_i^2(s)\delta_{a_i(s)} \tag{20}$$

dans le sens des mesures sur $\mathbb{R}^2$, avec $d_i(s) \neq 0$, et

$$|\partial_t u_{\varepsilon_n}|^2 dxds \rightharpoonup \omega_* = \pi \sum_{k=0}^{q} \sum_{i=1}^{\ell(\tau_k)} \beta_i^k \delta_{(a_i(\tau_k),\tau_k)}, \tag{21}$$

dans le sens des mesures sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, où $\beta_i^k \in \mathbb{N}$.

La convergence (21) est une conséquence élémentaire de (20) et de la propriété de décroissance de l'énergie. En effet, comme l'énergie totale $|\mathfrak{v}^s_*|(\mathbb{R}^2) = \pi \sum d_i^2(s)$ est quantifiée et décroissante, elle est constante par morceaux. Les temps $\tau_1, \ldots, \tau_q$ correspondent alors aux temps où il y a perte d'énergie. Nous appelerons les points $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ pour lesquels $\beta_i^k \neq 0$ des points de dissipation.

Dans [7], nous décrivons de manière précise les trajectoires des tourbillons.

Théorème 4. *i) Le nombre total de tourbillons $\ell(s) \equiv \ell_k$ est constant sur chaque intervalle (τ_k, τ_{k+1}), pour $k = 0, \ldots, q$.*

ii) La restriction de $\Sigma_{\mathfrak{v}}$ à $\mathbb{R}^2 \times (\tau_k, \tau_{k+1})$ est une réunion disjointes de ℓ_k graphes réguliers. Plus précisément, renumérotant si nécessaire les points $a_1(s), \ldots, a_{\ell_k}(s)$, leur degrés $d_i(s) = d_i$ sont non nuls, constants sur (τ_k, τ_{k+1}), et leurs trajectoires sont régies par le système d'équations différentielles

$$d_i^2 \frac{da_i}{ds}(s) = -\nabla_{a_i} W(a_1, \ldots, a_{\ell_k}) + d_i c(s)^{\perp}, \qquad i = 1, \ldots, \ell_k\,, \tag{22}$$

où W désigne la fonctionnelle de Kirchhoff-Onsager définie par

$$W(a_1, \ldots, a_{\ell_k}) = -2 \sum_{i \neq j = 1}^{\ell_k} d_i d_j \log |a_i - a_j|\,. \tag{23}$$

L'identité (22) montre que, dans l'échelle de temps accélérée que nous considérons ici, la phase agit sur les tourbillons par l'intermédiaire du terme de dérive $d_i c(s)^{\perp}$. On remarquera en particulier que le mouvement induit se fait selon des directions opposées pour des vortex de signes opposés. Les conditions aux limites pour les vortex ont été précisées dans [8] : quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer grâce au Théorème 1 qu'il existe une phase φ^0_ε tel que

$$u^0_{\varepsilon_n} \cdot \exp(-i\varphi^0_{\varepsilon_n}) \to \prod_{i=1}^{\ell_0} \left(\frac{z - a_i^0}{|z - a_i^0|} \right)^{d_i^0} \qquad \text{dans } H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\,,\ s < 1. \tag{24}$$

On a alors

Proposition 2. *Pour $i = 1, ..., \ell_0$, la limite*

$$a_i(0) \equiv \lim_{s \to 0^+} a_i(s)$$

existe et appartient à la collection $\{a_i^0, a_2^0, ...\}$.

Des travaux antérieurs aux nôtres ([11, 12, 17]) avaient déjà permis d'établir l'équation du mouvement (22) pour des domaines bornés, avec des conditions au bord appropriées, pour des données initiales "préparées", et uniquement jusqu'au premier temps $\tau_1$de collision de l'équation différentielle (22). Dans ces travaux, on suppose que la donnée initiale possède l tourbillons de degrés ± 1 et que l'énergie à la forme $E_\varepsilon(u_\varepsilon^0) = \pi l |\log \varepsilon| + O(1)$. Comme nous l'avions mentionné, ce niveau d'énergie correspond à l'énergie minimale nécessaire pour réaliser une telle configuration de tourbillons. Dans [18], cette hypothèse de préparation de la donnée initiale est affaiblie, et remplacée par $E_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \le \pi l |\log \varepsilon| + \frac{|\log \varepsilon|}{(\log |\log \varepsilon|)^\beta}$ pour une constante arbitraire $\beta > 1$. Comme le domaine est supposé borné dans ces travaux, le terme $\vec{c}$, mis en évidence dans [5] et lié aux basses fréquences, est nul, de sorte que l'équation (22) représente le flot gradient de la fonction de Kirchhoff-Onsager (23) modifiée en fonctions des conditions imposées au bord. Par rapport à ces travaux antérieurs, le Théorème 4 permet en particulier de traiter les cas où des tourbillons de degré multiple sont présents, et des singularités apparaissent dans la dynamique de l'équation.

Donnons maintenant quelques idées des preuves. Comme nous l'avons mentionné, les tourbillons sont identifiés comme points de concentration de l'énergie, et le point de départ de notre analyse est la formule d'évolution pour l'énergie localisée : pour $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^2} \chi(x)\, d\mu_\varepsilon^t = - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{t\}} \chi(x) |\partial_t u_\varepsilon|^2\, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^2 \times \{t\}} \Big(D^2 \chi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \Delta \chi e_\varepsilon(u_\varepsilon) \Big)\, dx, \quad (25)$$

pour $t = s|\log \varepsilon|$. Remarquons que le premier terme dans le membre de gauche de cette identité correspond à la disssipation, alors que le deuxième ne fait intervenir que des dérivées par rapport aux coordonnées spatiales. On passe alors à la limite $\varepsilon \to 0$ dans l'expression (25), en utilisant la forme très spécifique de la limite (15) ainsi que le caractère asymptotiquement évanescent de la dissipation sur les intervalles de temps $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, pour obtenir, pour tout $s \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$, l'égalité

$$\frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^{\ell(s)} d_i(s)^2 \chi(a_i(s)) \right) = \mathcal{F}^s_{\text{inter}}(\chi) + \mathcal{F}^s_{\text{drift}}(\chi), \quad (26)$$

où

$$\mathcal{F}^s_{\text{inter}}(\chi) = 2 \sum_{i \ne j = 1}^{\ell(s)} \pi d_i(s) d_j(s) \nabla_{a_i} (\log |a_i(s) - a_j(s)|) \cdot \nabla \chi(a_i(s)) \quad (27)$$

et

$$\mathcal{F}^s_{\text{drift}}(\chi) = \sum_{i=1}^{\ell(s)} \pi d_i(s)\, \vec{c}(s)^\perp \cdot \nabla \chi(a_i(s)), \quad (28)$$

pour une fonction régulière à support compact χ, qui vérifie l'hypothèse supplémentaire d'annulation près des tourbillons

$$H_r(s) \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2} = 0 \qquad \text{sur } \cup_{i=1}^{\ell(s)} B(a_i(s), \frac{r}{8}).$$

pour un rayon $r > 0$ arbitrairement petit.

Des propriétés de régularité de l'ensemble $\Sigma_{\mathfrak{v}}$, du type de celles qui sont décrites dans le Théorème (2) permettent de vérifier que si $s_0 > 0$, et si $a_i(s_0)$ est un tourbillon i.e $(a_i(s_0), s_0) \in \Sigma_{\mathfrak{v}}$, alors il existe une un voisinage B_i de $a_i(s_0)$ qui contient pour s proche de s_0 tous les vortex issus de $a_i(s_0)$. De manière plus précise, nous avons montré dans [6] (Théorème 5 et identité (9)), qu'il existe des nombres $\Delta s_0 > 0$ et $r_i(s_0) > 0$ tels que

$$\Sigma_{\mathfrak{v}}^s \cap B(a_i(s_0), r_i(s_0)) \setminus B(a_i(s_0), r_i(s_0)/2) = \emptyset, \tag{29}$$

pour tout s dans $[s_0 - \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0]$, où $\Sigma_{\mathfrak{v}}^s = \{a_1(s), \ldots, a_{\ell(s)}(s)\}$. Si $s_0 \notin \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$, on peut supposer quitte à diminuer Δs_0, que $[s_0 - \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0]$ ne contient pas d'instants de dissipation τ_k. Dans ce cas, par conservation locale de l'énergie et la quantification de cette dernière (voir Théorème 3), on montre que les degrés $d_i(s)$ des tourbillons issus ou collisionnant en $a_i(s_0)$ sont contraints par la relation

$$\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j^2(s) = \Big(\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j(s)\Big)^2 = d_i^2(s_0), \tag{30}$$

pour tout s in $[s_0 - \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0]$, où $B_i = B(a_i(s_0), r_i(s_0))$.

Revenons à l'identité (26). Cette dernière est utilisée avec deux types de fonctions test χ. D'abord on utilise des fonctions test χ qui sont affines sur B_i, avec un support ne rencontrant pas les tourbillons hors de B_i. Ce type de fonctions tests permet de déduire que

$$\frac{d}{ds}\hat{a}_i(s) = \frac{1}{d_i(s_0)}[\vec{c}(s)^\perp + \sum_{\substack{a_k(s)\notin B_i \\ a_j(s)\in B_i}} 2d_k(s)\nabla_{a_j}(\log|a_j(s) - a_k(s)|)], \tag{31}$$

pour $s \in [s_0 - \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0]$, où $\hat{a}_i(s)$ représente le barycentre des tourbillons présents dans B_i, en prenant comme poids les densités d'énergie $d_j^2(s)$, à savoir

$$\hat{a}_i(s) = \frac{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j^2(s) a_j(s)}{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j^2(s)}.$$

Pour déduire de (31) la loi d'évolution des tourbillons et finir la démonstration du Théorème 4, il reste essentiellement à montrer que pour tout s dans $[s_0 - \Delta s_0, s_0 + \Delta s_0]$ la boule B_i ne contient qu'un seul tourbillon : par un argument de continuation, il résulte en effet de cette propriété que le nombre de tourbillons reste constant sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, et comme alors le centre de masse $\hat{a}_i(s)$ se confond alors avec l'unique tourbillon présent dans B_i, l'équation (31) permet de trouver la loi d'évolution (22). Pour obtenir la propriété désirée on considère la variance

$$f_i(s) = \frac{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j^2(s)|a_j(s) - \hat{a}_i(s)|^2}{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j^2(s)},$$

le but étant de montrer qu'elle est identiquement nulle dans un voisinage de s_0.

Le calcul de $f_i'(s)$ résulte de l'identité

$$\frac{d}{ds}\int_{B_i}|x|^2\,d\mathfrak{v}_*^s = 4\pi\sum_{\substack{a_k(s)\notin B_i\\ a_j(s)\in B_i}} d_k(s)d_j(s)\mathcal{R}e\Big(\frac{a_j(s)}{a_k(s)-a_j(s)}\Big) + 2\pi\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j(s)\langle a_j(s),\vec{c}(s)^\perp\rangle. \quad (32)$$

Cette dernière est une conséquence de la formule (26), utilisée avec pour fonction test χ une fonction qui vaut $\chi = |x|^2$ près du tourbillon a_i. Il s'agit ici du second type de fonctions test utilisées. Quelques manipulations permettent alors d'en déduire que

$$|f_i'(s)| \le C(M_0,s_0)\,(|\hat{a}_i(s)-\check{a}_i(s)| + f_i(s)) \qquad \text{sur } [s_0-\Delta s_0, s_0+\Delta s_0], \quad (33)$$

où $C(M_0,s_0)$ dépend uniquement de s_0 et M_0, et où $\check{a}_i(s)$ représente un autre type de barycentre à savoir

$$\check{a}_i(s) = \frac{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j(s)a_j(s)}{\sum_{a_j(s)\in B_i} d_j(s)}. \quad (34)$$

L'intégration de l'inégalité différentielle (33) suppose un contrôle sur la distance entre les deux types de barycentres $|\check{a}_i(s)-\hat{a}_i(s)|$. Pour une configuration arbitraire, cette dernière est en général du même ordre de grandeur que son diamètre. Partant de l'observation qu'elle s'annulait pour les quelques configurations critiques de W que nous connaissions (par exemple des singularités de degré $+1$ placées au sommet d'un triangle équilatéral, et une singularité de degré -1 placée au centre de ce même triangle), nous avons été amenés à démontrer l'identité suivante

$$\frac{\sum d_j z_j}{\sum d_j} = \frac{\sum d_j^2 z_j}{(\sum d_j)^2} + \frac{\sum \nabla_{z_j} W(z_1,\dots,z_\ell) z_j^2}{2(\sum d_j)^2}, \quad (35)$$

pour ℓ points $z_1,\dots,z_\ell \in \mathbb{C}$, et ℓ nombres réels $d_1,\dots,d_\ell$ dont la somme est non nulle. En utilisant l'identité (35) pour $z_j = a_j(s)-\hat{a}_i(s)$, on obtient grâce à (30),

$$|\check{a}_i(s)-\hat{a}_i(s)| \le C(M_0)|\nabla W(\{a_j(s)\}_{j\in I(s)})|\,f_i(s), \quad (36)$$

où $C(M_0)$ dépend seulement de M_0 et où $I(s) = \{j\in\{1,\dots,\ell(s)\},\ a_j(s)\in B_i\}$. En combinant (33) et (36), on déduit finalement

$$|f_i'(s)| \le C(M_0,s_0)(1+|\nabla W(\{a_j(s)\}_{j\in I(s)})|)f_i(s)\,. \quad (37)$$

Comme $f_i(s_0)=0$, le lemme de Gronwall permet de conclure que $f_i(s)\equiv 0$ dans un voisinage I of s_0, si on arrive à prouver que

$$\int_I |\nabla W(\{a_j(s)\}_{j\in I(s)})|\,ds < +\infty. \quad (38)$$

En fait, on prouve même mieux, à savoir

$$\int_I |\nabla W(\{a_j(s)\}_{j\in I(s)})|^2\,ds < +\infty, \quad (39)$$

grâce aux propriétés de type gradient de l'équation (22). Cette dernière affirmation peut sembler tautologique, puisque notre but est précisément d'établir la validité de cette équation.

En fait notre raisonnement se fait par récurrence sur le degré $d_i(s_0)$. Lorsque $d_i(s) = \pm 1$, le nombre de vortex reste égal à 1 dans la boule B_i en raison de la conservation du degré et de la contrainte (30). Si $|d_i(s_0)| = 2$, alors pour des raisons identiques, il n'y a que deux possibilités : ou bien il n'y a qu'un seul vortex de degré ± 2, ou alors deux vortex de degré ± 1, auquel cas on retombe sur la situation précédente, et on peut utiliser l'équation différentielle. De manière générale, si $|d_i(s_0)| = k$, le tourbillon ne peut se scinder qu'en tourbillons de degré au plus $k-1$ en valeur absolue, et on se retrouve à l'étape précédente du raisonnement.

4 Points de branchements des trajectoires

Le Théorème 4 montre que les trajectoires n'ont pas de singularités en dehors des temps $\tau_0, ..., \tau_k$, i.e pour des temps qui ne sont pas des temps de dissipation. Une adaptation des preuves permet de montrer qu'en fait seuls les points de dissipation produisent des singularités. Plus précisément, si $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ est un point de branchement de $\Sigma_{\mathfrak{v}}$, notons $\mathcal{C}_1^-, \ldots, \mathcal{C}_{l_i^-}^-$ and $\mathcal{C}_1^+, \ldots, \mathcal{C}_{l_i^+}^+$ les trajectoires des vortex respectivements dans $\mathbb{R}^2 \times (\tau_{k-1}, \tau_k)$ et $\mathbb{R}^2 \times (\tau_k, \tau_{k+1})$ pour lesquelles $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ représente un point de terminaison. De même, soient $d_1^-, \ldots, d_{l_i^-}^-$ et $d_1^+, \ldots, d_{l_i^+}^+$ les degrés correspondants.

Théorème 5. *Un point $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ est un point de branchement si et seulement si c'est un point de dissipation. Dans ce cas, on a*

$$\sum_{j=1}^{l_i^-} d_j^- = d_i(\tau_k) = \sum_{j=1}^{l_i^+} d_j^+ \qquad \textit{(Conservation du degré topologique)} \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{l_i^-} (d_j^-)^2 \geq d_i^2(\tau_k) \geq \sum_{j=1}^{l_i^+} (d_j^+)^2 \quad \textit{(décroissance de l'énergie)} \tag{41}$$

où la première inégalité (resp. la seconde) inégalité dans (41) *est stricte lorsque $l_i^- \geq 2$ (resp. $l_i^+ \geq 2$). En particulier,*

$$\sum_{j=1}^{l_i^-} (d_j^-)^2 > \sum_{j=1}^{l_i^+} (d_j^+)^2.$$

Les points de collisions représentent l'exemple le plus simple de points de branchement, au sens du Théorème 5. La présence de tels points est un aspect incontournable de l'équation différentielle, en tout cas lorsque des tourbillons de degrés différents sont présents. Pour s'en convaincre, considérons le cas où la donnée initiale u_ε^0 a deux tourbillons de degré $+1$ et -1 situés aux points $a_{-1}(0) = -1$ et $a_1(0) = 1$. Si $\vec{c} \equiv 0$, alors au vu de l'équation différentielle (22) et des résultats énoncés précédemment, l'application limite $\mathfrak{u}_*$ possède deux tourbillons donnés par

$$a_i(s) = (-1)^i \sqrt{1-2s}, \qquad i = -1, 1\,, \qquad \forall\, s < \frac{1}{2}.$$

Ces tourbillons vont se percuter au temps $s = \frac{1}{2}$ et s'annihiler, de sorte qu'après le temps de collision l'application $\mathfrak{u}_*$ est constante.

Alors que les collisions apparaissent comme des singularités de l'équation différentielle (22), ce n'est pas le cas des éclatements de singularités de degré multiple, et le Théorème

4 ne répond pas à la question de leur apparition. Dans cette direction, le résultat suivant ([7], Théorème 5.1) fournit un exemple d'éclatement d'une singularité de degré +2 en deux tourbillons de degré +1.

Proposition 3. *Soit $s_0 > 0$ donné. Il existe un nombre M_0 et une suite de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(PGL)_\varepsilon$ tels que $\Sigma_\mathfrak{v}^s$ se réduit à un tourbillon de degré $d = +2$, pour $s < s_0$, et se divise en deux tourbillons de degré +1 au temps $s = s_0$.*

Nous ne disposons pas, à ce jour, de constructions similaires pour des tourbillons de degré supérieur à 2.

5 Eclatement des points de branchement

soit $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ un point de branchement. Pour analyser le comportement des trajectoires près de $(a_i(\tau_k), \tau_k)$ pour $s > \tau_k$ nous effectuons le changement de variable, typique des situations paraboliques

$$\tilde{s} = -\log(s - \tau_k), \qquad \tilde{a}_j(\tilde{s}) = \frac{a_j(s) - a_i(\tau_k)}{\sqrt{s - \tau_k}}$$

[on utilise un changement de variable similaire pour traiter le cas $s < \tau_k$]. L'équation pour $\tilde{a}_j$ s'écrit

$$\frac{d}{d\tilde{s}}\tilde{a}_j = \frac{1}{d_j^2}\nabla_j W(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{\ell_k}) + \frac{1}{2}\tilde{a}_j - \frac{1}{d_j}\exp(-\tilde{s})c^\perp, \tag{42}$$

pour laquelle nous devons considérer la limite $\tilde{s} \to +\infty$, qui correspond à la limite $s \to \tau_k^+$. Au vu du changement de variables, les vortex $\tilde{a}_j$ pour $j \notin \{1, \cdots, \ell_i^+\}$ sont envoyés a l'infini, alors que le Théorème 2 dans [5] montre que les points $\tilde{a}_j$ pour $j \in \{1, \cdots, \ell_i^+\}$ restent bornés. L'équation (42) s'écrit alors pour tout $j \in \{1, \cdots, \ell_i^+\}$,

$$\frac{d}{d\tilde{s}}\tilde{a}_j = \frac{1}{d_j^2}\nabla_j W(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{\ell_i^+}) + \frac{1}{2}\tilde{a}_j + O(\exp(-\frac{\tilde{s}}{2})) \tag{43}$$

dans la limite $\tilde{s} \to +\infty$. Posons $\Gamma_i^+ = \sum_{j=1}^{\ell_i^+} d_j^2 - d_i^2$, nombre qui est strictement négatif, au vu du Théorème 5. En utilisant l'équation différentielle on montre que

$$\Big|4\Gamma_i^+ + \sum_{k=1}^{\ell_i^+} d_k^2\tilde{a}_k^2\Big| \leq C\exp(-\frac{\tilde{s}}{4}), \quad \text{et} \quad \Big|\sum_{k=1}^{\ell_i^+} d_k^2\tilde{a}_k(\tilde{s})\Big| \leq C\exp(-\frac{\tilde{s}}{4}), \tag{44}$$

ainsi que

$$\limsup_{\tilde{s}\to+\infty}\Big|W(\tilde{a}_1(\tilde{s}), \cdots, \tilde{a}_{\ell_i^+}(\tilde{s}))\Big| < +\infty. \tag{45}$$

L'équation (43) peut alors s'interpréter, à des termes exponentiellement petits en $\tilde{s}$ près, comme un flot gradient de la fonctionnelle W sous la contrainte $\sum_{j=1}^{\ell_i^+} d_j^2 a_j^2 = -4\Gamma_i^+$. En particulier, si on pose pour $\tilde{s} > 0$, $\mathcal{L}(\tilde{s}) = W(\tilde{a}_1(\tilde{s}), \cdots, \tilde{a}_{\ell_i^+}(\tilde{s})) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\ell_i^+} d_j^2\tilde{a}_j^2(\tilde{s})$. alors on a

$$\frac{d}{d\tilde{s}}\mathcal{L}(\tilde{s}) \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell_i^+} d_j^2\Big(\frac{1}{d_j^2}\nabla_j W + \frac{1}{2}\tilde{a}_j\Big)^2 - C\exp(-\tilde{s}).$$

Comme $\mathcal{L}$ est uniformément bornée on déduit de ce qui précède

$$\int_0^{+\infty} \Big|\nabla_j W(\{\tilde{a}_j(\tilde{s})\}) + \frac{d_j^2}{2}\tilde{a}_j(\tilde{s})\Big|^2 d\tilde{s} < +\infty. \tag{46}$$

Remarquons en particulier que l'intégrande correpond au carré du gradient de W, sous la contrainte $\sum_{j=1}^{\ell_i^+} d_j^2 a_j^2 = C^{te}$. Dans ce contexte, il est naturel d'introduire l'espace de configurations

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} \{(a_j, d_j)\}_{j=1,\cdots,\ell},\ a_j \in \mathbb{C},\ a_j \neq a_k \text{ for } j \neq k, \\ d_j \in \mathbb{Z}^*, \sum d_j = d_i,\ \sum d_j^2 - (\sum d_j)^2 = \Gamma_i^+ \end{array} \right\},$$

le sous-ensemble de $\mathcal{C}$, défini par la contrainte

$$\mathcal{M} = \Big\{\{(a_j, d_j)\} \in \mathcal{C},\ \sum d_j^2 |a_j|^2 = -4\Gamma_i^+\Big\},$$

et l'ensemble des points critiques de la fonction W restreinte à $\mathcal{M}$, (qui coïncide avec les points critiques de $\mathcal{L}$)

$$\mathcal{K} = \Big\{\{(a_j, d_j)\} \in \mathcal{M},\ \nabla_k W(\{(a_j, d_j)\}) = -\frac{d_k^2}{2}a_k\Big\}.$$

Remarquons que les ensembles de configurations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$ ont une structure stratifiée, chaque strate correspond à une valeur fixée du nombre total de tourbillons ainsi que de leurs degrés. La notion de criticalité pour un élément dans $\mathcal{K}$ fait ici référence à la restriction de W à la feuille à laquelle l'élément en question appartient. On peut par ailleurs définir une distance sur $\mathcal{C}$ en posant

$$\mathrm{dist}\Big(\{(a_j, d_j)\}\}_{1\le j\le \ell}, \{(a'_j, d'_j)\}\}_{1\le j\le \ell'}\Big) = \sup_{|\nabla\xi|\le 1} \left|\sum_{j=1}^{\ell} d_j \xi(a_j) - \sum_{j=1}^{\ell'} d'_j \xi(a'_j)\right|.$$

qui correspond aussi (voir [3]) à la connection minimale entre les points $\{(a_j, d_j)\}$ et$\{(a'_j, d'_j)\}$. On a alors

Théorème 6. *On a le comportement asymptotique*

$$\mathrm{dist}(\{(\tilde{a}_j(\tilde{s}), d_j)\}, \mathcal{K}) \to 0 \tag{47}$$

lorsque $\tilde{s}$ tend vers $+\infty$. De plus, l'ensemble $\mathcal{K}$ est compact.

Bien entendu, ce résultat n'est pas entièrement satisfaisant, et l'étape suivante consisterait à démontrer qu'il existe une **unique** configuration limite $(a_j, d_j) \in \mathcal{K}$ telle que

$$(\tilde{a}_j(\tilde{s}), d_j) \to (a_j, d_j) \quad \text{lorsque } \tilde{s} \to +\infty. \tag{48}$$

Cette convergence entraînerait, en revenant aux variables d'origine

$$a_j(s) \simeq \sqrt{s - \tau_k}a_j + a_i(\tau_k), \quad \text{pour } j \in 1, ..., l_i^+,$$

qui est une propriété d'auto-similarité asymptotique près du point de branchement $(a_i(\tau_k), \tau_k)$. Comme $\mathcal{K}$ n'est pas un ensemble fini, notamment en raison de la symétrie par rotation et translation de la fonction W, la convergence (48) nous semble délicate à établir. Dans le contexte des flots gradients associés à des fonctionnelles analytiques, une telle convergence s'obtient de manière classique grâce à une méthode et une inégalité dues à Lojasiewicz ([13]). Bien que notre fonctionnelle soit analytique lorsque qu'on la restreint à une strate (i. e à nombre de tourbillons et degrés fixés), il conviendrait, pour utiliser l'argument de Lojasiewicz, de démontrer que la convergence (47) se fait à l'intérieur d'une même strate. Une autre difficulté est représentée par le terme de dérive $\vec{c}$ et les tourbillons autres que a_i.

Références

[1] L. Almeida, F. Bethuel, *Topological methods for the Ginzburg-Landau equations*, J. Math. Pures Appl. **77** (1998), 1–49.

[2] F. Bethuel, G. Orlandi, *Ginzburg-Landau functionals, phase transitions and vorticity.* In *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, 35–47, Contemp. Math. **350**, Amer. Math. Soc., (2004).

[3] H. Brezis, J.M. Coron, H. Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys.**107** (1986), 649–705.

[4] F. Bethuel, H. Brezis and F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser, Boston, (1994).

[5] F. Bethuel, G. Orlandi and D. Smets, *Collisions and phase-vortex interaction in dissipative Ginzburg-Landau dynamics*, Duke Math. J. **130** (2005), 523-614.

[6] F. Bethuel, G. Orlandi and D. Smets, *Quantization and motion law for Ginzburg-Landau vortices*, Arch. Rational Mech. Anal., **183** (2007), 315–370

[7] F. Bethuel, G. Orlandi and D. Smets, *Dynamics of multiple degree Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Math. Phys., à paraître.

[8] F. Bethuel, G. Orlandi and D. Smets, *On the Cauchy problem for phase and vortices in the parabolic Ginzburg-Landau equation*, Proceedings Centre de recherche Mathématique de Montréal,à paraître.

[9] M. Comte and P. Mironescu, *Remarks on nonminimizing solutions of a Ginzburg-Landau type equation,* Asymptotic Anal. **13** (1996), 199-215.

[10] W. E, *Dynamics of vortices in Ginzburg-Landau theories with applications to superconductivity,* Phys. D **77** (1994), 383-404.

[11] R.L. Jerrard and H.M. Soner, *Dynamics of Ginzburg-Landau vortices,* Arch. Rational Mech. Anal. **142** (1998), 99-125.

[12] F.H. Lin, *Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 323-359.

[13] , S. Lojasiewicz, *Une propiété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, Colloques internationaux du CNRS **117**, Les équations aux dérivées partielles, 1963.

[14] L. Peres and J. Rubinstein, *Vortex dynamics in* U(1) *Ginzburg-Landau models,* Phys. D **64** (1993), 299-309.

[15] P. Mironescu, *Les minimiseurs locaux pour l'quation de Ginzburg-Landau sont symtrie radiale*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **323** (1996), 593–598.

[16] F. Pacard, T. Rivière, *Linear and nonlinear aspects of vortices. The Ginzburg-Landau model.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **39**. Birkhuser Boston, (2000).

[17] E. Sandier and S. Serfaty, *Gamma-convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau,* Comm. Pure App. Math. **57** (2004), 1627-1672.

[18] S. Serfaty, *Vortex Collision and Energy Dissipation Rates in the Ginzburg-Landau Heat Flow,* preprint 2005.

Adresses

Fabrice Bethuel, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu BC 187, 75252 Paris, France & Institut Universitaire de France.
E-mail : `bethuel@ann.jussieu.fr`

Giandomenico Orlandi, Dipartimento di Informatica, Università di Verona, Strada le Grazie, 37134 Verona, Italy.
E-mail : `orlandi@sci.univr.it`

Didier Smets, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu BC 187, 75252 Paris, France.
E-mail : `smets@ann.jussieu.fr`