Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2005-2006

Delphine Salort

Étude qualitative de l'équation de Liouville en géométries courbes.

Séminaire É. D. P. (2005-2006), Exposé n° XXI, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2005-2006____A21_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Étude qualitative de l'équation de Liouville en géométries courbes.

Delphine Salort

Laboratoire Jacques Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie
75252 Paris cedex 05

Résumé

On considère l'équation de Liouville associée à une métrique g de classe $\mathcal{C}^2$ et on prouve des estimations de dispersion et de Strichartz sur la solution en fonction de la géométrie des trajectoires associées à la métrique g. On introduit les notions de métrique dispersive et de métrique focalisante pour caractériser les métriques telles que l'estimation de dispersion obtenue dans le cas euclidien soit vérifiée. On étudie le cas des perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives en établissant un effet de moments global en temps. En particulier, on obtient des estimations de Strichartz globales en temps pour des métriques telles que l'estimation de dispersion n'est pas vérifiée.

1 Introduction

Soient f et H deux fonctions de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On note $\{H, f\}$ le crochet de Poisson entre f et H

$$\{H, f\} = \nabla_\xi H \nabla_x f - \nabla_\xi f \nabla_x H.$$

On considère ici le cas de la dimension $d \geq 2$, (voir [15] pour plus de détails et [17] pour le cas de la dimension 1) et une métrique $g : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les conditions suivantes

$$\exists m > 0, \exists M > 0, mId \leq g \leq MId. \tag{1}$$

On étudie l'équation de Liouville associée à une métrique g

$$\begin{cases} \partial_t f + \{H, f\} = 0 \\ f(0, x, \xi) = f^{in}(x, \xi) \end{cases} \tag{2}$$

où l'hamiltonien H est donné par

$$H(x, \xi) := \sum_{i,j=1}^{d} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad \text{avec} \quad g^{ij} = (g^{-1})_{ij}.$$

On note F_t le flot hamiltonien associé à H

$$F_t(x,\xi) = (X(t,x,\xi), V(t,x,\xi))$$

où (X,V) est solution du système hamiltonien

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dX}{dt} = \nabla_\xi H(X,V)\\ X(0,x,\xi) = x\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{dV}{dt} = -\nabla_x H(X,V)\\ V(0,x,\xi) = \xi.\end{array}\right. \tag{3}$$

En utilisant le fait que $g \in \mathcal{C}_b^2$ est positive, on obtient la conservation de $H(x,\xi)$ le long des trajectoires (X,V). La méthode des caractéristiques nous donne une représentation explicite de la solution f de l'équation (2) en fonction de la donnée initiale

$$f(t,x,\xi) = f^{in}(X(-t,x,\xi), V(-t,x,\xi)).$$

L'évolution de la solution f est donc déterminée par $F_t(x,\xi)$ et les propriétés qualitatives de f sont en grande partie déterminées par les trajectoires $X(t,x,\xi)$.

La solution de cette équation vérifie les deux propriétés de base suivantes

- Pour tout $p \in [1,\infty]$, la propriété de conservation

$$\|f(t)\|_{L^p_{x,\xi}} = \|f^{in}\|_{L^p_{x,\xi}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Pour tout $p \in [1,\infty]$, pour tout $\alpha > 0$

$$\|(1+|\xi|)^\alpha f(t)\|_{L^p_{x,\xi}} \leq C(\alpha)\|(1+|\xi|)^\alpha f^{in}\|_{L^p_{x,\xi}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'objectif ici est d'établir de nouvelles estimations dites de Strichartz pour l'équation de Liouville avec une métrique variable ainsi que des effets de moments ; c'est-à-dire que l'on cherche à exploiter la façon dont la solution s'étale dans l'espace au cours du temps pour gagner des moments en ξ sur la solution par rapport aux propriétés de base ci-dessus, quitte à perdre un peu d'intégrabilité en temps. Pour cela, on va d'abord rappeler les résultats connus établis dans le cas euclidien, pour ensuite exposer les résultats nouveaux obtenus dans le cas d'une métrique variable.

2 Cas de la métrique euclidienne .

Dans le cas euclidien $g = Id$, l'équation de Liouville devient l'équation de transport

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t f + \xi\cdot\nabla_x f = 0\\ f(0,x,\xi) = f^{in}(x,\xi).\end{array}\right.$$

Cette équation modélise l'évolution d'une densité microscopique de particules qui se trouvent au temps t, à la position x, et à la vitesse ξ.

On introduit les notations suivantes. On note $T_g(t)(f^{in})$ la solution de l'équation de Liouville (2) associée à une métrique g avec f^{in} comme donnée initiale. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble A. On utilise la notation $f_1 \lesssim f_2$ pour dire que $f_1 \leq C f_2$ où $C > 0$. On se servira aussi de la définition suivante.

Définition 1 *Soit* $(q, p, r, a) \in [1, +\infty]^4$*. On dit que le quadruplet* (q, p, r, a) *est admissible s'il vérifie les relations suivantes*

$$\frac{2}{q} = d\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\Big), \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\Big) \quad et \quad q > 2 \geq a.$$

Lorsque l'on intègre f par rapport à la vitesse ξ, on obtient une nouvelle fonction de densité macroscopique ρ donnée par

$$\rho(t, x) = \int f(t, x, \xi) d\xi$$

qui satisfait des propriétés de dispersion.

C. Bardos et P. Degond ont montré dans [2] que la fonction ρ vérifie l'estimation de dispersion suivante

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty_x} \lesssim \frac{1}{|t|^d} \|f^{in}\|_{L^1_x(L^\infty_\xi)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Avec cette estimation, F. Castella et B. Perthame dans [6] ont montré les estimations de Strichartz suivantes

$$\|f\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \leq C(q, p, r, a)\|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}$$

pour tout quadruplet admissible (q, p, r, a).

Ces estimations de dispersion sont fondamentales pour l'étude de certaines équations de transport non linéaires comme par exemple l'équation de Boltzmann ou l'équation de Vlasov-Poisson. On peut se référer aux articles de P.-L. Lions et B. Perthame [11], de F. Golse et L. Saint-Raymond [9] ainsi qu'à l'article de B. Perthame [13] (voir aussi les références dans [13]).

3 Cas d'une métrique variable.

L'objectif ici est de comprendre ce qu'il advient des propriétés qualitatives de l'équation de transport lorsque l'on remplace la métrique euclidienne par une métrique variable.
Pour traiter le cas d'une métrique variable, on s'intéresse d'abord au cas général où aucune hypothèse géométrique n'est faite sur les trajectoires. Ensuite, on donne une caractérisation géométrique sur les trajectoires pour que la même estimation de dispersion que dans le cas euclidien soit vérifiée. Enfin, on traite le cas des perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives.

3.1 Cas sans hypothèses géométriques.

Pour montrer des estimations de Strichartz dans le cas où aucune hypothèse géométrique n'est imposée sur la métrique g, l'idée consiste à regarder ce qu'il reste de l'estimation de dispersion établie dans le cas euclidien. Plus précisément, on adopte la stratégie suivante. D'abord, on montre qu'il est possible d'obtenir des estimations de dispersion localisées en temps et en vitesse. Puis, en combinant ces estimations de dispersion localisées en temps et en vitesse et les propriétés conservatives qui sont les mêmes que dans le cas euclidien, on obtient des estimations de Strichartz avec une perte de moments.

3.1.1 Estimations de dispersion localisées en temps et en vitesse.

Si l'on considère le cas général en dimension plus grande que 2, on remarque que, par exemple, dans le cas où il existe des trajectoires captées, l'estimation de dispersion établie dans le cas euclidien ne peut pas être vérifiée. Néanmoins, si l'on se donne une vitesse de départ ξ assez petite et un intervalle de temps relativement petit par rapport à ξ, alors, la trajectoire $X(t,x,\xi)$ n'a pas le temps de s'enrouler ; et, de fait, la géométrie associée à la métrique g ne se voit pas et la même estimation de dispersion que dans le cas euclidien est obtenue. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $h \in \mathbb{R}_*^+$ et soit $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction dans $\mathcal{D}(B(0,2))$ telle que $\psi \equiv 1$ au voisinage de la boule $B(0,1)$. Alors, il existe $C > 0$ et $C_1 > 0$ telles que pour tout $t \in [-Ch, Ch]$, pour toute donnée initiale $f^{in} \in L^1_x(L^\infty_\xi)$ on a*

$$\sup_x \int |\psi(h\xi) f(t,x,\xi)| d\xi \leq \frac{C_1}{|t|^d} \int \sup_\xi \left| \psi(Ch\xi) f^{in}(x,\xi) \right| dx. \tag{4}$$

De plus, on peut construire une métrique g sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 2$ telle que l'estimation de dispersion (4) soit optimale.

Remarque 1 *En dimension 1, l'estimation de dispersion est toujours vérifiée (voir [17]).*

3.1.2 Estimations de Strichartz.

On a le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit I un intervalle de temps fini, (q,p,r,a) un quadruplet admissible et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une constante C telle que la solution f de l'équation (2), satisfait les estimations de Strichartz suivantes*

$$\|f\|_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} \leq C \|(1 + |\xi|^{\frac{1}{q}+\varepsilon}) f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

De plus, la perte de $\frac{1}{q}$ moment est optimale pour l'équation de Liouville posée sur $M \times TM$ pour toute variété compacte M.

Preuve du théorème 1 Pour montrer ce théorème, on utilise la proposition 1 et un découpage temps-vitesse sur la solution. Cette technique de découpage a été utilisée par H. Bahouri et J.-Y. Chemin pour le cas des ondes dans [1], par N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov pour l'équation de Schrödinger dans [5] et par l'auteur dans [16].

On introduit la partition de l'unité suivante. Soit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ telles que

$$\widetilde{\varphi}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1.$$

Lemme 1 *Pour tout quadruplet admissible (q, p, r, a), il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout intervalle I_k tel que $|I_k| \leq \alpha 2^{-k}$ la solution f de l'équation de Liouville (2) satisfait les estimations suivantes*

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|_{L^q_{I_k}(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|\varphi(C 2^{-k}\xi) f^{in}(x, \xi)\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

En utilisant les propriétés de conservation, la proposition 1 et en suivant la méthode de dualité TT^* utilisée dans l'article de F. Castella et B. Perthame dans [6], où T est donné par

$$T(t) f^{in} = \varphi(2^{-k}\xi) \mathbb{I}_{I_k}(t) T_g(t) f^{in} \quad \text{avec} \quad |I_k| \leq \alpha 2^{-k},$$

on en déduit que

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|_{L^q_{I_k}(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

En utilisant le fait que l'hamiltonien est conservé au cours du temps, on obtient qu'il existe une constante C telle que

$$\varphi(2^{-k}\xi) T_g(t) f^{in}(x, \xi) = \varphi(2^{-k}\xi) T_g(t)(\varphi(C 2^{-k}\xi) f^{in}(x, \xi))$$

ce qui montre le lemme 1. $\square$

Soit I un intervalle de temps fini et $k \in \mathbb{N}$. On découpe I en petits intervalles de temps dont la taille est de l'ordre de $\alpha 2^{-k}$ et on applique le lemme 1.
On écrit

$$I = \sum_{j=1}^{N_k} I_{j,k}$$

où $I_{j,k}$ sont des intervalles disjoints de longueur $|I_{j,k}| \sim \alpha 2^{-k}$ avec $N_k \lesssim \frac{|I|}{\alpha} 2^k$.
On obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|^q_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} = \sum_{j=1}^{N_k} \|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|^q_{L^q_{I_{j,k}}(L^p_x(L^r_\xi))}.$$

Le lemme 1 donne

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|^q_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim N_k \|\varphi(C 2^{-k}\xi) f^{in}(x, \xi)\|^q_{L^a_{x,\xi}}$$

et donc

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim 2^{\frac{k}{q}} \|\varphi(C 2^{-k}\xi) f^{in}(x, \xi)\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

Dans la mesure où la donnée initiale est localisée en ξ dans une couronne de taille $\sim 2^k$, on en déduit que

$$\|\varphi(2^{-k}\xi) f(t, x, \xi)\|_{L^q_{I_k}(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim 2^{-k\varepsilon} \|(1 + |\xi|^{\frac{1}{q}+\varepsilon}) f^{in}(x, \xi)\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|f(t,x,\xi)\|_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} &\lesssim \sum_{k=0}^{+\infty} \|\varphi(2^{-k}\xi)f(t,x,\xi)\|_{L^q(I)(L^p_x(L^r_\xi))} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k\varepsilon}\|(1+|\xi|^{\frac{1}{q}+\varepsilon})f^{in}(x,\xi)\|_{L^a_{x,\xi}} \\
&\leq C(\varepsilon)\|(1+|\xi|^{\frac{1}{q}+\varepsilon})f^{in}(x,\xi)\|_{L^a_{x,\xi}}.
\end{aligned}$$

Montrons que la perte de moment $\frac{1}{q}$ est optimale sur $M\times TM$ pour toute variété riemannienne compacte M. Pour cela, on considère la suite de données initiales

$$f_n^{in}(x,\xi) = \mathbb{I}_M(x)\mathbb{I}_{2^n\leq|\xi|\leq 2^{n+1}}(\xi) \quad \text{où} \quad n\in\mathbb{N}.$$

On a

$$\|f\|_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} \sim I^{\frac{1}{q}}\mu(M)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{nd}{r}} \quad \text{et} \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}} \sim \mu(M)^{\frac{1}{a}}2^{\frac{nd}{a}}.$$

La condition $\dfrac{d}{r}=\dfrac{d}{a}+\dfrac{1}{q}$ sur (q,p,r,a) donne l'optimalité de la perte de $\frac{1}{q}$ moment dans les estimations de Strichartz, ce qui termine la preuve du théorème 1. $\square$

Remarque 2 *Concernant l'équation de Schrödinger sur une variété riemannienne compacte, N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov, ont montré dans [5] les estimations de Strichartz suivantes*

$$\|u\|_{L^q_I(L^p(M))} \lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{1}{q}}(M)}.$$

La perte de $\frac{1}{q}$ dérivée est remplacée dans le cadre de l'équation de Liouville par une perte de $\frac{1}{q}$ moment.

La question est maintenant de savoir comment on peut améliorer le théorème 1 en introduisant des hypothèses géométriques supplémentaires sur g.

3.2 Caractérisation des métriques telles que l'estimation de dispersion soit vérifiée.

Dans cette partie, on donne une condition géométrique sur les trajectoires pour que la solution de l'équation de Liouville (2) vérifie la même estimation de dispersion que dans le cas euclidien. Pour cela, on introduit les définitions suivantes.

Définition 2 *Soit $x\in\mathbb{R}^d$, on note $\mathbb{S}_x^{d-1} := \Big\{\xi\in\mathbb{R}^d, \|\xi\|_x = \Big(\sum_{i,j} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j\Big)^{\frac{1}{2}} = 1\Big\}$.*

On note σ_x la mesure de surface $\mathbb{S}_x^{d-1}$. On dit qu'une métrique g est défocalisante si

$$\exists C, \forall (t,x,y)\in\mathbb{R}^{2d+1}, \forall \epsilon>0, \sigma_x\Big\{e\in\mathbb{S}_x^{d-1}, X(t,x,e)\in B(y,\epsilon)\Big\} \leq C\left(\frac{\epsilon}{|t|}\right)^{d-1} \tag{5}$$

c'est-à-dire que les trajectoires vérifient la même condition d'uniformité de propagation dans toutes les directions que dans le cas euclidien.
Sinon, on dit que g est focalisante.

Définition 3 *Soit g une métrique de $\mathbb{R}^d$. On dit que g est dispersive si, d'une part, g est défocalisante et si, d'autre part, la condition suivante sur les trajectoires est vérifiée*

$$\exists C, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \forall \epsilon > 0, \mu\Big\{t \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{S}_x^{d-1}, X(\cdot\,, x, e) \in B(y,\epsilon)\Big\} \leq C\epsilon, \tag{6}$$

où μ est la mesure de Lebesgue.

On obtient les caractérisations suivantes qui montrent que si g est dispersive, alors la même estimation de dispersion que celle obtenue dans le cas euclidien est vérifiée ; et on a une réciproque partielle qui nous dit que si g est focalisante, alors l'estimation de dispersion n'est pas vérifiée. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2 *Soit g une métrique dispersive et f la solution de l'équation de Liouville (2). Alors, on a l'estimation de dispersion suivante*

$$\sup_x \left(\int |f(t,x,\xi)| d\xi \right) \leq C|t|^{-d} \int \sup_\xi (|f^{in}|(x,\xi)) dx.$$

Soit g une métrique focalisante. Alors, il existe une suite de données initiales $(f_n^{in})_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telles que la suite de solutions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'équation (2) avec pour données initiales $(f_n^{in})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$\sup_x \int_\xi |f_n(t_n,x,\xi)| d\xi \geq C \frac{n}{|t_n|^d} \int \sup_\xi |f_n^{in}(x,\xi)| dx.$$

Idée de preuve du théorème 2. La première partie du théorème 2 se montre en considérant d'abord le cas particulier de données initiales $f^{in}(x,\xi) = \mathbb{I}_{B(\alpha_1,r_1)}(x)$ avec $\alpha_1 \in \mathbb{R}^d$ et $r_1 \in \mathbb{R}^+$ pour lesquelles on peut appliquer la notion de métrique dispersive. Le cas général $f^{in} \in L_x^1(L_\xi^\infty)$ se fait par un argument d'approximation. Le second point du théorème 2 se montre en considérant des données initiales f_n^{in} qui se concentrent en espace au voisinage des endroits où les trajectoires se focalisent. □

3.3 Cas des perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives.

Définition 4 *On dit qu'une métrique g est une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne non captive si*

- *les trajectoires sont non captées, i.e. pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{t\to\infty} |X(t,x,\xi)| = +\infty \tag{7}$$

- *la métrique g est une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne, i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall |\alpha| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, |D^\alpha(g^{kl} - \delta_{kl})(x)| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{\varepsilon+|\alpha|}} \tag{8}$$

  où δ_{kl} est le symbole de Kronecker.

Dans le cas où g est non captive avec $g = Id$ en dehors d'un compact, on dit que g est une perturbation à support compact de l'identité non captive.

Pour étudier ces métriques, on procède en trois étapes. D'abord on montre que, en général pour ce type de métriques, l'estimation de dispersion obtenue dans le cas euclidien n'est pas vérifiée. Ensuite, on montre que l'on peut néanmoins établir un effet de moments pour ces métriques. Enfin, on établit des estimations de Strichartz en utilisant l'effet de moments.

3.3.1 Exemple de métrique où l'estimation de dispersion n'est pas vérifiée.

La proposition suivante donne un exemple en dimension 2 de métrique g qui est une perturbation à support compact de l'identité non captive et qui néanmoins est focalisante.

Proposition 2 *Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que*

$$\psi \equiv 1 \quad sur \quad]-\infty, R] \quad et \quad \psi \equiv 0 \quad sur \quad [2R, +\infty[$$

où R est une constante assez grande. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = \frac{1}{2}r^2\psi(r), \quad où \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\Big\}.$$

On note ϕ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans S donné par $\phi(x,y) = (x, y, \frac{1}{2}r^2\psi(r))$.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ la métrique donnée par

$$g_{ij}(x) = \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) | \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors, g est une perturbation à support compact de l'identité non captive et focalisante.

Idée de preuve de la proposition 2. La preuve de cette proposition repose sur l'étude des géodésiques de S. D'abord, en étudiant l'équation des géodésiques sur S, on vérifie que g est bien non captive. Ensuite, on utilise le fait que sur le paraboloïde il existe deux points conjugués, ce qui donne un phénomène de concentration des géodésiques suffisant pour montrer que g est focalisante. □

3.3.2 Effet de moments.

La proposition suivante donne un effet de moments pour la solution de l'équation (2) pour les perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives.

Proposition 3 *Soit g une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne non captive. Soit $R > 0$, et soit γ une fonction dans $\mathcal{D}(B(0,R))$. Alors, il existe $C > 0$ telle que la solution f de l'équation (2) vérifie pour tout $a \geq 1$ l'estimation suivante*

$$\||\xi|^{\frac{1}{a}}\gamma(x)f(t,x,\xi)\|_{L^a_{t,x,\xi}} \leq C\|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

Plusieurs remarques peuvent être faites sur cette proposition.
D'abord, concernant le cas particulier euclidien :

- P.-L. Lions et B. Perthame dans [12] ont montré des effets de moments et de moyenne pour l'équation de transport (voir aussi l'article de B. Perthame [13]).
- La proposition 3 dans le cas euclidien a été utilisée par I. Gasser, P.-E. Jabin et B. Perthame pour l'étude de l'équation de Vlasov-Poisson dans [8].

Ensuite, concernant le cas plus général des perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives :

- Cet effet de moments n'est pas relié à la dimension dans la mesure où la preuve de la proposition 3 est liée au fait que chaque trajectoire ne reste pas longtemps dans un compact ; ce qui ne demande aucune condition d'uniformité de propagation dans toutes les directions sur les trajectoires contrairement à la condition de défocalisation.
- La preuve de cette proposition est effectuée en terme de mesure et ne fait pas intervenir la régularité des trajectoires (X, V). En particulier, avec cette méthode, on obtient formellement (dès que l'on peut définir les trajectoires) un effet de moments local en temps pour des équations de transport avec des termes peu réguliers comme l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi\cdot \nabla_x f + E(t,x)\nabla_\xi f = 0 \\ f(0,x,\xi) = f^{in}(x,\xi). \end{cases}$$

  où $E \in L^p_{[0,T]}(L^\infty_x)$.
- Cet effet de moments est global en temps mais, en contrepartie, il donne un mauvais contrôle sur les petites vitesses. De plus, un effet de moments global en temps contrôlant bien les petites vitesses ne peut pas exister. En effet, sinon on aurait l'estimation suivante

$$\|\gamma(x) f(t,x,\xi)\|_{L^a_{t,x,\xi}} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}} \tag{9}$$

  où $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Cette estimation ne peut pas être vérifiée. Pour voir cela, on utilise la condition d'échelle suivante sur l'équation de Liouville. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et soit f la solution de l'équation de Liouville

$$\begin{cases} \partial_t f + \{H, f\} = 0 \\ f(0,x,\xi) = f^{in}(x,\xi). \end{cases}$$

  Alors $f_\lambda(t,x,\xi) = f(\lambda t, x, \lambda^{-1}\xi)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f_\lambda + \{H, f_\lambda\} = 0 \\ f_\lambda(0,x,\xi) = f^{in}(x,\lambda^{-1}\xi). \end{cases}$$

  On en déduit que si l'inégalité (9) était vérifiée, on aurait pour tout $\lambda > 0$

$$\|\gamma(x) f(t,x,\xi)\|_{L^a_{t,x,\xi}} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}} \lambda^{\frac{1}{a}}$$

  ce qui est absurde.

3.3.3 Estimations de Strichartz.

Dans cette dernière partie, on utilise l'effet de moments établi précédemment pour montrer des estimations de Strichartz pour les perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives. On a les théorèmes suivants

Théorème 3 *Soit g une métrique non captive et soit $R > 0$ tel que g coïncide avec la métrique euclidienne sur ${}^cB(0, R)$. Alors, il existe une constante C telle que la solution f de l'équation de Liouville(2) vérifie*

$$\|f\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \leq C(q, p, r, a)\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi(2^{-j}\xi)f^{in}\|^r_{L^a_{x,\xi}}\Big)^{\frac{1}{r}} \quad \text{où} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$$

pour tout quadruplet admissible (q, p, r, a).

Remarque 3 – *Ce théorème donne une estimation de Strichartz globale en temps. Néanmoins, la norme dans laquelle est estimée la donnée initiale est légèrement affaiblie par rapport au cas euclidien à cause du mauvais contrôle des petites vitesses dans l'effet de moments.*
– *Comme le montre le théorème 2 et la proposition 2, il se peut que pour ce type de métriques, l'estimation de dispersion ne soit pas vérifiée. Ceci met en évidence que le fait d'avoir une estimation de Strichartz globale en temps est une information plus faible que d'avoir une estimation de dispersion.*

Théorème 4 *Soit g une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne non captive. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout intervalle de temps fini I, pour tout quadruplet admissible (q, p, r, a), il existe une constante C telle que la solution f de l'équation de Liouville (2) vérifie*

$$\|f\|_{L^q_I(L^p_x(L^r_\xi))} \leq C\|(1 + |\xi|)^\varepsilon f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

Idée de preuve du théorème 3. L'idée de preuve du théorème 3 est à rapprocher de celle adoptée par N. Burq pour traiter le cas de l'équation de Schrödinger dans [4] (voir aussi G. Staffilani et D. Tataru dans [19]).
Soit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que sur le support de $1-\gamma$, g coïncide avec la métrique euclidienne. On découpe f en deux parties $f = \gamma f + (1 - \gamma)f$.

Etude de $(1 - \gamma)f$. On a la proposition suivante.

Proposition 4 *Soit γ une fonction de troncature telle que $g = Id$ sur le support de $(1 - \gamma)$. Alors, pour tout quadruplet admissible (q, p, r, a), il existe une constante C telle que la solution f de l'équation de Liouville (2) vérifie*

$$\|(1 - \gamma)f\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \leq C\|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}. \tag{10}$$

Preuve de la proposition 4. La fonction $w = (1-\gamma)f$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t w + \{H, w\} = -\Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f \\ \quad w(0,x,\xi) = (1-\gamma) f^{in}(x,\xi). \end{cases}$$

Comme sur le support de w, $g = Id$, la formule de Duhamel donne

$$w(t) = T_{Id}(t)(1-\gamma)f^{in} - \int_0^t T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f(s)ds.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} &\leq \|T_{Id}(t)(1-\gamma)f^{in}\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \\ &+ \Big\|\int_0^t T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))}. \end{aligned} \tag{11}$$

On a

$$\|T_{Id}(t)(1-\gamma)f^{in}\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}. \tag{12}$$

La proposition 4 est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2

$$\Big\|\int_0^t T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

Supposons que le lemme 2 soit vérifié. En utilisant les inégalités (11), (12) et le lemme 2, on obtient

$$\|w\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}$$

ce qui montre la proposition 4. □

Preuve du lemme 2. On utilise le lemme suivant dû à H. F. Smith et C. D. Sogge (voir [18]) qui est une variante du lemme de M. Christ et A. Kiselev (voir [7]).

Lemme 3 *Soient X et Y deux espaces de Banach, et pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on considère un opérateur $K(s,t) : X \to Y$ de X dans Y. Supposons que l'on ait l'estimation suivante*

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}} K(s,t)f(s)ds\Big\|_{L^\ell(\mathbb{R},Y)} \lesssim \|f\|_{L^j(\mathbb{R},X)} \quad \text{avec} \quad 1 \leq j < \ell \leq +\infty.$$

Alors

$$\Big\|\int_{s<t} K(s,t)f(s)ds\Big\|_{L^\ell(\mathbb{R},Y)} \lesssim \|f\|_{L^j(\mathbb{R},X)}.$$

On utilise le lemme 3 avec $j = a$, $\ell = q$, $X = L^a_{x,\xi}$ et $Y = L^p_x(L^r_\xi)$. Les conditions sur les quadruplets (q,p,r,a) assurent que $1 \leq a < q \leq +\infty$. On est donc ramené à montrer que

$$\Big\|\int_0^{+\infty} T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

On a

$$\int_0^{+\infty} T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)ds = T_{Id}(t)\int_0^{+\infty} T_{Id}(-s)\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)ds$$

En appliquant les estimations de Strichartz obtenues pour l'opérateur $T_{Id}(t)$, on obtient que

$$\Big\|\int_0^{+\infty} T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim B$$

avec

$$B = \Big\|\int_0^{+\infty} T_{Id}(-s)\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^a_{x,\xi}}.$$

On utilise un argument de dualité. On a

$$B = \sup_{\phi\in L^{a'}_{x,\xi}, \|\phi\|_{L^{a'}}=1} \int_{x,\xi}\int_{s=0}^{+\infty} T_{Id}(-s)\Big[\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)\Big]\phi dsdxd\xi.$$

On en déduit que

$$B = \sup_{\phi\in L^{a'}_{x,\xi}, \|\phi\|_{L^{a'}}=1} \int_{x,\xi}\int_{s=0}^{+\infty} \Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s) T_{Id}(s)\phi dsdxd\xi.$$

De plus,

$$|\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma| \lesssim |\xi|\chi(x)$$

avec $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi\equiv 1$ dans un voisinage du support de γ. On définit

$$\widetilde{B}_\phi = \Big|\int_{x,\xi}\int_{s=0}^{+\infty} \Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s) T_{Id}(s)\phi dsdxd\xi\Big|.$$

On a

$$\widetilde{B}_\phi \lesssim \int_{x,\xi}\int_{s=0}^{+\infty} |\xi\chi(x) f(s) T_{Id}(s)\phi| dsdxd\xi.$$

Avec les inégalités de Hölder, on obtient que

$$\widetilde{B}_\phi \lesssim \Big\||\xi|^{\frac{1}{a'}}\chi(x) T_{Id}(s)\phi\Big\|_{L^{a'}_{t,x,\xi}} \Big\||\xi|^{\frac{1}{a}}\chi(x) f(s)\Big\|_{L^a_{t,x,\xi}}.$$

Avec la proposition 3, on obtient

$$\widetilde{B}_\phi \lesssim \|\phi\|_{L^{a'}_{x,\xi}}\|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}$$

ce qui montre que

$$\Big\|\int_0^{+\infty} T_{Id}(t-s)\Big(\nabla_\xi H\cdot \nabla_x\gamma\Big) f(s)ds\Big\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \lesssim \|f^{in}\|_{L^a_{x,\xi}}$$

et le lemme 2 est prouvé. □

Etude de γf. Soit $h \in]0,1]$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Dans la mesure où, sur le support de γ, on n'a presque aucune information sur la géométrie liée à g, l'idée est de découper la solution γf en temps sur des intervalles $[h\ell, h\ell + h]$ et en vitesse sur des couronnes de taille h^{-1} ; où sur chaque morceau, on ne voit pas la géométrie liée à g. Ceci nous permet d'utiliser les estimations de Strichartz localisées en temps et en vitesse données par le lemme 1. La fonction $v = \gamma f$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v + \{H, v\} = \Big(\nabla_\xi H \cdot \nabla_x \gamma\Big) f \\ v(0, x, \xi) = \gamma f^{in}(x, \xi). \end{cases}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(]-1, 2[)$ valant 1 sur $[0, 1]$.
On définit

$$v_h = \psi(h^2 H(x, \xi))v \quad \text{et} \quad v_{h,\ell} = \varphi(\frac{t}{h} - \ell)v_h.$$

La fonction $v_{h,\ell}$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v_{h,\ell} + \{H, v_{h,\ell}\} = \beta_{h,\ell} \\ v_{h,\ell}(h\ell - h, x, \xi) = 0. \end{cases}$$

où

$$|\beta_{h,\ell}(t, x, \xi)| \le C|\xi\widetilde{\varphi}(\frac{t}{h} - \ell)f(t, x, \xi)\widetilde{\gamma}(x)|$$

et où $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(]-2, 3[)$. On peut donc contrôler $\beta_{h,\ell}$ avec l'effet de moments donné par la proposition 3. Après quelques calculs, on obtient que

$$\|\gamma(x)f\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \le C(q, p, r, a)\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi(2^{-j}\xi)f^{in}\|^r_{L^a_{x,\xi}}\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{13}$$

En sommant les inégalités (10) et (13), on obtient le théorème 3. □

Remarque 4 *De nombreuses estimations de Strichartz ont été démontrées pour le modèle quantique associé à une métrique asymptotiquement plate. Le cas des perturbations à longue portée de la métrique euclidienne non captives a été traité par N. Burq dans [4] et J.-M Bouclet et N. Tzvetkov dans [3]. L. Robbiano et C. Zuily dans [14] ont étudié le cas des perturbations à courte portée de la métrique euclidienne non captives. A. Hassell, T. Tao et J. Wunsch dans [10] se sont intéressés au cas des variétés coniques asymptotiquement plates. Enfin, G. Staffilani et D. Tataru ont traité le cas de métriques peu régulières [19].*

Références

[1] H. Bahouri and J.-Y. Chemin. Équations d'ondes quasilinéaires et estimations de Strichartz. *Amer. J. Math.*, 121(6) :1337–1377, 1999.

[2] C. Bardos and P. Degond. Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(2) :101–118, 1985.

[3] J. M. Bouclet and N. Tzvetkov. Strichartz estimates for long range perturbation. *Preprint*.

[4] N. Burq. Estimations de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l'opérateur de Schrödinger. *Séminaire E.D.P de l'Ecole polytechnique*, 2001-2002.

[5] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126(3) :569–605, 2004.

[6] F. Castella and B. Perthame. Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(6) :535–540, 1996.

[7] M. Christ and A. Kiselev. Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, 179(2) :409–425, 2001.

[8] I. Gasser, P.-E. Jabin, and B. Perthame. Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 130(6) :1259–1273, 2000.

[9] F. Golse and L. Saint-Raymond. Velocity averaging in L^1 for the transport equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(7) :557–562, 2002.

[10] A. Hassell, T. Tao, and J. Wunsch. A Strichartz inequality for the Schrödinger equation on nontrapping asymptotically conic manifolds. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(1-3) :157–205, 2005.

[11] P.-L. Lions and B. Perthame. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.*, 105(2) :415–430, 1991.

[12] P.-L. Lions and B. Perthame. Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(11) :801–806, 1992.

[13] B. Perthame. Mathematical tools for kinetic equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 41(2) :205–244 (electronic), 2004.

[14] L. Robbiano and C. Zuily. Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (101-102) :vi+208, 2005.

[15] D. Salort. Dispersion and strichartz estimates for the Liouville equation. *Preprint*, 2005.

[16] D. Salort. The Schrödinger equation type with a nonelliptic operator. *Soumis.*, 2005.

[17] D. Salort. Weighted dispersion and Strichartz estimates for the Liouville equation in one dimension. *Asymptotic Analysis*, 47(1,2) :85–94, 2006.

[18] H. F. Smith and C. D. Sogge. Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(11-12) :2171–2183, 2000.

[19] G. Staffilani and D. Tataru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(7-8) :1337–1372, 2002.