SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2006-2007

Luc Robbiano et Claude Zuily

Effet régularisant pour les solutions de l'équation de Schrödinger dans un domaine extérieur

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° XIII, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Effet régularisant pour les solutions de l'équation de Schrödinger dans un domaine extérieur

Luc Robbiano et Claude Zuily

1 Introduction.

L'effet régularisant que nous allons étudier est le suivant. Considérons la solution u du problème,

$$(i\partial_t - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1.2}$$

la solution existe et est dans $C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$, de plus $\|u(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (conservation de la masse). En fait localement u est plus régulière pour presque tout t c'est à dire $u \in L^2(\mathbb{R}, H^{1/2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$. Plus précisément, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ il existe $C > 0$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la solution du problème (1.1) et (1.2) vérifie,

$$\int_{\mathbb{R}} \|\chi(x)(I-\Delta)^{1/4}u(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}dt \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.3}$$

Ce type d'effet a tout d'abord été mis en évidence par Kato [K] pour l'équation de KdV. Pour l'équation de Schrödinger cet effet a été prouvé indépendamment par Constantin et Saut [C-S], Sjölin [S] et Vega [V].

Yajima [Y] a étudié le cas des termes d'ordre inférieur à coefficients variables. Doï [D1]–[D4] qui se place dans le cadre où la partie principale est à coefficients variables, a en particulier mis en évidence la nécessité de faire une hypothèse de non capture du flot géodésique (hypothèse analogue à (3.13)). Dans $\mathbb{R}^d$ le cas des problèmes avec des potentiels superquadratiques ont été étudiés par Yajima et Zhang [Y-Z1], [Y-Z2] pour la métrique plate et par Robbiano et Zuily [R-Z] pour les métriques asymptotiquement plates sous une hypothèse de non capture.

Les problèmes extérieurs ont été étudiés par Burq [B2] où il démontre la nécessité de l'hypothèse de non capture et dans [B3] il démontre un résultat analogue au notre pour des perturbations compactes du laplacien plat.

Le but de notre travail est de prouver l'effet régularisant pour des opérateurs à coefficients variables, sous des hypothèses proche de celles de Doï, c'est à dire pour des opérateurs elliptiques avec une métrique asymptotiquement plate, un potentiel quadratique à l'infini, dans des domaines extérieurs. Dans ce cadre il ne nous a pas semblé possible de construire des multiplicateurs adaptés comme le fait Doï.

2 Les résultats.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ à bord C^∞, on note $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ et on supposera Ω connexe.

Nous considérons un opérateur $P = \sum_{k,j=1}^{d} D_j a_{jk}(x) D_k + V(x)$ où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Les coefficients a_{jk} et V sont supposés $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, à valeurs réelles, $a_{jk} = a_{kj}$, $1 \le j,k \le d$. Nous notons $p(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k$ et nous supposons

$$\exists\, c > 0 \ : \ p(x,\xi) \ge c|\xi|^2, \text{ pour } x \text{ dans } \overline{\Omega} \text{ et } \xi \text{ in } \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Nous faisons également des hypothèses de type symbole sur les coefficients. Pour cela nous notons

$$g = \frac{dx^2}{\langle x\rangle^2} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi\rangle^2} \tag{2.2}$$

où $\langle . \rangle = (1 + |.|^2)^{1/2}$ et nous notons $S_\Omega(M,g)$ la classe de symbole de Hörmander de poids M et de métrique g dans Ω. Plus précisément on dit que $a \in S_\Omega(M,g)$ si $a \in \mathcal{C}^\infty\big(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d\big)$ et pour tous α, β dans $\mathbb{N}^d$ il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ telles que

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta} M(x,\xi) \langle x\rangle^{-|\beta|} \langle \xi\rangle^{-|\alpha|} \tag{2.3}$$

pour tout x dans $\overline{\Omega}$ et ξ dans $\mathbb{R}^d$.

Sur a_{jk} et V, nous supposerons que

$$\begin{cases} (i) \quad a_{jk} \in S_\Omega(1,g),\ \nabla_x a_{jk}(x) = o\Big(\dfrac{1}{|x|}\Big), |x| \to +\infty,\ 1 \le j,k \le d. \\ (ii) \quad V \in S_\Omega\big(\langle x\rangle^2, g\big),\ V \ge -C_0 \text{ pour une constante } C_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Sous les hypothèses (2.1) et (2.4) l'opérateur P est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Nous noterons P_D son extension auto-adjointe.

Nous supposerons que K est non captant (voir (3.13) pour une définition précise) et que les bicaractéristiques n'ont pas de contact à l'ordre infini avec le bord (voir (3.11)).

Soit u la solution du problème

$$(2.5) \qquad \begin{cases} i\partial_t u - P_D u &= 0 \\ u_{|t=0} &= u_0 \in L^2(\Omega) \\ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_t} &= 0 \end{cases}$$

Nous notons $\Lambda_D = ((1 + C_0)Id + P_D)^{1/2}$.

Théorème 2.1 *Dans le cadre et les hypothèses ci-dessus, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, pour tout $T > 0$ il existe $C > 0$ telle que*

$$(2.6) \qquad \int_0^T \|\chi\Lambda_D^{1/2}u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

3 Structure de la preuve.

La preuve consiste à raisonner par l'absurde en niant l'inégalité. Cela permet d'introduire une mesure de défaut semi-classique puis de démontrer des propriétés sur cette mesure qui auront pour conséquence que cette mesure doit être nulle et non nulle, d'où la contradiction classique dans ce type de raisonnement. Nous allons détailler la démarche suivie en plusieurs étapes.

Étape 1.

La première réduction consiste à remarquer qu'il suffit pour prouver (2.6) de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$

$$(3.1) \qquad \int_0^T \|\chi_0\theta(h^2P_D)\Lambda_D^{1/2}u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Où χ_0 est une fonction C^∞ à support compact fixée et θ une fonction C^∞ à support compact dans $[1/2, 3]$ et valant 1 sur $[1, 2]$.

Quitte à conjuguer la formule par $e^{it(C_0+1)}$ on peut remplacer $\Lambda_D^{1/2}$ par $P_D^{1/4}$. On peut alors en notant $\theta(h^2P_D)P_D^{1/4} = h^{-1/2}\tilde{\theta}(h^2P_D)$ où $\tilde{\theta}(\sigma) = \theta(\sigma)\sigma^{1/4}$, se ramener à démontrer l'inégalité suivante, il existe $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0, 1]$

$$(3.2) \qquad \int_0^T \|\chi_0 h^{-1/2}\tilde{\theta}(h^2P_D)u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 2.

Si l'inégalité (3.2) est fausse , il existe une suite $h_k \to 0$ (que nous noterons dans la suite h pour ne pas alourdir les écritures), une suite $u_h^0 \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\int_0^T \|\chi_0 h^{-1/2}\tilde{\theta}(h^2 P_D)u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq k\|u_h^0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3}$$

où u_h est la solution de (2.5) avec la condition initiale u_h^0. Quitte à normaliser u_h^0 on peut supposer de plus que

$$\int_0^T \|\chi_0 h^{-1/2}\tilde{\theta}(h^2 P_D)u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 1 \tag{3.4}$$

(3.3) et (3.4) impliquent que $\|u_h^0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Dans la suite on pose $w_h(.,t) = h^{-1/2}\tilde{\theta}(h^2 P_D)u_h(t)$.

Étape 3.

Cette étape consiste à montrer que (w_h) est bornée dans L^2_{loc}. Pour cela on tronque w_h dans une grande boule. On pose $U_h = \widetilde{\chi} w_h$ où $\widetilde{\chi} = 1$ hors d'une grande boule, à choisir de sorte que $\widetilde{\chi} = 0$ sur K, que $\chi_0 + \widetilde{\chi} \geq 1$ sur Ω et que sur le support de $\widetilde{\chi}$ la matrice (a_{jk}) soit assez proche de la matrice identité. On vérifie que $(D_t + \widetilde{P})U_h = G_h$ où $\widetilde{P}$ est un prolongement elliptique de P dans $\mathbb{R}^d$ et (G_h) est uniformément borné dans H^{-1}. On peut dans ce cas appliquer le résultat de Doï [D4] pour obtenir que (U_h) est uniformément borné dans L^2_{loc}. Ce qui implique que (w_h) est uniformément bornée dans L^2_{loc}.

Étape 4.

On note $\underline{w}_h(x,t) = \mathbb{1}_{[0,T]}(t)\mathbb{1}_\Omega(x)w_h(x,t)$, c'est à dire on prolonge w_h par 0 dans K et pour $t \leq 0$ ou $t \geq T$. Nous définissons une mesure semi-classique adaptée à l'équation de Schrödinger. Nous suivons pour tout ce passage les travaux de Gérard et Leichtnam [G-L], Miller [Mi], Burq [B1], [B2] et [B3], Burq et Gérard [B-G], Lebeau [L]. Ce formalisme est proche des H-mesures de Tartar [T] ou des mesures de Wigner (voir par exemple Lions et Paul [L-P]) mais nous n'utiliserons pas ici ces notions.

Plus précisément, on montre que modulo l'extraction d'une sous-suite de la suite h_k (que nous continuerons de noter h), il existe une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^{2d+2}$ telle que pour toute $a(x,t,\xi,\tau) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d+2})$ on a $(a(x,t,hD_x,h^2D_t)\underline{w}_k/\underline{w}_k)_{L^2}$ converge vers $\langle \mu, a\rangle$ quand h tend vers 0.

Le caractère adapté de cette mesure à l'équation de Schrödinger provient du terme h^2D_t à la place du plus classique hD_t. Cela a pour conséquence un comportement un peu différent de cette mesure vis à vis de la propagation de son support par rapport à celui de la mesure semi-classique usuelle.

Propriétés du support de la mesure μ.

Nous utiliserons par la suite deux propriétés de cette mesure.

$$\text{(3.5)} \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \{(x,t,\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{d+1}\times\mathbb{R}^{d+1},\ x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,T],\ \tau+p(x,\xi)=0\}.$$

Le fait que le support de μ soit dans $\overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}^{d+1}$ est évident vu la définition de $\underline{w}_h$ mais la preuve de $\operatorname{supp}\mu \subset \{\tau+p(x,\xi)=0\}$ est plus délicate, surtout près du bord de Ω.

(3.6) "$\operatorname{supp}\mu$ se propage le long des bicaratéristiques généralisées de $p(x,\xi)$"

Cette phrase demande une explication, en effet $\operatorname{supp}\mu$ et les bicaractéristiques généralisées, ne "vivent" pas sur le même espace. Définissons tout d'abord l'espace adapté pour décrire les bicaractéristiques généralisées. Notons $M=\Omega\times\mathbb{R}_t$ et $\partial M=\partial\Omega\times\mathbb{R}_t$, $\overline{M}=\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_t$ et $T_b^*M=T^*\partial M\cup T^*M$. On définit une application

$$\text{(3.7)} \qquad \pi : T^*\mathbb{R}^{d+1}_{|\overline{M}} \to T_b^*M = T^*\partial M \cup T^*M$$

de la façon suivante, si $x\in\Omega$, π est l'identité. Pour définir π quand $x\in\partial\Omega$, plaçons nous en coordonnées locales notées (x_1,x',t) où $x'=(x_2,\dots,x_d)$. On peut supposer que $\Omega=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1},\ x_1>0\}$ et $p(x,\xi)=\xi_1^2+r(x,\xi')$ (on a noté $\xi'=(\xi_2,\dots,\xi_d)$). On pose $\pi(0,x',t,\xi_1,\xi',\tau)=(x',t,\xi',\tau)$.

La topologie sur T_b^*M est la plus fine qui rend continue π. Par exemple en $\dim M=1$, on aura $T^*\partial M=(0,0)$ et $T^*M=\{(x_1,\xi_1),\ x_1>0\}$. Un voisinage typique de $(0,0)$ est V un voisinage (usuel) de $\{(0,\xi_1)\}$ (voir la Fig. 1).

Les bicarcatéristiques généralisées.

Soit $\zeta_0=(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0)\in T_b^*M$, nous noterons $\Gamma(s,\zeta_0)$ la bicaractéristique généralisée issue de ζ_0 à l'instant s que nous allons décrire ci-dessous dans les deux cas $x_0\in\Omega$ et $x_0\in\partial\Omega$.

$\underline{x_0\in\Omega.}$

Si $\tau_0+p(x_0,\xi_0)=0$ on définit $\gamma(s)=(x(s),\xi(s))$ la bicaractéristique de p issue de (x_0,ξ_0), c'est à dire la solution

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(s) = \dfrac{\partial p}{\partial \xi}(\gamma(s)) & x(0) = x_0 \\[2ex] \dot{\xi}(s) = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(\gamma(s)) & \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

On définit $\Gamma(s,\zeta_0)=(x(s),t_0,\xi(s),\tau_0)$ tant que $x(s)\in\Omega$.

$\underline{x_0\in\partial\Omega.}$

On se place dans les coordonnées locales introduites plus haut. Soit $\zeta_0=(x_0',t_0,\xi_0',\tau_0)\in T^*\partial M$. Si $\tau_0+r(0,x_0',\xi_0')>0$ alors pour tout ξ_1 on a $\tau_0+\xi_1^2+r(0,x_0',\xi_0')>0$. Comme le

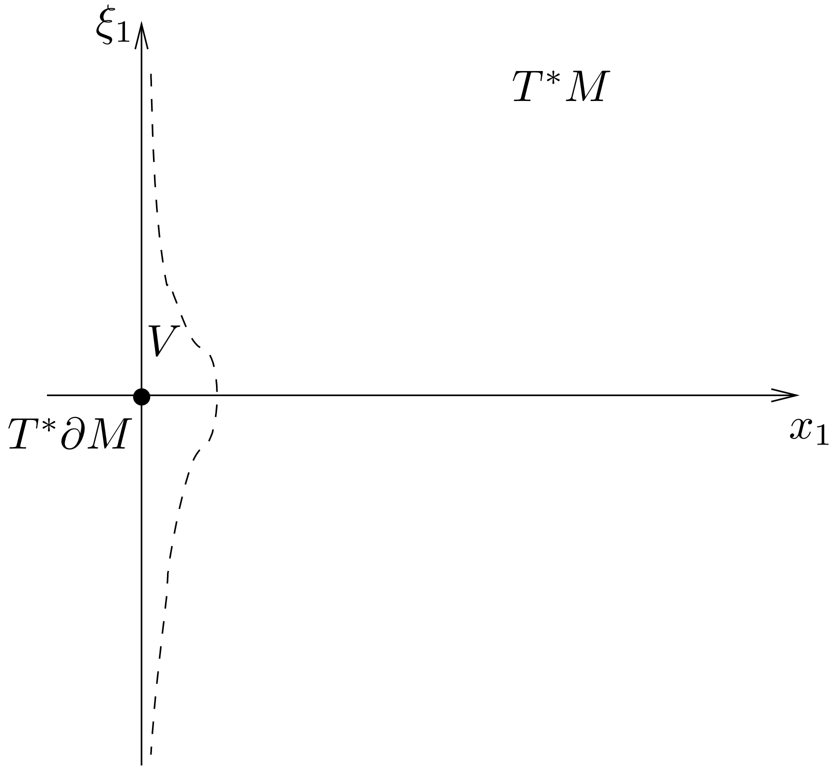

FIG. 1 – Topologie de T_b^*M.

support de μ est contenu dans $\{(x,t,\xi,\tau),\ \tau+\xi_1^2+r(x,\xi')=0\}$ on a $(0,x_0',t_0,\xi_1,\xi_0',\tau_0)\notin \operatorname{supp}\mu$ quelque soit ξ_1. On ne définit pas Γ en un tel point. Nous supposerons dans la suite $\tau_0+r(0,x_0',\xi_0')\leq 0$.

Si $\tau_0+r(0,x_0',\xi_0')<0$, on note $\xi_1^+=\sqrt{-(\tau_0+r(0,x_0',\xi_0'))}$ et $\xi_1^-=-\xi_1^+$. Notons $(x^-(s),\xi^-(s))$ la solution de (3.8) avec la condition initiale $(x_0,\xi_0)=(0,x_0',\xi_1^-,\xi_0')$ et $(x^+(s),\xi^+(s))$ la solution de (3.8) avec la condition initiale $(x_0,\xi_0)=(0,x_0',\xi_1^+,\xi_0')$. Comme de (3.8) on a $\dot{x}_1=2\xi_1$, on a pour $s\neq 0$ petit, $x_1(s)>0$ si $s.\xi_1(0)>0$. Il est assez naturel de poser, pour s petit,

$$\Gamma(s,\zeta_0)=\begin{cases}(x^-(s),t_0,\xi^-(s),\tau_0) & \text{pour } s<0\\ (x_0',t_0,\xi_0',\tau_0) & \text{pour } s=0\\ (x^+(s),t_0,\xi^+(s),\tau_0) & \text{pour } s>0\end{cases}\tag{3.9}$$

On vérifie que $\Gamma(s,\zeta_0)$ est continue par rapport à s avec la topologie définie plus haut sur T_b^*M.

Si $\tau_0+r(0,x_0',\xi_0')=0$, on introduit $r_0(x',\xi')=r(0,x',\xi')$ et on note $\gamma_g(s)=(x_g'(s),\xi_g'(s))$ la

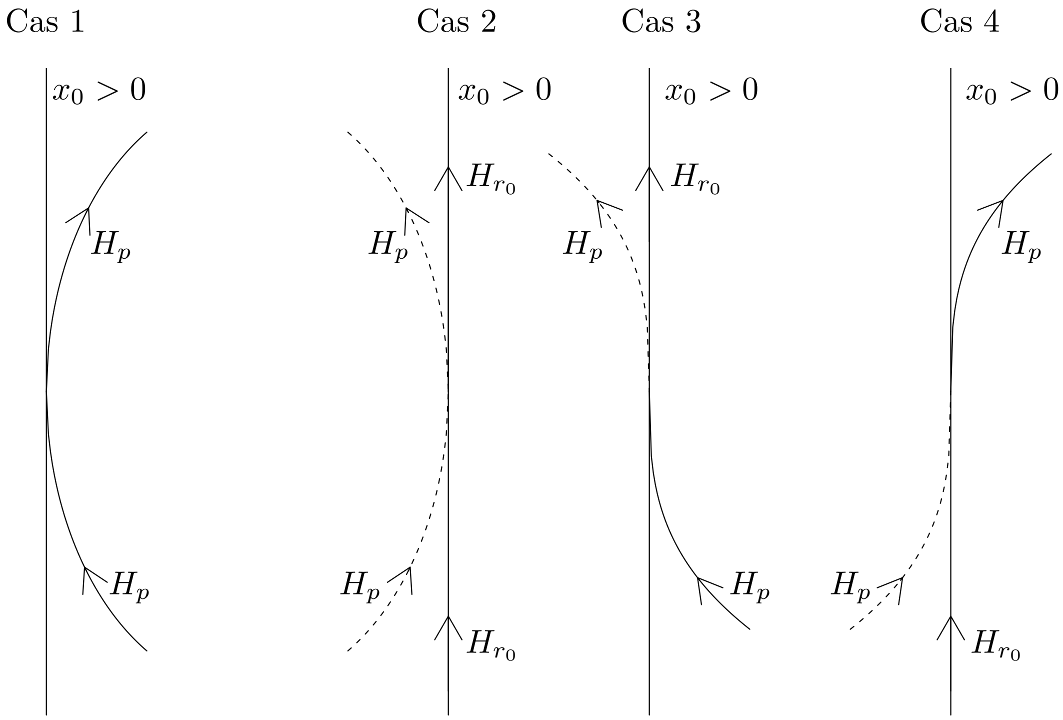

FIG. 2 – Bicaractéristiques généralisées.

bicaractéristique de r_0, appelée la bicaractéristique glissante, c'est à dire la solution de

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \dot{x}'_g(s) = & \dfrac{\partial r_0}{\partial \xi'}(\gamma_g(s)) & x'(0) = & x'_0 \\ \dot{\xi}'_g(s) = & -\dfrac{\partial r_0}{\partial x'}(\gamma_g(s)) & \xi'(0) = & \xi'_0 \end{cases}$$

L'hypothèse que les bicaractéristiques n'ont pas de contact à l'ordre infini avec le bord s'écrit plus précisément

$$(3.11) \qquad x_1(s) = \alpha s^k + O(s^{k+1}) \text{ pour } \alpha \neq 0$$

Nous avons 4 situations géométriques différentes en fonctions du signe de α et de la parité de k dans la formule (3.11). Avant d'entrer dans une description détaillée de la définition de $\Gamma(s, \zeta_0)$ dans ce cas, on peut résumer la situation en disant que si γ est dans Ω la bicaractéristique généralisée suit la bicaractéristique de p, sinon elle suit la bicaractéristique glissante. Dans la Fig. 2, nous avons dessiné en trait plein la bicaractéristique généralisée qui suit soit le flot de H_p, soit le flot de H_{r_0}.

Cas 1. $\alpha > 0$**,** k **pair,** $k \geq 2$**.**

$$\Gamma(s, \zeta_0) = \begin{cases} (x(s), t_0, \xi(s), \tau_0) & \text{pour } s < 0 \text{ ou pour } s > 0 \\ (x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0) & \text{pour } s = 0 \end{cases}$$

Cas 2. $\alpha < 0$, k **pair,** $k \geq 2$.

$$\Gamma(s,\zeta_0) = \ (x'_g(s), t_0, \xi'_g(s), \tau_0) \quad \text{pour tout } s$$

Cas 3. $\alpha < 0$, k **impair,** $k \geq 3$.

$$\Gamma(s,\zeta_0) = \begin{cases} (x(s), t_0, \xi(s), \tau_0) & \text{pour } s < 0 \\ (x'_g(s), t_0, \xi'_g(s), \tau_0) & \text{pour } s \geq 0 \end{cases}$$

Cas 4. $\alpha > 0$, k **impair,** $k \geq 3$.

$$\Gamma(s,\zeta_0) = \begin{cases} (x'_g(s), t_0, \xi'_g(s), \tau_0) & \text{pour } s \leq 0 \\ (x(s), t_0, \xi(s), \tau_0) & \text{pour } s > 0 \end{cases}$$

Le résultat de propagation du support peut se formuler précisément ainsi,

$$\pi^{-1}(\Gamma(s_1,\zeta)) \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset \Leftrightarrow \pi^{-1}(\Gamma(s_2,\zeta)) \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset \tag{3.12}$$

Remarquons que si $\Gamma(s,\zeta) \in T^*\partial M$ alors $\pi^{-1}(\Gamma(s,\zeta)$ est un espace de dimension 1 mais comme on sait a priori que $\operatorname{supp}\mu \subset \{\tau + p(x,\xi) = 0\}$ la complexité n'est pas si grande car $\pi^{-1}(\Gamma(s,\zeta)) \cap \{\tau + p(x,\xi) = 0\}$ est réduit à un ou deux points. Dans le cas où cet ensemble contient deux points, une propriété de symétrie de la mesure μ implique que soit les deux points sont dans le support, soit aucun des deux ne l'est.

Étape 5.

Il s'agit de montrer que $\mu \not\equiv 0$. Pour cela nous utilisons l'hypothèse (3.4). On ne peut pas passer à la limite directement car l'opérateur $\chi_0\widetilde{\theta}(h^2P_D)$ n'est pas un opérateur pseudo-différentiel. Par la formule de Helffer-Sjöstrand, (voir par exemple le livre de Davies [Da]) on peut le transformer en opérateur pseudo-différentiel en x, il reste à introduire un opérateur de troncature en $\psi(h^2D_t)$. Cela peut-être fait en exploitant le fait que la mesure μ a son support sur $\{\tau+p(x,\xi) = 0\}$. Très grossièrement, si $h^2\xi^2$ est de l'ordre de 1, ce qui est le cas grâce à la troncature $\widetilde{\theta}$, alors $h^2\tau$ doit aussi être de l'ordre de 1. On peut effectivement démontrer que si $\psi = 1$ sur un intervalle suffisamment grand, alors $\int_0^T \|\chi_0 h^{-1/2}\psi(h^2D_t)\widetilde{\theta}(h^2P_D)u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 1/2$ ce qui implique que $\mu \not\equiv 0$ en passant à la limite dans cette expression.

Étape 6.

On démontre que $\mu = 0$ aux points entrants, c'est à dire les points $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$ où $|x_0|$ est suffisamment grand et $x_0 \cdot \xi_0 \leq -\varepsilon\langle x_0\rangle$. Pour cela, à partir de la fonction fuite usuelle, nous construisons un multiplicateur adapté. En suivant la même méthode que Doï [D4], nous démontrons que l'inégalité (3.2) est vraie près des points entrants. Ceci implique que $\mu = 0$ près de ces points.

L'hypothèse K est non captant étant

(3.13) Toutes les bicaractéristiques généralisées vont à l'infini quand $s \to -\infty$

on démontre que sur toute bicaractéristique il y a un point entrant. On en déduit que μ n'a pas de support sur toute la bicaractéristique, c'est à dire que $\mu \equiv 0$. Ce qui est contradictoire avec l'étape 5 et démontre (3.2) par l'absurde.

Références

[B1] Burq N. : *Mesures semi classiques et mesures de défaut*, Séminaire Bourbaki, Astéristique n°245 (1997), p. 167-195.

[B2] Burq N. : *Smoothing Effect for Schrödinger Boundary Value Problems*, Duke Math. Journal 123 (2004), 403-427.

[B3] Burq N. : *Semi-classical estimates for the resolvant in non trapping geometries*, IMRN n°5 (2002), p. 221-241.

[B-G] Burq N., Gérard P. : *Condition nécessaire et suffisante pour la controlabilité exacte des ondes*, CRAS 325 (1997), 749-752.

[C-S] Constantin, P., Saut, J-C. : *Local smoothing properties of dispersive equations*, Journal American Mathematical Society (1988) 413-439.

[Da] Davies E.B., *Spectral theory and differential operators*, Cambridge studies in advanced mathematics, 42, Cambridge Univers. press

[D1] Doï, S. : *Smoothing effects of Schrödinger evolution group on Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 82 (1996) 679-706.

[D2] Doï, S. : *Smoothing effects for Schrödinger evolution equation and global behavior of geodesic flow*, Math. Ann. 318 (2000) 355-389.

[D3] Doï, S. : *Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Comm. in pde, 21 (1996) 163-178.

[D4] Doï, S. : *Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potential.*, Publ.Res.Inst.Math.Sci 41 (2005), 1, 175-221.

[G-L] Gérard P., Leichtnam E. : *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. 71 n°2 (1993), p. 559-607.

[Hö] Hörmander L. : *The analysis of Linear Partial Differential Operators I, III*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1985).

[K] Kato T. : *On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equation*, Stud. Appl. Math. Adv. Math. Suppl. Stud. 8 (1983) 93-128.

[L] Lebeau G. : *Équation des ondes amorties. Algebraic and Geometric methods in math. physics*, Math. Phys. Math. Studies, vol. 19, Kluwer Acad. Publ. Dovdrecht (1996), p. 73-109.

[L-P] Lions P.L., Paul, T. : *Sur les mesures de Wigner*, Rev. Mat. Iberoamericana 9 (1993) 553-618

[M-S] Melrose R.B., Sjöstrand J. : *Singularities of boundary value problems I*, Comm. Pure Appl. Math 31 n° 5 (1978), 593-617.

[Mi] Miller L. : *Refraction of high-frequency waves density by sharp interfaces and semi classical measures at the boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) 79 n° 3 (2000), p. 227-269.

[R-Z] Robbiano L., Zuily C. : *Remark on the Kato smoothing effect for Schrödinger equation with superquadratic potentials* Preprint.

[S] Sjölin P. : *Regularity of solution to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. 55 (1987) 699-715.

[T] Tartar, Luc : *Memory effects and homogenization* Arch. Rational Mech. Anal. 111 (1990) 121-133.

[V] Vega L. : *Schrödinger equations, pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988) 874-878.

[Y] Yajima K. : *On smoothing property of Schrödinger propagator*, Lectures notes in Math. 1450 Springer Verlag (1990) 20-35.

[Y-Z1] Yajima K., Zhang G.P. : *Smoothing property for Schrödinger equations with potential super-quadratic at infinity*, Comm. Math. Phys. 221 (2001) 573-590.

[Y-Z2] Yajima K., Zhang G.P. : *Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity*, Journ. Diff. Equ. 202 (2004) 81-110.

Luc Robbiano et Claude Zuily
Université de Paris-Sud
Département de mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay cedex (France)