SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2004-2005

Thomas Alazard

Alentours de la limite incompressible

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° XXIII, 16 p.
<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A23_0>

ALENTOURS DE LA LIMITE INCOMPRESSIBLE

THOMAS ALAZARD

Le résultat principal de cet exposé énonce que le problème de Cauchy pour les équations adimensionnées d'un fluide général est bien posé sur un intervalle de temps indépendant des nombres de Mach, Reynolds et Péclet.

1. Introduction

L'étude mathématique de la limite incompressible remonte aux travaux de Klainerman et Majda [24, 25], et Schochet [34]. Le contexte général est l'analyse d'un système dépendant d'un petit paramètre ε, qui est le nombre de Mach. Pour les équations d'Euler, après mise à l'échelle convenable, les équations sont de la forme

$$\begin{cases} r(\partial_t p + v \cdot \nabla p) + \varepsilon^{-1} \operatorname{div} v = 0, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \varepsilon^{-1} \nabla p = 0, \\ \partial_t \sigma + v \cdot \nabla \sigma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Les inconnues sont la pression p, la vitesse v et l'entropie σ. Les coefficients r et ρ sont des fonctions régulières de εp et σ, strictement positives. L'étude se fait en deux temps. On cherche d'abord à montrer l'existence des solutions sur un intervalle de temps indépendant de ε via l'obtention d'estimations uniformes. Ensuite, on cherche à caractériser les limites de p, v, σ quand $\varepsilon \to 0$ comme solutions d'un système limite. On trouve dans les articles cités des résultats dans le cas des équations isentropiques ($\sigma = 0$) ou dans le cas de données initiales préparées ($\sigma_0 = O(\varepsilon)$). Récemment, Métivier et Schochet [31, 33] ont étendu l'analyse du système (1) au cas de données initiales générales ($\sigma_0 = O(1)$). Un des phénomènes nouveaux est que le système linéarisé n'est pas uniformément stable. Il est donc remarquable que l'on puisse obtenir des estimations uniformes dans $C^0([0,T]; H^s)$, où $s > 1 + d/2$ et T est indépendant de ε.

Dans cet exposé, nous nous proposons de reprendre le problème pour les équations complètes de la dynamique des fluides. Nous sommes conduits à étudier un système $L(u, \partial)u + \varepsilon^{-1} S(u, \partial_x)u = 0$, où L est mixte hyperbolique/parabolique et S est non-antisymétrique et non-linéaire. Cela change la nature du système limite. La contrainte $S(u, \partial_x)u = 0$ implique une relation qui donne la divergence du champ de vitesse en fonction de la température. Les calculs formels sont bien connus, on renvoie au mémoire de Majda [29] et à l'introduction du livre de P.-L. Lions [26]. On souhaite précisément commencer une justification rigoureuse de ces études.

2. Les équations

On s'intéresse aux équations adimensionnées d'un fluide général :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \dfrac{\nabla P}{\varepsilon^2} = \mu \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho v e) + P \operatorname{div} v = \kappa \operatorname{div}(k \nabla T), \end{cases} \tag{2}$$

où $\mu \in [0,1]$ est l'inverse du nombre de Reynolds, $\kappa \in [0,1]$ l'inverse du nombre de Péclet et $\varepsilon \in]0,1]$ le nombre de Mach. Les inconnues sont : la densité ρ, la vitesse v, la pression P, la température T et l'énergie e. Le tenseur τ est donné par $\tau := \zeta(\nabla v + (\nabla v)^t) + \eta(\operatorname{div} v) I_d$. Par hypothèses les coefficients de Lamé ζ et η, et le coefficient de conductivité thermique k sont des fonctions C^∞ de (P,T), vérifiant $\zeta > 0$, $k > 0$ et $2\zeta + \eta > 0$.

Les variables thermodynamiques ρ, P, T, e sont reliées entre elles par des relations d'état. Par exemple, pour les gaz parfaits, $P = R\rho T$ et $e = C_V T$ $(R, C_V \in \mathbb{R}_+^*)$. Dans ce cas, comme on ne considère que les solutions classiques, le système (2) est équivalent à :

$$\begin{cases} \partial_t P + v \cdot \nabla P + \gamma P \operatorname{div} v = (\gamma - 1)\kappa \operatorname{div}(k \nabla T), \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \dfrac{\nabla P}{\varepsilon^2} = \mu \operatorname{div} \tau, \\ \rho C_V(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + P \operatorname{div} v = \kappa \operatorname{div}(k \nabla T), \end{cases} \tag{3}$$

où $\gamma = 1 + R/C_V$. Dans le cas de gaz généraux, le triplet (P, v, T) vérifie un système d'équations semblable à (3), où les constantes R, C_V et γ doivent être remplacées par des coefficients qui dépendent de P et T.

Nous considérons le cas des solutions régulières associées à des données non préparées pouvant donner lieu à des variations de taille $O(1)$ sur la température T. Concernant la pression, le cas général est celui qui autorise des variations de taille $O(\varepsilon^{-1})$ sur $\partial_t v$. Ce qui conduit à chercher $P = P(t,x)$ sous la forme $\underline{P} + \varepsilon P_1(t,x)$ où $\underline{P}$ est une constante positive. Pour tenir compte de la positivité de la pression, on posera plutôt $P = \underline{P} e^{\varepsilon p}$. De façon analogue, on cherche T sous la forme $T = \underline{T} e^{\theta}$. Dans toute la suite, l'inconnue est (p, v, θ) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

On vérifie facilement que (p, v, θ) vérifie un système de la forme :

$$\begin{cases} g_1(\partial_t p + v \cdot \nabla p) + \dfrac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} v = \dfrac{\kappa}{\varepsilon} \beta_1 \operatorname{div}(\beta \nabla \theta), \\ g_2(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \dfrac{1}{\varepsilon} \nabla p = \mu B(\partial_x) v, \\ g_3(\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta) + \operatorname{div} v = \kappa \beta_3 \operatorname{div}(\beta \nabla \theta), \end{cases} \tag{4}$$

où les coefficients g_i, β_i, β, sont des fonctions C^∞ de θ et εp :

$$g_i := G_i(\theta, \varepsilon p), \quad \beta_i := b_i(\theta, \varepsilon p), \quad \beta := b(\theta, \varepsilon p).$$

Pour simplifier les notations de l'exposé, on posera, par abus, $B(\partial_x) = \Delta$.

On s'intéresse à la limite $\varepsilon \to 0$ des solutions régulières de (4). Le but est de les comparer aux solutions du système

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = \kappa\beta_1 \operatorname{div}(\beta\nabla\underline{\theta}), \\ g_2(\partial_t \underline{v} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}) + \nabla\pi = \mu\Delta\underline{v}, \\ g_3(\partial_t\underline{\theta} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\theta}) = \kappa(\beta_3 - \beta_1)\operatorname{div}(\beta\nabla\underline{\theta}), \end{cases} \tag{5}$$

où les coefficients sont évalués en $(\underline{\theta}, 0)$. Notons que la limite incompressible ($\operatorname{div} \underline{v} = 0$) est un cas particulier de la limite $\varepsilon \to 0$. On le rencontre dans les régimes adiabatiques où $\kappa\nabla\underline{\theta} = 0$. Ce qui couvre les équations d'Euler, de Navier–Stokes isentropiques, et le cas de données préparées ($\theta_0 = O(\varepsilon)$).

3. Enoncés des résultats

3.1. **Hypothèses.** On suppose désormais que :

H1. Les fonctions G_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) et b appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et sont strictement positives. De plus, $b_1 < b_3$.

H2. Il existe S et ϱ tels que $(\theta, p) \mapsto (S(\theta, p), p)$ et $(\theta, p) \mapsto (\theta, \varrho(\theta, p))$ sont des difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, $S(0,0) = \varrho(0,0) = 0$ et

$$G_1 \frac{\partial S}{\partial\theta} = -G_3\frac{\partial S}{\partial p} > 0, \qquad G_1 b_3 \frac{\partial\varrho}{\partial\theta} = -G_3 b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial p} < 0.$$

L'hypothèse fondamentale est $b_1 < b_3$. Cela joue un rôle important dans la démonstration des estimations d'énergie. Cette hypothèse est naturelle, elle signifie juste que la température limite $\underline{\theta}$ vérifie une équation parabolique.

Le changement d'inconnues $(\theta, p) \mapsto (S(\theta, p), p)$ permet, dans le cas $\mu = \kappa = 0$, de se ramener au système (1) : si (p, v, θ) est une solution régulière de (4) avec $\kappa = 0$, alors $\sigma := S(\theta, \varepsilon p)$ vérifie $\partial_t\sigma + v\cdot\nabla\sigma = 0$. Le second changement d'inconnues permet d'écrire le système (4) sous forme mixte hyperbolique/parabolique symétrique. Ce qui assure que le problème de Cauchy pour (4) est bien posé à ε, μ, κ fixés.

Ces hypothèses sont vérifiées par les systèmes physiques.

3.2. **Stabilité uniforme.** Pour simplifier la présentation, on se limite au cas où la variable d'espace appartient à l'espace entier. La problématique pour les fonctions périodiques est en fait plus simple.

Dans toute la suite, on note

$$a := (\varepsilon, \mu, \kappa) \in A :=]0,1] \times [0,1] \times [0,1].$$

Théorème 3.1. *Soit $\mathbb{N} \ni s > 1 + 3/2$. Pour toute partie bornée $\mathbb{B}_0$ de $H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ il existe $T > 0$ et une partie bornée $\mathbb{B}$ de $C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^3))$ tels que pour tout $a \in A$ et pour toute donnée initiale $(p_0, v_0, \theta_0) \in \mathbb{B}_0$, le problème de Cauchy pour* (4) *admet une unique solution $(p, v, \theta) \in \mathbb{B}$.*

Remarque 3.2. Ce résultat est vrai en dimension $d \geqslant 3$ (avec $s > 1 + d/2$). Il est vrai pour $d \geqslant 1$ quelconque si on suppose que β_1 ne dépend pas de θ. Cette propriété est vérifiée par les gaz parfaits. En effet, en partant de (3) et en écrivant $\partial_t P = \underline{P}e^{\varepsilon p}(\varepsilon\partial_t)p$, on trouve $\beta_1 = (\gamma - 1)/(\gamma \underline{P} e^{\varepsilon p})$.

On présente aussi un résultat plus fort, avec une regularité additionnelle sur ∇p et $\operatorname{div} v$. Un point important est également que l'on considère des données de Cauchy (p_0, v_0) qui ne sont pas nécessairement uniformément bornées dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Notation 3.3. En s'inspirant de R. Danchin [10], on utilisera les normes

$$\|u\|_{H^{\sigma+1}_\alpha} := \|u\|_{H^\sigma} + \alpha \|u\|_{H^{\sigma+1}}.$$

Définition 3.4. *Soit $a := (\varepsilon, \mu, \kappa) \in [0,1]^3$. Posons $\nu := \sqrt{\mu+\kappa}$. On notera $\mathcal{H}^s_{a,0}$ l'espace des fonctions $(p_0, v_0, \theta_0) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ telles que*

$$\|(p_0, v_0, \theta_0)\|_{\mathcal{H}^s_{a,0}} := \|(\nabla p_0, \nabla v_0)\|_{H^{s-1}} + \|(\theta_0, \varepsilon p_0, \varepsilon v_0)\|_{H^{s+1}_\nu} < +\infty.$$

Définition 3.5. *Soit $T > 0$, $a := (\varepsilon, \mu, \kappa) \in [0,1]^3$. Posons $\nu := \sqrt{\mu+\kappa}$. Notons $\mathcal{H}^s_a(T)$ l'espace des fonctions $U = (p, v, \theta) \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^3))$, à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, telles que*

$$\nu(p, v, \theta) \in C^0([0,T]; H^{s+1}), \quad \mu v \in L^2(0,T; H^{s+2}), \quad \kappa\theta \in L^2(0,T; H^{s+2}).$$

L'espace $\mathcal{H}^s_a(T)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned}\|(p,v,\theta)\|_{\mathcal{H}^s_a(T)} := {} & \|(\nabla p, \nabla v)\|_{L^\infty_T H^{s-1}} + \|(\theta, \varepsilon p, \varepsilon v)\|_{L^\infty_T H^{s+1}_\nu} \\ & + \sqrt{\mu}\,\|\nabla v\|_{L^2_T H^{s+1}_{\varepsilon\nu}} + \sqrt{\kappa}\,\|\nabla \theta\|_{L^2_T H^{s+1}_\nu} \\ & + \sqrt{\mu+\kappa}\,\|\nabla p\|_{L^2_T H^s} + \sqrt{\kappa}\,\|\operatorname{div} v\|_{L^2_T H^s},\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{L^p_T X}$ est la norme de $L^p(0,T;X)$.

Dans l'énoncé qui suit, $B(X, M)$ désigne la boule de X centrée en 0 et de rayon M.

Théorème 3.6. *Soit $\mathbb{N} \ni s > 1 + 3/2$. Pour tout $M_0 > 0$, il existe $T > 0$ et $M > 0$, tels que pour tout $a \in A$ et pour toute donnée initiale (p_0, v_0, θ_0) dans $B(\mathcal{H}^s_{a,0}, M_0)$, le problème de Cauchy pour (4) admet une unique solution (p, v, θ) dans $B(\mathcal{H}^s_a(T), M)$.*

On conclut cette partie en précisant la “portée” du théorème 3.6.

Remarque 3.7. Le théorème 3.6 implique le théorème 3.1.

Remarque 3.8. L'intérêt de pousser l'analyse pour obtenir un résultat de stabilité uniforme sans contrôle de la norme L^2_x de (p, v) est de pouvoir couvrir l'exemple intéressant des équations de la combustion données par Majda dans [29]. En effet, le théorème 3.6 reste vrai (alors que le théorème 3.1 est faux) si on remplace la première équation de (4) par

$$g_1(\partial_t p + v \cdot \nabla p) + \varepsilon^{-1} \operatorname{div} v = \kappa \varepsilon^{-1} \beta_1 \operatorname{div}(k \nabla \theta) + \varepsilon^{-1} f,$$

où $f = f(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+; H^\infty(\mathbb{R}^3))$ est une fonction donnée.

Remarque 3.9. Enfin, il semble que le théorème 3.6 est vrai en dimension $d = 1$, et aussi en dimension $d = 2$ sous l'hypothèse technique supplémentaire que $\|\langle x \rangle^2 \theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ est plus petit qu'une certaine constante (universelle).

3.3. **Passage à la limite.** Il existe de nombreux travaux consacrés à l'étude de la limite incompressible des équations de Navier-Stokes isentropiques. Citons les travaux de Lions et Masmoudi [27, 28], Desjardins et Grenier [14] (voir aussi [15] et [6]) dans le cas des solutions faibles; ceux de Danchin [10, 11] pour des solutions fortes à régularité minimale. Citons aussi le résultat récent de Dutrifoy et Hmidi [16] pour les équations d'Euler isentropiques en dimension 2 avec des données particulièrement mal préparées (autorisant les poches de tourbillons). Les résultats de convergence quand ε tend vers 0 s'appuient, entre autres, sur des techniques de filtrage [17, 20, 35], de scattering [22] ou d'estimations de Strichartz. On renvoie aux textes de revues de Danchin [13], Gallagher [18] et Schochet [36].

Pour les équations d'Euler non-isentropiques (1) et pour les équations complètes (4), l'équation d'onde sous-jacente est à coefficients variables. Les techniques citées ne s'appliquent plus, au moins directement. Cependant, une fois obtenues l'existence des solutions et les estimations uniformes, le passage à la limite dans $\mathbb{R}^d$ s'écrit sans trop de difficultés en utilisant le théorème suivant de décroissance de l'énergie locale pour des équations d'ondes à coefficients lentement variables.

Théorème 3.10 (Métivier & Schochet [31])**.** *Soit $T > 0$ et deux suites a^ε et b^ε de fonctions positives, bornées dans $C^0([0,T]; H^\sigma(\mathbb{R}^d))$, avec $\sigma > 1 + d/2$, et convergeant dans $C^0([0,T]; H^\sigma_{loc}(\mathbb{R}^d))$ vers des limites a, b vérifiant*

$$|a(t,x) - \underline{a}| \leqslant K\,|x|^{-1-\gamma}\,, \quad |\nabla a(t,x)| \leqslant K\,|x|^{-2-\gamma}\,,$$
$$|b(t,x) - \underline{b}| \leqslant K\,|x|^{-1-\gamma}\,, \quad |\nabla b(t,x)| \leqslant K\,|x|^{-2-\gamma}\,,$$

pour des constantes $\underline{a}$, $\underline{b}$, K, γ strictement positives.

Si u^ε est une suite bornée dans $C^0([0,T]; H^2(\mathbb{R}^d))$ telle que

$$\varepsilon^2 \partial_t(a^\varepsilon \partial_t u^\varepsilon) - \operatorname{div}(b^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \ \textit{dans}\ L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)),$$

alors $u^\varepsilon \to 0$ dans $L^2(0,T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^d))$.

On renvoie à [2, 3] pour l'application de ce théorème au système (4). Les sections suivantes expliquent les étapes principales de la démonstration du théorème 3.6 de stabilité uniforme, les détails sont dans [2, 3].

4. Sur la démonstration du théorème 3.6

Pénalisation antisymétrique. Commençons par rappeler pourquoi l'on a des estimations uniformes en ε pour un système de la forme :

$$\partial_t u + \sum A_j(u)\partial_j u + \varepsilon^{-1} S u = 0, \quad S := \sum S_j \partial_j,$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$, $A_j(u) = A_j(u)^t$ et $S_j = S_j^t$, en sorte que $S = -S^*$.

Posons $\widetilde{u} := \Lambda^s u$, où $\Lambda^s := (I - \Delta)^{s/2}$ et $s > d/2 + 1$, qui vérifie

$$\partial_t \widetilde{u} + \sum A_j(u)\partial_j \widetilde{u} + \varepsilon^{-1} S(\partial_x)\widetilde{u} = f,$$

avec $f := \sum [A_j(u), \Lambda^s]\partial_j u$.

Comme $S=-S^*$ on a une estimation L^2 indépendante de ε :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{u}\right\|_{L^2}^2=\sum\langle\,(\partial_j A_j(u))\widetilde{u},\,\widetilde{u}\,\rangle+\langle\,f\,,\widetilde{u}\,\rangle.$$

On vérifie facilement que $\left\|\partial_j A_j(u)\right\|_{L^\infty}+\left\|f\right\|_{L^2}\leqslant C(\left\|u\right\|_{H^s})$ où la fonction C est indépendante de ε. Ainsi, le lemme de Gronwall implique directement des estimations en norme H^s uniformes en ε.

Cadre non-isentropique. La situation est différente si l'opérateur de pénalisation est à coefficients variables. Considérons le système

$$A_0(t,x)\partial_t u+\sum A_j(u)\partial_j u+\varepsilon^{-1}Su=0, \tag{6}$$

où A_0 est symétrique définie positive. Les matrices A_j et l'opérateur S sont comme précédemment. Ce cas correspond aux équations non-isentropiques avec données générales (puisque les coefficients g_i dépendent de $\theta=O(1)$).

On dispose toujours, et de façon directe, d'une estimation L^2 sur la solution $\widetilde{u}$ de

$$A_0(t,x)\partial_t\widetilde{u}+\sum A_j(u)\partial_j\widetilde{u}+\varepsilon^{-1}S\widetilde{u}=f. \tag{7}$$

La question qui se pose est d'en déduire des estimations sur $\Lambda^s u$. On ne peut plus obtenir des estimations uniformes dans $C^0([0,T];H^s)$ en commutant simplement les équations avec Λ^s et en utilisant l'estimation L^2 sur (7). Le commutateur $[A_0,\Lambda^s]\partial_t u$ est un terme singulier en ε, incontrôlable. Ceci reflète l'instabilité du problème linéarisé [1] (cf [31, 32]). Le point délicat est d'obtenir des estimations sur la composante pénalisée Su. Dans [31] ces estimations sont obtenues en commutant les équations avec des opérateurs à poids (d'où le lien avec [4]). On peut aussi penser à une stratégie plus commune, qui a pour avantage de s'appliquer dans les domaines à bords [1, 21, 34, 37]. L'idée est de commencer par estimer les dérivées en temps, puis d'utiliser la structure des équations pour estimer les dérivées spatiales. On explique brièvement la démarche pour le système (6). Les dérivées $(\varepsilon\partial_t)^k$ et Λ^s sont liées par les estimations suivantes, qui se montrent par récurrence,

$$\forall k\leqslant s\in]d/2+1,+\infty[,\qquad \left\|(\varepsilon\partial_t)^k u\right\|_{H^{s-k}}\leqslant C(\left\|u\right\|_{H^s}). \tag{8}$$

Posons $\widetilde{u}:=(\varepsilon\partial_t)^s u$. Les estimations précédentes montrent que $\widetilde{u}$ vérifie (7) avec [2] $\left\|f\right\|_{L^2}\leqslant C(\left\|u\right\|_{H^s})$. L'équation (6) permet d'écrire $(\varepsilon\partial_t)^s u$ sous la forme $A_0^{-1}(\varepsilon\partial_t)^{s-1}Su$ plus un reste $O(\varepsilon)$. Quitte à supposer ε petit, cela nous donne une estimation L^2 de $(\varepsilon\partial_t)^{s-1}Su=S(\varepsilon\partial_t)^{s-1}u$. Pour faciliter la discussion, supposons que S est elliptique. Puisque S est d'ordre 1, on a une estimation de $(\varepsilon\partial_t)^{s-1}u$ dans H^1. Par récurrence, on estime $(\varepsilon\partial_t)^k u$ dans H^{s-k}, et donc u dans H^s. Ce procédé s'applique aux équations (4) via de nombreuses modifications détaillées à la section 6.

[1] Des problèmes analogues se retrouvent dans plusieurs domaines de mécanique des fluides : citons juste Gallagher et Saint-Raymond [19], Majdoub et Paicu [30] (fluides en rotations inhomogènes), Benzoni, Danchin et Descombes [4] (problème avec une perte de dérivée), Cheverry [9], Bresch, Gérard-Varet et Grenier [8].

[2] Le point le plus important est $[A_0,(\varepsilon\partial_t)^s]\partial_t u=O(1)$, car $\varepsilon\partial_t A_0=O(\varepsilon)$.

Les équations complètes. Pour le système complet (4), une autre partie nécessite des modifications. Ce système s'écrit $L(u,\partial)u+\varepsilon^{-1}S(u,\partial_x)u=0$, avec

$$S := \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{div} & \kappa\beta_1 \operatorname{div}(\beta\nabla\cdot) \\ \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient β_1 pouvant dépendre de θ, on ne pourra pas établir des estimations sur le système $L(u,\partial)\widetilde{u}+\varepsilon^{-1}S(u,\partial_x)\widetilde{u}=f$. L'idée est de considérer une variante "linéaire". Le procédé consiste à écrire :

$$\beta_1 \operatorname{div}(\beta\nabla\theta) = \operatorname{div}(\beta_1\beta\nabla\theta) - \nabla\beta_1\cdot\beta\nabla\theta,$$

pour réécrire le système (4) sous la forme

$$\begin{cases} g_1(\partial_t p + v\cdot\nabla p) + \dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} v = \dfrac{\kappa}{\varepsilon}\operatorname{div}(k_1\nabla\theta) + \dfrac{\kappa}{\varepsilon}F(\theta,\varepsilon p), \\ g_2(\partial_t v + v\cdot\nabla v) + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla p = \mu\Delta v, \\ g_3(\partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta) + \operatorname{div} v = \kappa\beta_3\operatorname{div}(\beta\nabla\theta), \end{cases}$$

où $k_1=\beta_1\beta$ et $F(\theta,\varepsilon p) = -\nabla\beta_1\cdot\beta\nabla\theta$.

On verra à la section suivante que cette réecriture est utile car on peut établir une estimation de type L^2 pour la solution $(\widetilde{p},\widetilde{v},\widetilde{\theta})$ du système :

$$\begin{cases} g_1\big(\partial_t\widetilde{p} + v\cdot\nabla\widetilde{p}\big) + \dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\widetilde{v} - \dfrac{\kappa}{\varepsilon}\operatorname{div}(k_1\nabla\widetilde{\theta}) = f_1, \\ g_2\big(\partial_t\widetilde{v} + v\cdot\nabla\widetilde{v}\big) + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\widetilde{p} - \mu\Delta\widetilde{v} = f_2, \\ g_3\big(\partial_t\widetilde{\theta} + v\cdot\nabla\widetilde{\theta}\big) + \operatorname{div}\widetilde{v} - \kappa\beta_3\operatorname{div}(\beta\nabla\widetilde{\theta}) = f_3. \end{cases}$$

Dans les estimations des dérivées, on verra $\kappa\varepsilon^{-1}F(\theta,\varepsilon p)$ comme un terme source. Il n'est pas inutile d'expliquer pourquoi on peut voir ce terme de taille $O(\varepsilon^{-1})$ comme un terme source.

– Trivialement, voir $\kappa\varepsilon^{-1}\nabla\beta_1\cdot\beta\nabla\theta$ comme un terme source n'est pas surprenant si $\nabla\beta_1 = O(\varepsilon)$, ce qui arrive si β_1 ne dépend que de εp (cas des gaz parfaits), d'où la remarque 3.2.

– Pour les gaz généraux, β_1 dépend aussi de θ. Cela ne gène pas car les seuls opérateurs qui agiront sur les équations sont

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{HF}} := (I-J_{\varepsilon\nu})\Lambda^s \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}^{\ell}_{\mathrm{BF}} := J_{\varepsilon\nu}\Lambda^{s-\ell}(\varepsilon\partial_t)^{\ell} \quad (\text{avec} \quad 1\leqslant \ell\leqslant s),$$

où $J_{\varepsilon\nu} = \jmath(\varepsilon\nu D_x)$ avec $\jmath\in C_0^\infty$, $\jmath(0)=1$, et $\nu=\sqrt{\mu+\kappa}$. Dans le régime hautes fréquences (HF), on peut gagner un facteur $\varepsilon\nu$ quitte à perdre une dérivée (pour la regagner on utilise les effets régularisants additionnels sur $\nu\nabla p$ et $\nu\operatorname{div} v$). Dans le régime basses fréquences (BF), on peut aussi regagner un facteur ε : $(\varepsilon\partial_t)[\varepsilon^{-1}\nabla\beta_1\cdot\beta\nabla\theta] = O(1)$ car $\partial_t\theta = O(1)$.

– Le fait que l'on puisse considérer des termes sources de la forme $\varepsilon^{-1}f(t,x,\theta,\nabla\theta)$ est la raison pour laquelle l'analyse qui suit s'appliquent aussi aux équations de la combustion (comme annoncé dans la remarque 3.8).

5. Estimation L^2

Il existe de nombreuses symétrisations des équations de Navier-Stokes, citons juste Danchin [12], Kawashima et Shizuta [23]. Mentionnons aussi que Bresch et Desjardins [5] ont établi une identité remarquable qui ouvre la voie pour une étude des solutions faibles des équations avec viscosité et conduction thermique.

L'approche proposée ici diffère des approches antérieures par : le but (nous cherchons des estimations indépendantes de ε, μ et κ) et le choix des variables (qui effectivement joue un rôle).

Soit $d \geqslant 1$ (quelconque), $a = (\varepsilon, \mu, \kappa) \in A$ et un temps $T \in]0, 1]$. On présente une estimation de type L^2 pour la solution $(\widetilde{p}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta})$ du système :

$$\begin{cases} G_1(\phi)\big(\partial_t \widetilde{p} + v \cdot \nabla \widetilde{p}\big) + \dfrac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \widetilde{v} - \dfrac{\kappa}{\varepsilon} \operatorname{div}(k_1(\phi) \nabla \widetilde{\theta}) = F_1, \\ G_2(\phi)\big(\partial_t \widetilde{v} + v \cdot \nabla \widetilde{v}\big) + \dfrac{1}{\varepsilon} \nabla \widetilde{p} - \mu \Delta \widetilde{v} = F_2, \\ G_3(\phi)\big(\partial_t \widetilde{\theta} + v \cdot \nabla \widetilde{\theta}\big) + \operatorname{div} \widetilde{v} - \kappa k_3(\phi) \Delta \widetilde{\theta} = F_3. \end{cases} \tag{9}$$

Il suffira de prouver des estimations *a priori*. On suppose que l'inconnue $(\widetilde{p}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta})$, les coefficients $\phi = \phi(t, x) \in \mathbb{R}^2$ et $v = v(t, x) \in \mathbb{R}^d$, ainsi que les termes sources F_1, F_2, F_3 appartiennent à $C^0([0, T]; H^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Hypothèses 5.1. Les fonctions G_i sont C^∞ et positives. Les fonctions k_1 et k_3 sont C^∞ et vérifient $0 < k_1 < k_3$.

Remarque 5.2. L'hypothèse $k_1 < k_3$ est l'analogue directe de l'hypothèse $b_1 < b_3$. La condition de signe $k_1 > 0$ donne l'effet régularisant sur $\sqrt{\kappa} \operatorname{div} v$.

Posons $\nu := \sqrt{\mu + \kappa}$ et utilisons la notation $\|u\|_{H^{\sigma+1}_\alpha} := \|u\|_{H^\sigma} + \alpha \|u\|_{H^{\sigma+1}}$. Nous allons contrôler la norme

$$\begin{aligned} \|(\widetilde{p}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta})\|_{a,T} &:= \sup_{t \in [0,T]} \big\{ \|(\widetilde{p}(t), \widetilde{v}(t))\|_{H^1_{\varepsilon\nu}} + \|\widetilde{\theta}(t)\|_{H^1_\nu} \big\} + \\ &+ \left(\int_0^T \mu \|\nabla \widetilde{v}\|^2_{H^1_{\varepsilon\nu}} + \kappa \|\nabla \widetilde{\theta}\|^2_{H^1_\nu} + \kappa \|\operatorname{div} \widetilde{v}\|^2_{L^2} + (\mu + \kappa) \|\nabla \widetilde{p}\|^2_{L^2} \, dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

en fonction de la norme suivante de la donnée initiale

$$\|(\widetilde{p}_0, \widetilde{v}_0, \widetilde{\theta}_0)\|_{a,0} := \|(\widetilde{p}(0), \widetilde{v}(0))\|_{H^1_{\varepsilon\nu}} + \|\widetilde{\theta}(0)\|_{H^1_\nu}.$$

Théorème 5.3. *Supposons que* (9) *vérifie l'hypothèse 5.1 et posons*

$$R_0 := \|\phi(0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad R := \sup_{t \in [0,T]} \|(\phi, \partial_t \phi, \nabla \phi, \nu \nabla^2 \phi, v, \nabla v)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Il existe une constante C_0 ne dépendant que de R_0 et une constante C ne dépendant que de R telles que

$$\|(\widetilde{p}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta})\|_{a,T} \leqslant C_0 e^{TC} \|(\widetilde{p}_0, \widetilde{v}_0, \widetilde{\theta}_0)\|_{a,0} + C \int_0^T \|(F_1, F_2)\|_{H^1_{\varepsilon\nu}} + \|F_3\|_{H^1_\nu} \, dt.$$

Les étapes principales de la démonstration du théorème 5.3 sont données sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \partial_t p + \varepsilon^{-1} \operatorname{div} v - \varepsilon^{-1} \Delta\theta = 0, \\ \partial_t v + \varepsilon^{-1} \nabla p = 0, \\ \partial_t \theta + \operatorname{div} v - \beta \Delta\theta = 0, \end{cases}$$

où β est une constante vérifiant $\beta > 1$.

Pour symétriser la partie singulière, introduisons $v_e := v - \nabla\theta$. Avec cette nouvelle inconnue, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t p + \varepsilon^{-1} \operatorname{div} v_e = 0, \\ \partial_t v_e + \varepsilon^{-1} \nabla p - \nabla \operatorname{div} v_e + (\beta - 1) \nabla \Delta\theta = 0, \\ \partial_t \theta + \operatorname{div} v_e - (\beta - 1) \Delta\theta = 0. \end{cases}$$

Multiplions la première [resp. deuxième] équation avec p [resp. v_e] :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| (p, v_e) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \operatorname{div} v_e \right\|_{L^2}^2 - (\beta - 1) \langle\, \Delta\theta \,, \operatorname{div} v_e \,\rangle = 0.$$

En multipliant la troisième équation par $-\eta\Delta\theta$, nous trouvons ensuite

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| (p, v_e, \sqrt{\eta} \nabla\theta) \right\|_{L^2}^2 \\ &\qquad + \left\| \operatorname{div} v_e \right\|_{L^2}^2 - (\beta - 1 + \eta) \langle\, \Delta\theta \,, \operatorname{div} v_e \,\rangle + \eta(\beta - 1) \left\| \Delta\theta \right\|_{L^2}^2 = 0. \end{aligned}$$

En choisissant $\eta := \beta - 1$ (> 0 par hypothèse), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| (p, v_e, \sqrt{\beta - 1} \nabla\theta) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \operatorname{div} v_e - (\beta - 1) \Delta\theta \right\|_{L^2}^2 = 0.$$

En intégrant cette identité, puis en utilisant l'inégalité triangulaire pour obtenir une estimation où v_e est remplacée par v, on obtient

$$\left\| (p, v, \nabla\theta)(t) \right\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\| \operatorname{div} v - \beta \Delta\theta \right\|_{L^2}^2 \, d\tau \leqslant K_\beta \left\| (p, v, \nabla\theta)(0) \right\|_{L^2}^2 . \tag{10}$$

où la constante K_β ne dépend que de β. Nous avons trouvé une estimation L^2 uniforme en ε. Cependant, elle signifie peu, et on veut aller plus loin.

Cherchons une estimation sur $\Delta\theta$. Pour ce faire, le procédé consiste à chercher de nouvelles inconnues U_1 et U_2 telles que $U := (U_1, U_2, \theta)$ vérifie $\partial_t U + LU - BU = 0$, avec $-\langle\, BU \,, U \,\rangle \geqslant \left\| \nabla\theta \right\|^2$ et L antisymétrique.

Posons $\zeta := \varepsilon\beta p - \theta$ et $v_\varepsilon := \varepsilon v$, en sorte que

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \dfrac{\beta - 1}{\varepsilon} \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \\ \partial_t v_\varepsilon + \dfrac{1}{\beta\varepsilon} \nabla\zeta + \dfrac{1}{\beta\varepsilon} \nabla\theta = 0, \\ \partial_t \theta + \dfrac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} v_\varepsilon - \beta \Delta\theta = 0. \end{cases} \tag{11}$$

L'hypothèse $\beta > 1$ permet de symétriser ce système, et ainsi d'obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(\sqrt{1/(\beta-1)}\zeta, \sqrt{\beta}v_\varepsilon, \theta)\right\|_{L^2}^2 + \beta\left\|\nabla\theta\right\|_{L^2}^2 = 0.$$

Les coefficients étant constants, cette égalité en implique une autre identique pour les dérivées de ζ, v_ε et θ. Une fois intégrées, ces identités donnent

$$\left\|\nabla(\zeta, v_\varepsilon, \theta)(t)\right\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\|\nabla^2\theta\right\|_{L^2}^2 \, d\tau \leqslant K_\beta \left\|\nabla(\zeta, v_\varepsilon, \theta)(0)\right\|_{L^2}^2 . \tag{12}$$

L'inégalité triangulaire transforme cette estimation en une estimation sur εp et εv, qui à son tour permet d'écrire à partir de (10),

$$\begin{aligned}\left\|(p, v, \theta)(t)\right\|_{L^2} + \left\|\nabla(\theta, \varepsilon p, \varepsilon v)(t)\right\|_{L^2} + \left(\int_0^t \left\|\operatorname{div} v\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\theta\right\|_{H^1}^2 \, d\tau\right)^{1/2}& \\ \leqslant K_\beta \left\|(p, v, \theta)(0)\right\|_{L^2} + K_\beta \left\|\nabla(\theta, \varepsilon p, \varepsilon v)(0)\right\|_{L^2} .&\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à estimer ∇p. Pour cela, on multiplie l'équation $\partial_t v + \varepsilon^{-1}\nabla p = 0$ par $\varepsilon\nabla p$ et on intègre par parties sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\nabla p\right\|_{L^2}^2 \, dt &= -\int_0^T \langle\, \varepsilon\partial_t v \,,\, \nabla p \,\rangle \, dt \\ &= \int_0^T \langle\, v \,,\, \varepsilon\partial_t \nabla p \,\rangle \, dt - \varepsilon\big[\langle\, v(t) \,,\, \nabla p(t) \,\rangle\big]_{t=0}^{t=T} \\ &= -\int_0^T \langle\, \operatorname{div} v \,,\, \varepsilon\partial_t p \,\rangle \, dt - \varepsilon\big[\langle\, v(t) \,,\, \nabla p(t) \,\rangle\big]_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_0^T \left\|\operatorname{div} v\right\|_{L^2}^2 - \langle\, \operatorname{div} v \,,\, \Delta\theta \,\rangle \, dt - \varepsilon\big[\langle\, v(t) \,,\, \nabla p(t) \,\rangle\big]_{t=0}^{t=T}.\end{aligned}$$

Tous les termes qui apparaissent dans le membre de droite ont déjà été estimés. Ce qui achève de démontrer le théorème 5.3 sur cet exemple.

Rappelons que pour obtenir une estimation sur $\Delta\theta$ on a utilisé un changement d'inconnues qui fait apparaître un opérateur de pénalisation (voir (11)). Celui-ci n'apparaît pas dans l'estimation d'énergie (12) par antisymétrie. On peut se demander pourquoi cette propriété est vraie pour le système (9), qui lui est à coefficients variables. Pour le système (9), l'analogue de ζ est

$$\widetilde{\zeta} := \varepsilon G_1(\phi) k_3(\phi) \widetilde{p} - G_3(\phi) k_1(\phi) \widetilde{\theta},$$

et on vérifie que $\mathcal{U} := (\widetilde{\zeta}, \varepsilon\widetilde{v}, \widetilde{\theta})$ est solution d'un système analogue à (11), de la forme $\mathcal{L}_1(v, \phi)\mathcal{U} - \mathcal{L}_2(\mu, \kappa, \phi)\mathcal{U} + \frac{1}{\varepsilon}\mathscr{S}(\phi)\mathcal{U} = F$, où $\mathcal{L}_1(v, \phi) - \mathcal{L}_2(\mu, \kappa, \phi)$ est de type mixte hyperbolique/parabolique et $\mathscr{S}$ est donné par

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \operatorname{div} & 0 \\ \nabla(\gamma_1\,\cdot) & 0 & \nabla(\gamma_2\,\cdot) \\ 0 & \gamma_2 \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_1 := \frac{1}{G_1 k_3} \text{ et } \gamma_2 := \frac{G_3 k_1}{G_1 k_3}\cdot$$

Cet opérateur est bien antisymétrique.

6. Estimation des dérivées

Dans [2] et [3], pour estimer les dérivées, on distingue deux régimes : hautes et basses fréquences. A noter que l'on n'a pas besoin d'étudier les moyennes fréquences.

Ici, on ne présente que l'estimation de la partie basses fréquences des composantes pénalisées, à savoir $\nabla J_{\varepsilon\nu} p$ et $\operatorname{div} J_{\varepsilon\nu} v$ où $\nu := \sqrt{\mu+\kappa}$ et $J_{\varepsilon\nu}$ est un opérateur qui localise aux fréquences plus petites que $1/(\varepsilon\nu)$ (voir le §6.1 pour une définition précise de $J_{\varepsilon\nu}$). Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration du résultat suivant.

Proposition 6.1. *Soit un entier $s > 1 + d/2$. Il existe une fonction C continue et croissante telle que pour tout $a = (\varepsilon, \mu, \kappa) \in A$, tout $T \in [0,1]$ et tout $U = (p, v, \theta) \in C^1([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^3))$ solution de (4),*

$$\|J_{\varepsilon\nu}\nabla p\|_{L^\infty(0,T;H^{s-1})} + \nu\, \|J_{\varepsilon\nu}\nabla p\|_{L^2(0,T;H^s)} \leqslant C(\Omega_0) e^{(\sqrt{T}+\varepsilon)C(\Omega)},$$

$$\|\operatorname{div} J_{\varepsilon\nu} v\|_{L^\infty(0,T;H^{s-1})} + \nu\, \|\operatorname{div} J_{\varepsilon\nu} v\|_{L^2(0,T;H^s)} \leqslant C(\Omega_0) e^{(\sqrt{T}+\varepsilon)C(\Omega)}.$$

où $\nu := \sqrt{\mu+\kappa}$, $\Omega_0 := \|U(0)\|_{\mathcal{H}^s_{a,0}}$, $\Omega := \|U\|_{\mathcal{H}^s_a(T)}$.

Pour obtenir un système clos d'estimations, il reste à établir des résultats analogues pour les hautes fréquences, et les composantes lentes θ et $\operatorname{curl} v$. C'est dans cette dernière étape que la fonction S de l'hypothèse H2 du §3.1, ainsi que la restriction à $\mathbb{R}^3$, jouent des rôles techniques importants.

6.1. Localisation dans l'espace des fréquences.

On utilise deux familles pour localiser en fréquences :

$$\left\{ \Lambda_h^m := (I - h^2\Delta)^{m/2} \,|\, m \leqslant 0,\ h \in]0,1] \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ J_h := \jmath(hD_x) \;\middle|\; h \in]0,1] \right\},$$

où $\jmath \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$0 \leqslant \jmath \leqslant 1, \quad \jmath(\xi) = 1 \text{ pour } |\xi| \leqslant 1, \quad \jmath(\xi) = 0 \text{ pour } |\xi| \geqslant 2, \quad \jmath(\xi) = \jmath(-\xi)\,.$$

Nous utilisons deux familles d'opérateurs régularisants pour bénéficier de deux avantages inconciliables. Les J_h sont presque des projecteurs :

$$J_h = J_h J_{ch} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant c \leqslant 2^{-1}.$$

A l'opposé, les opérateurs Λ_h^m sont inversibles, ce qui permet de distribuer l'effet régularisant de ces opérateurs, au sens de la proposition suivante.

Proposition 6.2. *Soit $\sigma_0 > d/2$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que*

$$\sigma_1 + \sigma_2 + m_1 + m_2 \leqslant 2\sigma_0.$$

Il existe $K = K(d, \sigma_0, \sigma_i, m_i)$, telle que pour tout $h \in]0,1]$,

$$\left\|\Lambda_h^{-m_1-m_2}(u_1 u_2)\right\|_{H^{\sigma_0-\sigma_1-\sigma_2}} \leqslant K \left\|\Lambda_h^{-m_1} u_1\right\|_{H^{\sigma_0-\sigma_1}} \left\|\Lambda_h^{-m_2} u_2\right\|_{H^{\sigma_0-\sigma_2}}.$$

Le résultat suivant complète le lemme de Friedrichs.

Proposition 6.3. *Soit $s > d/2+1$ et $m \in [0,1]$. Pour tout σ dans l'intervalle $[0, s-1]$, il existe une constante K, telle que pour tout $h \in]0,1]$, tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et tout $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|J_h(fu) - fJ_h u\|_{H^{\sigma-m+1}} \leqslant h^m K \|f\|_{H^s} \|\Lambda_h^{-s-\sigma} u\|_{H^\sigma}.$$

Démonstration. Posons $m=1$ pour fixer les idées.

a. Montrons d'abord une version plus faible :

$$\|[J_h, f]\Lambda_h^{s+\sigma-1}\|_{H^\sigma \to H^\sigma} \lesssim h\|f\|_{H^s}.$$

Décomposons le commutateur selon : $[J_h, f] = [J_h, f]J_{h/5} + [J_h, f](I - J_{h/5})$.

Pour estimer le premier terme, écrivons

$$\begin{aligned}\|[J_h, f]\Lambda_h^{s+\sigma-1} J_{h/5}\|_{H^\sigma \to H^\sigma} &\lesssim \|[J_h, f]\|_{H^\sigma \to H^\sigma} = h\|[h^{-1}(I - J_h), f]\|_{H^\sigma \to H^\sigma} \\ &\lesssim h\|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

Pour montrer la dernière inégalité on a utilisé le fait que $h^{-1}(I - J_h)$ est uniformément bornée dans $\mathrm{Op}S^1_{1,0}$, ainsi qu'un peu de calcul paradifférentiel.

Pour le second terme, introduisons les notations $U := \Lambda_h^{s+\sigma-1}(I - J_{h/5})u$ et $C(f,u) := [J_h, f]U$. On veut démontrer que $\|C(f,u)\|_{H^\sigma} \lesssim h\,\|f\|_{H^s}\,\|u\|_{H^\sigma}$. Pour cela, il suffit de savoir que $J_h(I - J_{h/5}) = 0$. En effet, on en déduit

$$C(f,u) := J_h(fU) = J_h\big(((I - J_h)f)U\big).$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser trois ingrédients :

$$\begin{aligned}&\big\|J_h\big\{((I - J_h)f)U\big\}\big\|_{H^\sigma} \lesssim h^{-(s+\sigma-1)}\,\|((I - J_h)f)U\|_{H^{-(s-1)}}\,. \\ &\|((I - J_h)f)U\|_{H^{-(s-1)}} \lesssim \|(I - J_h)f\|_{H^{s-1}}\,\|U\|_{H^{-s+1}} \lesssim h\,\|f\|_{H^s}\,\|U\|_{H^{-s+1}}\,, \\ &\|U\|_{H^{-(s-1)}} \lesssim \|h^{s+\sigma-1}\,|D_x|^{s+\sigma-1}\,u\|_{H^{-(s-1)}} \lesssim h^{s+\sigma-1}\,\|u\|_{H^\sigma}\,.\end{aligned}$$

b. La preuve précédente ne suffit pas à montrer le résultat si on remplace $\Lambda_h^{s+\sigma-1}$ par $\Lambda_h^{s+\sigma}$. Ceci à cause de l'estimation de produit utilisée qui traduit juste le fait que H^{s-1} est une algèbre. On peut penser à utiliser une estimation de produit plus fine, car douce. Le problème est que l'on travaille avec des indices négatifs. Il disparaît par dualité (cf [2, §3.3]). □

6.2. **Estimations non-isotropes.** Lorsque $\mu+\kappa \neq 0$, les dérivées en temps et les dérivées en espace n'ont plus le même poids. Pour utiliser la stratégie décrite à la section 4, on introduit des dérivées en temps "rectifiées".

Définition 6.4. *Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon, \nu) \in [0,1] \times [0,2]$. On définit*

$$Z^\ell_{\varepsilon,\nu} := \Lambda_{\varepsilon\nu}^{-\ell}(\varepsilon\partial_t)^\ell,$$

où, comme dans le §6.1, $\Lambda_h^m = (I - h^2\Delta)^{m/2}$.

On peut alors énoncer des estimations analogues à (8).

Lemme 6.5. *Soit un entier $s > 1 + d/2$. Il existe une fonction $C(\cdot)$ telle que pour tout $a = (\varepsilon, \mu, \kappa) \in A$, tout $T > 0$ et toute solution $(p, v, \theta) \in C^\infty([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^d))$ du système (4) , si $\nu \in [(\mu+\kappa)/2, 2]$ alors la fonction Ψ définie par*

$$\Psi := \big(\psi, \partial_t \psi, \nabla\psi\big) \quad \textit{où} \quad \psi := (\theta, \varepsilon p, \varepsilon v), \tag{13}$$

vérifie

$$\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant s} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, \Psi \big\|_{H^{s-\ell-1}} \leqslant C\big(\|\Psi\|_{H^{s-1}} \big), \tag{14}$$

$$\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant s} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, \Psi \big\|_{H^{s-\ell}_\nu} \leqslant C\big(\|\Psi\|_{H^{s-1}} \big) \, \|\Psi\|_{H^s_\nu} . \tag{15}$$

Remarque 6.6. L'estimation (15) est douce (linéaire par rapport à la grande norme). Cela est utile pour démontrer des estimations indépendantes des paramètres μ et κ.

Pour montrer ce résultat on commence par remarquer qu'il existe une famille $\big\{ B_{a,\alpha} \,|\, a \in A,\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2 \big\}$ uniformément bornée dans $C^\infty\big(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N\times N}\big)$ (avec $N = (d+2)^2$) telle que pour tout $a \in A$ et toute solution (p, v, θ) de (4), la fonction Ψ définie par (13) vérifie

$$\varepsilon \partial_t \Psi = \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} B_{a,j}(\Psi) \partial_j \Psi + \varepsilon(\mu+\kappa) \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant d} \partial_j \big(B_{a,jk}(\Psi) \partial_k \Psi \big). \tag{16}$$

L'identité $Z^{m+1}_{\varepsilon,\nu} = \Lambda^{-1}_{\varepsilon\nu} Z^m_{\varepsilon,\nu} (\varepsilon\partial_t)$ nous permet de démontrer les estimations (14) et (15) par récurrence à partir de la proposition 6.2.

6.3. **Estimations de commutateurs avec gain d'un facteur ε.**

Lemme 6.7. *Soit deux entiers $s > 1 + d/2$ et m. Il existe une constante K telle que pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, $\nu \in [0,2]$, $T > 0$ et $f, u \in C^\infty([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^d))$, si $1 \leqslant m \leqslant s$*

$$\begin{aligned} \big\| [f, J_{\varepsilon\nu} (\varepsilon\partial_t)^m] u \big\|_{H^{s-m+1}_{\varepsilon\nu}} \leqslant K\varepsilon \Big\{ \|f\|_{H^s} + \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant m-1} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, \partial_t f \big\|_{H^{s-1-\ell}} \Big\} \\ \times \Big\{ \big\| Z^m_{\varepsilon,\nu}\, u \big\|_{H^{s-m}_\nu} + \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant m-1} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, u \big\|_{H^{s-1-\ell}} \Big\}, \end{aligned}$$

et si $0 \leqslant m \leqslant s-1$,

$$\begin{aligned} \big\| [f, J_{\varepsilon\nu} (\varepsilon\partial_t)^m] u \big\|_{H^{s-m}_{\varepsilon\nu}} \leqslant K\varepsilon \Big\{ \|f\|_{H^s} + \sum_{\ell=0}^{m-1} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, \partial_t f \big\|_{H^{s-2-\ell}} \Big\} \\ \times \Big\{ \big\| Z^m_{\varepsilon,\nu}\, u \big\|_{H^{s-1-m}} + \sum_{\ell=0}^{m-1} \big\| Z^\ell_{\varepsilon,\nu}\, u \big\|_{H^{s-1-\ell}} \Big\}. \end{aligned}$$

Expliquons la première estimation. On décompose $[f, J_{\varepsilon\nu}(\varepsilon\partial_t)^m]u$ en deux parties :

$$[f, J_{\varepsilon\nu}](\varepsilon\partial_t)^m u + J_{\varepsilon\nu}[f, (\varepsilon\partial_t)^m]u. \tag{17}$$

La proposition 6.3 permet de majorer le premier terme par

$$K\varepsilon\nu \left\|f\right\|_{H^s} \left\|\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-m}(\varepsilon\partial_t)^m u\right\|_{H^{s-m}}$$

qui est estimé (par définition) par $K\varepsilon \left\|f\right\|_{H^s} \left\|Z^m_{\varepsilon,\nu}\, u\right\|_{H^{s-m}_\nu}$. Le second terme dans (17) est une somme de termes qui s'écrivent $J_{\varepsilon\nu}\big((\varepsilon\partial_t)^k f(\varepsilon\partial_t)^\ell u\big)$ avec $k \geqslant 1$ et $k+\ell = m$. La proposition 6.2 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\left\|J_{\varepsilon\nu}\big((\varepsilon\partial_t)^k f(\varepsilon\partial_t)^\ell u\big)\right\|_{H^{s-k-\ell+1}_{\varepsilon\nu}} &\lesssim \left\|J_{\varepsilon\nu}\big((\varepsilon\partial_t)^k f(\varepsilon\partial_t)^\ell u\big)\right\|_{H^{s-k-\ell}} \\
&\lesssim \left\|\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-(k+\ell)}\big((\varepsilon\partial_t)^k f(\varepsilon\partial_t)^\ell u\big)\right\|_{H^{s-k-\ell}} \\
&\lesssim \left\|\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-k}(\varepsilon\partial_t)^k f\right\|_{H^{s-k}} \left\|\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-\ell}(\varepsilon\partial_t)^\ell u\right\|_{H^{s-\ell}}.
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de noter que $\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-k}(\varepsilon\partial_t)^k f = \varepsilon\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-1} Z^{k-1}_{\varepsilon,\nu}\, \partial_t f$ et que $\Lambda_{\varepsilon\nu}^{-1} \lesssim I$.

6.4. **La récurrence.** Cette partie est technique et nous nous contentons d'esquisser la méthode.

Notons $\mathcal{X}^m := J_{\varepsilon\nu}(\varepsilon\partial_t)^m$ et $f^m_{\mathrm{BF}} = (f^m_{1,\mathrm{BF}}, f^m_{2,\mathrm{BF}}, f^m_{3,\mathrm{BF}})$ le commutateur des équations (4) et des opérateurs $\mathcal{X}^m$:

$$\begin{aligned}
f^m_{1,\mathrm{BF}} &:= \big[g_1, \mathcal{X}^m\big]\partial_t p + \big[g_1 v, \mathcal{X}^m\big]\cdot\nabla p \;-\frac{\kappa}{\varepsilon}\big[\beta_1 \operatorname{div}(\beta\nabla\cdot), \mathcal{X}^m\big]\theta, \\
f^m_{2,\mathrm{BF}} &:= \big[g_2, \mathcal{X}^m\big]\partial_t v + \big[g_2 v, \mathcal{X}^m\big]\cdot\nabla v, \\
f^m_{3,\mathrm{BF}} &:= \big[g_3, \mathcal{X}^m\big]\partial_t \theta + \big[g_3 v, \mathcal{X}^m\big]\cdot\nabla \theta \;-\kappa\,\big[\beta_3 \operatorname{div}(\beta\nabla\cdot), \mathcal{X}^m\big]\theta.
\end{aligned}$$

Les lemmes 6.5 et 6.7 permettent de montrer que :

Lemme 6.8. *Il existe une fonction $C(\cdot)$ indépendante de a telle que*

$$\begin{aligned}
\forall m \in [1,s],\quad \left\|\big(f^m_{1,\mathrm{BF}}, f^m_{2,\mathrm{BF}}\big)\right\|_{H^{s-m+1}_{\varepsilon\nu}} + \left\|f^m_{3,\mathrm{BF}}\right\|_{H^{s-m+1}_{\nu}} &\leqslant (1+R')C(R), \\
\forall m \in [0,s-1],\quad \left\|\big(f^m_{1,\mathrm{BF}}, f^m_{2,\mathrm{BF}}\big)\right\|_{H^{s-m}_{\varepsilon\nu}} + \left\|f^m_{3,\mathrm{BF}}\right\|_{H^{s-m}_{\nu}} &\leqslant C(R),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R &:= \left\|(\nabla p, \nabla v)\right\|_{H^{s-1}} + \left\|(\theta, \varepsilon p, \varepsilon v)\right\|_{H^{s+1}_\nu}, \\
R' &:= \sqrt{\mu}\left\|\nabla v\right\|_{H^{s+1}_{\varepsilon\nu}} + \sqrt{\kappa}\left\|\nabla\theta\right\|_{H^{s+1}_\nu} + \sqrt{\mu+\kappa}\left\|\nabla p\right\|_{H^s} + \sqrt{\kappa}\left\|\operatorname{div} v\right\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Cela étant acquis, on peut déjà utiliser l'estimation de f^s_{BF} pour appliquer le théorème 5.3. Ce qui implique qu'il existe une constante C_0 ne dépendant que de Ω_0 (défini dans l'énoncé de la proposition 6.1) et une constante C ne dépend que de Ω, telles que

$$\left\|\mathcal{X}^s(p,v,\theta)\right\|_{a,T} \leqslant C_0 e^{\sqrt{T}C}.$$

Il s'agit ensuite d'énoncer le procédé de récurrence qui permet d'obtenir la proposition 6.1 à partir de l'estimation précédente. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 6.9. *Notons* $\|u\|_{\mathcal{K}^\sigma_\nu(T)} := \|u\|_{L^\infty(0,T;H^{\sigma-1})} + \nu \|u\|_{L^2(0,T;H^\sigma)}$.

Soit $\widetilde{U} := (\widetilde{p}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta})$ *une solution du système :*

$$\begin{cases} g_1\partial_t\widetilde{p} + \varepsilon^{-1}\operatorname{div}\widetilde{v} - \dfrac{\kappa}{\varepsilon}\beta_1 \operatorname{div}(\beta\nabla\widetilde{\theta}) = f_1, \\ g_2\partial_t\widetilde{v} + \varepsilon^{-1}\nabla\widetilde{p} - \mu\Delta\widetilde{v} = f_2, \\ g_3(\phi)\partial_t\widetilde{\theta} + \operatorname{div}\widetilde{v} - \kappa\beta_3\operatorname{div}(\beta\nabla\widetilde{\theta}) = f_3. \end{cases} \tag{18}$$

Si le spectre de $\widetilde{U}$ *est inclu dans la boule* $\{|\xi| \leqslant 2/\varepsilon\nu\}$*, alors il existe* C_0 *[resp.* C*] ne dépendant que de* Ω_0 *[resp.* Ω*] telles que pour tout* $\sigma \in [1, s]$*,*

$$\begin{aligned} &\|\nabla\widetilde{p}\|_{\mathcal{K}^\sigma_\nu(T)} + \|\operatorname{div}\widetilde{v}\|_{\mathcal{K}^\sigma_\nu(T)} \\ &\quad\leqslant \widetilde{C}\,\|(\varepsilon\partial_t)\widetilde{p}\|_{\mathcal{K}^\sigma_\nu(T)} + \widetilde{C}\,\|(\varepsilon\partial_t)\operatorname{div}\widetilde{v}\|_{\mathcal{K}^{\sigma-1}_\nu(T)} \\ &\qquad + \widetilde{C}\,\|\nabla\widetilde{p}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \widetilde{C}\,\|\widetilde{\theta}(0)\|_{H^{\sigma+1}_\nu} + \varepsilon C\,\|\mu\widetilde{v}\|_{\mathcal{K}^{\sigma+1}_\nu(T)} \\ &\qquad + \varepsilon C\,\|(f_1, f_2)\|_{\mathcal{K}^\sigma_\nu(T)} + \nu\widetilde{C}\,\|f_3\|_{L^2(0,T;H^\sigma)}\,, \end{aligned} \tag{19}$$

où $\widetilde{C} := C_0 e^{(\sqrt{T}+\varepsilon)C}$.

References

[1] T. Alazard, Incompressible limit of the nonisentropic Euler equations with solid wall boundary conditions, *Adv. in Differential Equations* **10**, 19–44 (2005).

[2] T. Alazard, Low Mach number limit of the full Navier–Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal*, accepté.

[3] T. Alazard, Low Mach number limit of the full Navier–Stokes equations II, en cours.

[4] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin & S. Descombes, Well-posedness of one-dimensional Korteweg models, prépublication.

[5] D. Bresch & B. Desjardins, Existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids.

[6] D. Bresch, B. Desjardins & D. Gerard–Varet, Rotating Fluids in a cylinder, Disc. Cont. Dyn. Sys.- Series A **1**, 47–82 (2004).

[7] D. Bresch, B. Desjardins, E. Grenier & C.-K. Lin, Low Mach number limit of viscous polytropic flows: formal asymptotics in the periodic case, *Stud. Appl. Math.* **109**, 125–149 (2002).

[8] D. Bresch, D. Gerard-Varet & E. Grenier, Derivation of the planetary geostrophic equations, prépublication.

[9] C. Cheverry, Propagation of oscillations in real vanishing viscosity limit, *Comm. Math. Phys.*, **247**, 655–695 (2004).

[10] R. Danchin, Zero Mach number limit for compressible flows with periodic boundary conditions, *Amer. J. Math.* **124**, 1153–1219 (2002).

[11] R. Danchin, Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **35**, 27–75 (2002).

[12] R. Danchin, Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **160**, 1–39 (2001).

[13] R. Danchin, Low Mach number limit for viscous compressible flows, *M2AN Math. Model. Numer. Anal. specail issue ol. 39 No. 3 (May-June 2005).*

[14] B. Desjardins & E. Grenier, Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **455**, 2271–2279 (1999).

[15] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions & N. Masmoudi, Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions, *J. Math. Pures Appl.* **78**, 461–471 (1999).
[16] A. Dutrifoy & T. Hmidi, The incompressible limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating initial data, *Comm. Pure Appl. Math.*, **57** 1159–1177 (2004).
[17] I. Gallagher, A remark on smooth solutions of the weakly compressible periodic Navier–Stokes equations, *J. Math. Kyoto Univ.*, **40** 525–540 (2000).
[18] I. Gallagher, Résultats récents sur la limite incompressible, *Séminaire Bourbaki 2003–2004*, num. 926.
[19] I. Gallagher & L. Saint-Raymond, On pressureless gases driven by a strong inhomogeneous magnetic field, *SIAM Journal for Mathematical Analysis*, accepté.
[20] E. Grenier, Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations, *J. Math. Pures Appl.* **76**, 477–498 (1997).
[21] H. Isozaki, Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain, *J. Reine Angew. Math.* **381**, 1–36 (1987).
[22] H. Isozaki, Wave operators and the incompressible limit of the compressible Euler equation *Comm. Math. Phys.*, **110**, 519–524 (1987).
[23] S. Kawashima & Y. Shizuta, On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws, *Tohoku Math. J.* **40** 449–464 (1988).
[24] S. Klainerman & A. Majda, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.* **34**, 481–524 (1981).
[25] S. Klainerman & A. Majda, Compressible and incompressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.* **35**, 629–651 (1982).
[26] P.-L. Lions, Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1, Incompressible models, Oxford Science Publications (1996).
[27] P.-L. Lions & N. Masmoudi, Incompressible limit for a viscous compressible fluid, *J. Math. Pures Appl. (9)* **77**, 585–627 (1998).
[28] P.-L. Lions & N. Masmoudi, Une approche locale de la limite incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329**, 387–392 (1999).
[29] A. Majda, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, Applied Mathematical Sciences **53**, Springer-Verlag (1984).
[30] M. Majdoub & M. Paicu, Uniform local existence for inhomogenous rotating fluid equations, prépublication.
[31] G. Métivier & S. Schochet, The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158**, 61–90 (2001).
[32] G. Métivier & S. Schochet, Limite incompressible des équations d'Euler non isentropiques, *Séminaire: Équations aux Dérivées Partielles 2000–2001.*
[33] G. Métivier & S. Schochet, Averaging theorems for conservative systems and the weakly compressible Euler equations, *J. Differential Equations* **187**, 106–183 (2003).
[34] S. Schochet, The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit, *Comm. Math. Phys.* **104**, 49–75 (1986).
[35] S. Schochet, Fast singular limits of hyperbolic PDE's, *J. Differential Equations* **114**, 476–512 (1994).
[36] S. Schochet, The mathematical theory of low Mach numbers flows, *M2AN Math. Model. Numer. Anal. specail issue ol. 39 No. 3 (May-June 2005).*
[37] P. Secchi, On slightly compressible ideal flow in the half-plane, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **161**, 231–255 (2002).

MAB, Université de Bordeaux I, 33405 Talence
E-mail address: `thomas.alazard@math.u-bordeaux1.fr`