Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2004-2005

Frédéric Charve

Estimations de Strichartz pour les équations primitives et convergence quasigéostrophique

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° XVIII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Estimations de Strichartz pour les équations primitives et convergence quasigéostrophique

Frédéric Charve
Centre de Mathématiques de l'École polytechnique,
UMR 7640 du CNRS, 91128 Palaiseau Cedex, France.
E-mail: charve@math.polytechnique.fr

1 Introduction

1.1 Mécanique des fluides

Commençons par écrire le système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathbb{R}^3$:

$$(NS_\nu) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v.\nabla v - \nu\Delta v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{/t=0} = v_0. \end{cases}$$

Ce système donne d'un point de vue Eulérien l'évolution de la vitesse tridimensionnelle v d'un fluide incompressible et de viscosité $\nu > 0$.

Le temps $t \in \mathbb{R}_+$ et la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$. Les inconnues de ce système sont la vitesse $v = (v^1(t,x), v^2(t,x), v^3(t,x))$ et la pression $p = p(t,x)$.

La condition div$v = 0$ traduit l'incompressibilité du fluide considéré tandis que la notation $v.\nabla$ désigne $v.\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 v^j \partial_j$.

Le théorème suivant est dû à Jean Leray (1934) et fournit des solutions faibles, dites de Leray, sans que l'on ait, en dimension supérieure à trois, de résultat d'unicité:

Théorème 1.1 *Supposons que $v_0 \in L^2$, div $v_0 = 0$. Alors il existe un champ de vecteurs $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1)$, et une pression $p \in L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2)$ (ou bien $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ en dimension deux) solutions de (NS_ν).*

De plus, nous avons l'estimation d'énergie suivante: pour tout temps $t \geq 0$,

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|v_0\|_{L^2}^2.$$

Remarque 1.1 *En dimension deux, on peut prouver l'unicité des solutions, et de plus, l'estimation précédente devient une égalité. On a donc affaire à un problème globalement bien posé.*

Remarque 1.2 *L'équation possède une invariance par changement d'échelle : si v est une solution de NS_ν, alors $\lambda v(\lambda^2 t, \lambda x)$ est encore solution pour la donnée initiale $\lambda v_0(\lambda x)$ et l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ est invariant par ce changement d'échelle ce qui est faux en dimension trois. Par contre en dimension trois, l'espace $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ (qui s'injecte dans L^3 par les injections de Sobolev) est bien invariant par cette transformation.*

Enonçons le théorème suivant, dû à Fujita et Kato (1964) et qui fournit existence et unicité, localement en temps, pour des données initiales plus régulières:

Théorème 1.2 *Supposons que* $v_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$.

Alors il existe un unique temps maximal $T^* > 0$ *et une unique solution de* (NS_ν) $v \in \mathcal{C}^0([0, T^*[, \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_{Loc}([0, T^*[, \dot{H}^{\frac{3}{2}})$.

De plus, on a le critère d'explosion suivant: si T^* *est fini alors* $\int_0^{T^*} \|v(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} dt = +\infty$.

Enfin on dispose d'une condition de petitesse de la donnée initiale qui donne un temps d'existence infini: il existe une constante $c > 0$ *telle que si* $\|v_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq c\nu$ *alors* $T^* = \infty$.

Remarque 1.3 *Nous disposons aussi d'un résultat de propagation de la régularité au sens où si la donnée initiale est dans* $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{H}^s$ *avec* $s > \frac{1}{2}$ *alors sur l'intervalle* $[0, T^*[$ *(donné par le théorème précédent) la solution a aussi cette régularité.*

1.2 Fluides géophysiques

Par fluide géophysique nous désignons un fluide réparti sur un volume grand par rapport à l'échelle planétaire: l'atmosphère ou les océans. Deux choses distinguent principalement la dynamique des fluides géophysiques des autres disciplines consacrées à l'étude de la mécanique des fluides: il s'agit de la rotation et de la stratification.

Le fait que la Terre tourne autour de son axe introduit, lorsque l'on observe le mouvement dans un repère lié à la Terre, dans les équations du mouvement deux termes d'accélération qui peuvent être interprétés comme des forces: la force de Coriolis et la force centrifuge. Même si dans la vie quotidienne la force centrifuge est la plus "palpable" des deux, ce n'est pas elle qui a le plus d'importance. On se contente de l'inclure dans le gradient de pesanteur pour constituer ce que l'on nomme le géopotentiel. Le facteur crucial est en fait la force de Coriolis dans les mouvements géophysiques.

L'un des effets majeurs de la force de Coriolis est de forcer à une certaine rigidité verticale le fluide considéré, au sens où, lorsque des fluides homogènes tournent rapidement, on observe des mouvements en colonne, c'est-à-dire que toutes les particules le long de la même verticale bougent de concert en gardant leur alignement vertical. Ce résultat porte le nom de théorème de Taylor-Proudman.

Les travaux exposés dans [9] vérifient cette observation, en tirant parti de propriétés dispersives.

Dans les fluides atmosphériques ou océaniques de grande étendue, un tel état de parfaite rigidité verticale n'est pas réalisé, principalement parce que la rotation n'est pas assez rapide, et la densité, pas assez uniforme. Cependant les mouvements dans l'atmosphère, les océans, et sur d'autres planètes montrent une forte tendance vers cette répartition en colonnes: par exemple, on a pu observer certains courants situés dans l'Atlantique Nord-Ouest qui s'étendent verticalement sur 4000m sans changement significatif d'amplitude ou de direction.

En faisant une analyse d'échelle et en ne gardant formellement que les termes d'ordre le plus bas, on obtient le modèle géostrophique, qui revient à se placer dans le cas où la rotation serait exactement équilibrée par le gradient de pression. On observe des comportements très proches de cet équilibre dans certains jets océaniques, ou dans le cas de certains vents. Mais ce modèle géostrophique présente le désavantage de ne pas permettre d'étude de l'évolution en fonction du temps. C'est dans ce but qu'a été introduit le système quasigéostrophique, qui revient à ajouter les termes d'ordre supérieur. Dans ce système, on prend en considération non seulement la rotation mais aussi la stratification.

Le second attribut de la dynamique des fluides géophysiques, la stratification de la densité, apparaît naturellement lorsque l'on considère des fluides de densité variable (par exemple air chaud ou froid, eau douce ou salée...). La pesanteur joue un rôle important puisqu'elle tend à abaisser les fluides les plus lourds et élever les fluides les plus légers.

Sous des conditions d'équilibre, le fluide est stratifié de façon stable et consiste en un empilement vertical de couches horizontales de même densité, la densité décroissant lorsque croît l'altitude. Les mouvements du fluide dérangent constamment cet équilibre que la gravité s'efforcera systématiquement de rétablir: ces petites perturbations créent des ondes internes (par exemple les vents dominants dans l'atmosphère sont dus à la différence de température pôle-équateur).

En résumé nous avons à considérer deux phénomènes aux effets très différents: la rotation tendant à une répartition en colonnes verticales, et la stratification, tendant à maintenir autant que possible une répartition en couches horizontales de même densité.

Nous nous placerons dans le cas de mouvements de grande échelle, situés sur des latitudes moyennes (c'est-à-dire éloignés de l'équateur et des pôles). On distinguera les mouvements lents (qui seront proches du modèle quasigéostrophique, voire géostrophique) et les mouvements rapides (de l'ordre de la journée) qui eux seront trés influencés par la rotation.

1.3 Equations primitives

La conservation de la masse, de la quantité de mouvement, l'utilisation de l'approximation de Boussinesq (on renvoit par exemple à [2] et [10]) et l'adimensionnement introduit par Majda ([11]) permettent d'écrire le système des équations primitives:

$$(PE_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t U_\varepsilon + v_\varepsilon . \nabla U_\varepsilon - LU_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}U_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}(-\nabla\Phi_\varepsilon, 0) \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ U_{\varepsilon/t=0} = U_0. \end{cases}$$

Les inconnues sont $U_\varepsilon = (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ où v_ε est la vitesse tridimensionnelle et θ_ε la température potentielle scalaire, et Φ_ε, la pression.

Toutes ces fonctions dépendent de $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.

L'opérateur L est défini par

$$LU_\varepsilon = (\nu\Delta v_\varepsilon, \nu'\Delta\theta_\varepsilon)$$

et $\mathcal{A}$ par:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres sont la viscosité ν, la diffusivité thermique ν', le nombre de Rossby ε (petit paramètre) et le nombre de Froude F.

L'étude des asymptotiques des équations primitives en fortes rotation et stratification se fait avec la convergence du seul petit paramètre ε vers zéro. Rappelons que, suivant les changements d'échelle de [11] nous avons nommé ε nombre de Rossby mais qu'il prend en compte non seulement l'évanescence du paramètre Ro qui mesure l'importance de la force de Coriolis, mais aussi celle du paramètre Fr qui mesure la rigidité de la stratification, et il s'agit alors de vérifier mathématiquement la convergence, lorsque ε tend vers zéro, vers le système quasigéostrophique. Nous allons rappeler dans la partie suivante une liste de résultats concernant les asymptotiques du système des équations primitives.

1.4 Approche formelle

L'approche formelle est décrite en détails dans [3]. On suppose que $U_\varepsilon \to U$ et $\Phi_\varepsilon \to \Phi$ lorsque $\varepsilon \to 0$, ceci de façon suffisamment forte pour que l'on n'ait pas de problème de convergence pour les dérivations ou les produits.

Le problème est évidemment le comportement des termes du système comportant au dénominateur le petit paramètre ε.

Au fil du calcul, on utilise l'incompressibilité et on est ainsi amené à introduire de façon naturelle la quantité suivante que l'on appelle tourbillon potentiel :

$$\Omega = \partial_1 U^2 - \partial_2 U^1 - F\partial_3 U^4,$$

ainsi que, comme candidat limite, le système quasigéostrophique :

$$\partial_t U - \Gamma U = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \\ 0 \\ F\partial_3 \end{pmatrix} {\Delta_F}^{-1}(U.\nabla\Omega)$$

$$\begin{cases} \Gamma = \Delta {\Delta_F}^{-1}(\nu{\partial_1}^2 + \nu{\partial_2}^2 + \nu' F^2 {\partial_3}^2), \\ \Delta_F = \partial_1^2 + \partial_2^2 + F^2\partial_3^3, \\ \Omega = \partial_1 U^2 - \partial_2 U^1 - F\partial_3 U^4, \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \\ 0 \\ F\partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F^{-1}\Omega.$$

Revenant aux équations primitives on utilise le tourbillon potentiel $\Omega_\varepsilon = \partial_1 v_\varepsilon^2 - \partial_2 v_\varepsilon^1 - F\partial_3\theta_\varepsilon$, ce qui nous permet dans la suite de scinder la solution U_ε en sa partie quasigéostrophique (l'objectif est d'éliminer les termes comportant ε en dénominateur en définissant un élément du noyau de l'opérateur $\mathbb{P}\mathcal{A}$) :

$$U_{\varepsilon,QG} = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ 0 \\ -F\partial_3 \end{pmatrix} {\Delta_F}^{-1}\Omega_\varepsilon$$

et enfin sa partie oscillante

$$U_{\varepsilon,osc} = U_\varepsilon - U_{\varepsilon,QG}.$$

Cette décomposition se résume en fait en une décomposition orthogonale du même type que celle obtenue lorsque l'on définit le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ sur les champs à divergence nulle : il existe deux opérateurs pseudo-différentiels homogènes de degré zéro, notés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, tels que $U_{\varepsilon,QG} = \mathcal{Q}U_\varepsilon$, et $U_{\varepsilon,osc} = \mathcal{P}U_\varepsilon$.

2 Enoncé des résultats

La matrice $\mathcal{A}$ étant antisymétrique, les méthodes d'énergie, utilisées pour la démonstration du théorème de Leray et de celui de Fujita et Kato dans le cas du système de Navier-Stokes, sont inchangées et fournissent le même type de résultats concernant les solutions faibles et les solutions fortes.

Théorème 2.1 *Supposons que la donnée initiale $U_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une solution de Leray du système (PE_ε), U_ε, globale en temps, appartenant à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et satisfaisant l'estimation d'énergie suivante (avec $\nu_0 = \min(\nu, \nu') > 0$) :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|U_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu_0 \int_0^t \|\nabla U_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} dt \leq \|U_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Enonçons d'abord les résultats concernant les solutions faibles:

Théorème 2.2 ([3]) *Si la donnée initiale U_0 appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$ et si l'on considère une suite de solutions de Leray $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ alors, la partie oscillante $U_{\varepsilon,osc}$ tend vers zéro quand ε tend vers zéro, dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^3))$ pour tout $q \in]2, 6[$.*

Théorème 2.3 ([3]) *Sous les mêmes hypothèses, il existe une suite extraite de la partie quasigéostrophique $U_{\varepsilon,QG}$ qui converge pour tout $q \in]2, 6[$ dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^q_{loc}(\mathbb{R}^3))$ vers une fonction U_{QG} de la forme $(v^1, v^2, 0, \theta)$ et solution du système:*

$$(QG) \qquad \partial_t U - \Gamma U = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \\ 0 \\ F\partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F{}^{-1}(v.\nabla\Omega),$$

avec Γ l'opérateur elliptique d'ordre deux défini par $\Gamma = \Delta\Delta_F{}^{-1}(\nu\partial_1{}^2 + \nu\partial_2{}^2 + \nu' F^2\partial_3{}^2)$.

Remarque 2.1 *En notant $U.\nabla U$ pour simplifier $v.\nabla U$ si $U = (v, \theta)$, et en utilisant les projecteurs, on ré-écrit le système précedent en:*

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{U_{QG}} - \Gamma \widetilde{U_{QG}} + \mathcal{Q}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla \widetilde{U_{QG}}) = 0 \\ \widetilde{U_{QG}}_{/t=0} = U_{0,QG}. \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce qui suit on s'intéresse au cas d'une donnée initiale plus régulière: $U_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $U_{0,QG} \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Même s'il n'y a pas, contrairement au système de Navier-Stokes, d'invariance par changement d'échelle, il est naturel de choisir une donnée dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$. En effet cet espace est invariant par le scaling du système de Navier-Stokes et comme $\mathcal{A}$ est antisymétrique et disparaît de toute estimation d'énergie, on peut comme pour le théorème de Leray obtenir l'analogue du théorème de Fujita et Kato pour les équations primitives: il existe un unique temps d'existence maximal $T^*_\varepsilon > 0$, et une unique solution $U_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T^*_\varepsilon[, \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap$

$L^2_{loc}([0,T^*_\varepsilon[, \dot H^{\frac32})$. De plus, si T^*_ε est fini alors $\int_0^{T^*_\varepsilon} \|U_\varepsilon(t)\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)} dt = +\infty$; et enfin, il existe une constante c telle que si $\|U_0\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu_0$, alors $T^*_\varepsilon = +\infty$.

Contrairement aux solutions de Leray, ici les solutions sont uniques pour chaque ε mais on ne sait pas si elles sont globales en général. Le théorème de Fujita et Kato fonctionne aussi pour le système $(\widetilde{QG})$ et de même on ignore si la solution unique est globale lorsque la donnée initiale n'est pas petite.

Dans [4] on montre de même que dans [13], (à la différence que l'on est dans l'espace entier et non plus périodique) que le système quasigéostrophique a une unique solution globale, sans hypothèse de petitesse des données initiales:

Théorème 2.4 *Supposons que $U_{0,QG} \in H^1(\mathbb{R}^3)$, alors le système $(\widetilde{QG})$ a une unique solution, globale, dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^2)$.*

Notons que $U_0 \in \dot H^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$ et $U_{0,QG} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ impliquent $U_{0,QG} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Le temps d'existence global est obtenu grâce à la forme spéciale du système vérifié par le tourbillon potentiel $\widetilde{\Omega_{QG}}$, où comme dans le cas bidimensionnel pour Navier-Stokes, et contrairement au cas tridimensionnel, il n'y a pas de terme de stretching $\Omega.\nabla U$.

Définissons W_ε comme étant la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon - LW_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}W_\varepsilon = -G \\ W_{\varepsilon/t=0} = U_{0,osc} = \mathcal{P}(U_0) \end{cases} \tag{2}$$

dans lequel G est un terme de force extérieure

$$G \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}\mathcal{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) - F(\nu-\nu')\Delta\Delta_F^{-2} \begin{pmatrix} -F\partial_2\partial_3^2 \\ F\partial_1\partial_3^2 \\ 0 \\ (\partial_1^2+\partial_2^2)\partial_3 \end{pmatrix} \widetilde{\Omega_{QG}}. \tag{3}$$

Théorème 2.5 ([4]) *Supposons que $U_0 \in \dot H^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$ et $U_{0,QG} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et soit W_ε définie comme précédemment. Alors on a les résultats suivants :*

- *W_ε existe globalement et est unique dans l'espace E^s pour tout $s \in [\frac12, 1]$.*
- *De plus $\|W_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.*
- *Si on note $\gamma_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} - W_\varepsilon$, alors si ε est suffisamment petit, $\gamma_\varepsilon \in E^s$ et converge vers zéro dans E^s pour tout $s \in [\frac12, 1]$.*
- *Enfin si ε est suffisamment petit, U_ε est dans E^s (donc globale) et $U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} = \gamma_\varepsilon + W_\varepsilon$ tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro, ceci dans l'espace $L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)$.*

Nous pouvons obtenir des résultats beaucoup plus précis sur la vitesse de convergence vers la limite quasigéostrophique sous des hypothèses de plus grande régularité (en permettant même une explosion des normes des données initiales lorsque le nombre de Rossby tend vers zéro).

Théorème 2.6 ([5]) *Soient $\beta > 0$, $\alpha > 0$ et supposons que $U_{0,\varepsilon} = U_{0,\varepsilon,QG} + U_{0,\varepsilon,osc}$, où*

- $\|U_{0,\varepsilon,QG} - U_{0,QG}\|_{H^1} \leq C\varepsilon$, *avec* $U_{0,QG} \in H^{1+\beta}$
- $U_{0,\varepsilon,osc} \in L^1 \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{H}^{1+\beta}$, *régulière mais avec des normes explosives :*

$$\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{L^1} + \|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + \|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{1+\beta}} \leq \alpha \log|\log\varepsilon|.$$

Avec les mêmes notations pour E^s *et* W_ε *alors pour tout* $M > 0$, *il existe une constante* $K^0 > 0$ *et un* $\varepsilon_0 > 0$ *(dépendant de* β *et* M*) tels que, si* $\omega = \beta M - \alpha K^0$ *et* $\alpha < \frac{\beta M}{K^0}$, *alors on a les résultats suivants :*

- W_ε *existe globalement, est unique dans l'espace* E^s *pour tout* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ *et si* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\|W_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)} \leq K^0|\log\varepsilon|^{-\omega}$.
- *Si* $\gamma_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} - W_\varepsilon$, *alors si* ε *est suffisamment petit,* $\gamma_\varepsilon \in E^s$ *pour tout* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ *et tend vers zéro dans* E^s, *pour tout* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$*:* $\|\gamma_\varepsilon\|_{E^s} \leq K^0|\log\varepsilon|^{-\omega}$.
- *Enfin, si* ε *est suffisamment petit,* U_ε *est définie globalement et* $U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} = \gamma_\varepsilon + W_\varepsilon$ *vérifie* $\|U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)} \leq K^0|\log\varepsilon|^{-\omega}$.

Dans le cas où les viscosités sont égales on a de nombreuses simplifications.

Théorème 2.7 ([5]) *Supposons que* $\nu = \nu'$ *et que* $U_{0,\varepsilon} = U_{0,\varepsilon,QG} + U_{0,\varepsilon,osc}$, *avec* $\|U_{0,\varepsilon,QG} - U_{0,QG}\|_{H^1} \leq C\varepsilon$, $U_{0,QG} \in H^{1+\beta}$ *et* $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{H^{1+\beta}} \leq \alpha|\log\varepsilon|$. *Soit* E^s *et* W_ε *toujours les mêmes,* G *étant simplifié en :*

$$G = \mathbb{P}\mathcal{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}). \tag{4}$$

Alors il existe une constante $K^0 > 0$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *telle que si on définit* $\gamma = \frac{1}{16(1+\beta)}$ *et* $\omega = \beta\gamma - \alpha K^0$ *et si* $\alpha < \frac{\beta\gamma}{K^0}$ *et* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *alors on a :*

- W_ε *est globale, unique dans* E^s *pour tout* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ *et on a l'estimation* $\|W_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)} \leq K^0\varepsilon^\omega$.
- *Si on note* $\delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} - \chi(\frac{|D|}{R_\varepsilon})W_\varepsilon$, *où* $R_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma}$, *alors* $\delta_\varepsilon \in E^s$ *pour tout* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ *et* $\|\delta_\varepsilon\|_{E^s} \leq K^0\varepsilon^\omega \quad \forall s \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- *Enfin si* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\|U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)} \leq K^0\varepsilon^\omega$.

Nous insistons sur le fait que ces résultats ont été obtenus grâce à des raffinements des estimations dispersives qui, dans l'optique d'une estimation de la vitesse de convergence, nécessitent des estimations beaucoup plus précises sur les éléments spectraux du système linéarisé.

3 Effet dispersif

3.1 Pénalisation

Si l'on applique le projecteur $\mathbb{P}$ de Leray sur les champs à divergence nulle :

$$\partial_t U_\varepsilon + \mathbb{P}(v_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon) - LU_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}AU_\varepsilon = 0.$$

On est face à un système de la forme :

$$\partial_t U - LU + \frac{R(D)}{\varepsilon} U = Q(U,U).$$

Le terme $R(D)U$ est dit pénalisé lorsque $\varepsilon \to 0$, on examine alors son noyau, et l'on s'attend à ce que la limite y appartienne. Dans notre cas le noyau correspond exactement aux champs de vecteurs quasigéostrophiques.

Or pour exprimer la solution du système linéarisé, on utilise la formule de Duhamel: on est donc ainsi amené à étudier les valeurs propres de $L - \dfrac{R}{\varepsilon}$.

Si $\nu \neq \nu'$, L et R ne commutent pas (alors que c'est le cas lorsque $\nu = \nu'$). Nous avons donc presque coïncidence entre la décomposition spectrale en variable de Fourier pour l'opérateur $L - \dfrac{R}{\varepsilon}$ et la séparation partie QG /partie oscillante.

Il apparaît nécessaire de faire le tri et c'est à ce moment que va servir la dispersion. Pour cela, on considère le système linéarisé auquel on s'intéresse dans la section suivante.

3.2 Système linéarisé

$$\partial_t W_\varepsilon - LW_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}AW_\varepsilon = 0.$$

En variable de Fourier on obtient que:

$$\partial_t \widehat{W}_{\varepsilon,osc} = \widehat{LW_{\varepsilon,osc}} - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\widehat{AW_{\varepsilon,osc}} \tag{5}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu' \end{pmatrix} |\xi|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{P}\mathcal{A}} \right) \widehat{W}_{\varepsilon,osc}.$$

Rappelons qu'en variable de Fourier le projecteur de Leray s'écrit:

$$\widehat{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_2^2+\xi_3^2}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2} & 0 \\ -\dfrac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} & \dfrac{\xi_1^2+\xi_3^2}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2} & 0 \\ -\dfrac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2} & \dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|\xi|^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et l'équation linéarisée devient:

$$\partial_t \widehat{W}_{\varepsilon,osc} = \mathbb{B}(\xi,\varepsilon)\widehat{W}_{\varepsilon,osc}\ , \tag{6}$$

où

$$\mathbb{B}(\xi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\nu|\xi|^2 + \dfrac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & \dfrac{\xi_2^2+\xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & \dfrac{\xi_1\xi_3}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ -\dfrac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & -\nu|\xi|^2 - \dfrac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & \dfrac{\xi_2\xi_3}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ \dfrac{\xi_2\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & -\nu|\xi|^2 & -\dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\varepsilon F} & -\nu'|\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

Pour des raisons exposées dans [3] on tronque les fréquences sur l'ensemble

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \quad tq \quad |\xi| \leq R, \quad |\xi_3| \geq r\},$$

et on détermine les éléments propres de la matrice $\mathbb{B}$: si $\xi \in \mathcal{C}_{r,R}$ et ε proche de zéro, on a quatre valeurs propres distinctes: μ_0, μ, λ et $\overline{\lambda}$ correspondant aux quatre projecteurs $\mathbb{P}_i = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_i(\xi, \varepsilon))$.

$$\mu_0 = -\nu|\xi|^2$$

$$\mu = -(\nu\xi_1^2 + \nu\xi_2^2 + \nu' F^2\xi_3^2)\frac{|\xi|^2}{|\xi|_F^2} + reste$$

$$\lambda = -\tau(\xi)|\xi|^2 + i\frac{|\xi|_F}{\varepsilon F|\xi|} + reste,$$

$$\text{avec} \quad \tau(\xi) = \frac{\nu}{2}\Big(1 + \frac{F^2\xi_3^2}{|\xi|_F^2}\Big) + \frac{\nu'}{2}\Big(1 - \frac{F^2\xi_3^2}{|\xi|_F^2}\Big).$$

On vérifie aussi que, les vecteurs propres n'étant plus orthogonaux, les normes des projecteurs $\mathbb{P}_i$ ne divergent pas en fonction de ε.

3.3 Dispersion

Nous avons donc à étudier un opérateur de la forme :

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix.\xi} e^{\lambda(\xi,\varepsilon)t} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

$$\text{avec} \quad \lambda(\xi, \varepsilon) = -\tau(\xi)|\xi|^2 + i\frac{|\xi|_F}{\varepsilon F|\xi|} + i\varepsilon S(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^2 S'(\xi, \varepsilon)$$

$$et \quad \tau(\xi) = \frac{\nu}{2}\Big(1 + \frac{F^2\xi_3^2}{|\xi|_F^2}\Big) + \frac{\nu'}{2}\Big(1 - \frac{F^2\xi_3^2}{|\xi|_F^2}\Big).$$

De plus τ est minorée sur $\mathcal{C}_{r,R}$ par $\nu_0 > 0$. On regarde donc:

$$K(\varepsilon, t, z) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) e^{-t\tau(\xi)|\xi|^2 + i\frac{t|\xi|_F}{\varepsilon F|\xi|} + i\varepsilon t S(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^2 t S'(\xi,\varepsilon) + iz.\xi} d\xi,$$

où

- la fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est radiale, à support dans $\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}$, et vaut 1 près $\mathcal{C}_{r,R}$.
- $\forall \xi \in \mathcal{C}_{r,R},\ \tau(\xi) \geq \nu_0 > 0$.
- S, S' et toutes leurs dérivées par rapport à ξ sont bornées sur $\mathcal{C}_{r,R}$ par une constante $A_{r,R}$.

Enonçons maintenant l'estimation dispersive qui nous permettra d'obtenir les estimations de Strichartz.

Lemme 3.1 *Estimation dispersive*

Il existe une constante $C = C_{r,R,F,\nu,\nu'}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{R}^3$ et tout ε suffisamment petit, on ait:

$$|K(\varepsilon,t,z)| \leq Ce^{\frac{-\nu_0 r^2 t}{16}}(\frac{\varepsilon}{t})^{\frac{1}{2}}.$$

La preuve est trés proche de celle donnée dans [9] pour le cas des fluides tournants : l'idée de base consiste en une version simplifiée de la phase stationnaire. Grâce à la restriction à $\mathcal{C}_{r,R}$ on peut se débarrasser de la singularité en zéro, ce qui implique en fait que tout se passe comme dans le cas d'une phase non stationnaire. Commençons par noter $b(\xi) = \dfrac{|\xi|_F}{F|\xi|}$.

Comme on a choisi ψ radiale, un changement de variable (rotation autour du troisième axe de coordonnées) nous permet de supposer que $z_2 = 0$ (l'invariance par une telle rotation est justifiée dans [3] lorsqu'on calcule les expressions des valeurs propres et vecteurs propres, et qu'on constate l'invariance de chaque coefficient).

Puis, notons $\beta = -\partial_{\xi_2} b(\xi)$ et définissons l'opérateur:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta(\xi)^2}(1+i\beta(\xi)\partial_{\xi_2})$$

qui agit sur la variable ξ_2 et vérifie $\mathcal{L}(e^{i\frac{t}{\varepsilon}b}) = e^{i\frac{t}{\varepsilon}b}$.

Le fait que l'on peut supposer $z_2 = 0$ implique que $e^{iz.\xi}$ ne dépend pas de la variable ξ_2 donc:

$$\mathcal{L}(e^{iz.\xi}e^{i\frac{t}{\varepsilon}b}) = e^{iz.\xi}e^{i\frac{t}{\varepsilon}b}.$$

Par intégration par parties, on obtient:

$$K(\varepsilon,t,z) = \int_{\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}} e^{i\frac{t}{\varepsilon}b(\xi)+iz.\xi}\mathcal{L}^T(\psi(\xi)e^{-t\tau(\xi)|\xi|^2+i\varepsilon tS(\xi,\varepsilon)+\varepsilon^2 tS'(\xi,\varepsilon)+iz.\xi}))d\xi_2 d\xi_1 d\xi_3.$$

De même que dans [9], on exprime le transposé de l'opérator $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^T(g) = (\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2} - i\partial_{\xi_2}\beta\frac{1-\frac{t}{\varepsilon}\beta^2}{(1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2)^2})g - \frac{i\beta}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2}\partial_{\xi_2} g.$$

En remplaçant $\mathcal{L}^T$ dans l'intégrale, on arrive à :

$$|K(\varepsilon,t,z)| \leq \int_{\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}} \Big[\Big(\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2} + A_0(\xi)\frac{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2}{(1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2)^2}\Big)\|\psi\|_{L^\infty}e^{-t\nu_0(\frac{r}{2})^2}e^{\varepsilon tA_1(\varepsilon,\xi)},$$

$$+\frac{A_2(\xi)}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2}\Big(\|\partial_{\xi_2}\psi\|_{L^\infty} + t\|\psi\|_{L^\infty}A_3(\xi) + \varepsilon t\|\psi\|_{L^\infty}A_4(\xi)\Big)e^{-t\nu_0(\frac{r}{2})^2}e^{\varepsilon tA_1(\varepsilon,\xi)}\Big]d\xi$$

où les coefficients $A_0, ..., A_4$ sont des fractions rationnelles de ξ mais en fait ne dépendent que de $|\xi|$, $|\xi|_F$, et les dérivées de S and S' sont aussi facilement bornées inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives sur $\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}$ et donc:

$$|K(\varepsilon,t,z)| \leq \int_{\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}} \frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\beta^2}C_{r,R,F,\psi}(1+t+\varepsilon t)e^{-t\nu_0\frac{r^2}{4}}e^{\varepsilon tC'_{r,R}}d\xi$$

Il existe un ε_{r,R,ν_0} suffisamment petit tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_{r,R,\nu_0}$:

$$(1+t+\varepsilon t)e^{-t\nu_0\frac{r^2}{4}+\varepsilon t C'_{r,R}} \leq C_{r,R,F,\psi}e^{-t\nu_0\frac{r^2}{16}}$$

Alors:

$$|K(\varepsilon,t,z)| \leq C_{r,R,F,\psi}e^{-t\nu_0\frac{r^2}{16}}\int_{\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}}\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\frac{(F^2-1)^2\xi_3^4\xi_2^2}{|\xi|_F^2|\xi|^6}}d\xi$$

$$\leq C_{r,R,F,\psi}e^{-t\nu_0\frac{r^2}{16}}\int_{\mathcal{C}_{\frac{r}{2},2R}}\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\xi_2^2C_{r,R,F}}d\xi_2$$

Et un changement de variable donne l'estimation de dispersion suivante :

$$|K(\varepsilon,t,z)| \leq C_{r,R,F,\nu,\nu'}e^{\frac{-\nu_0 r^2 t}{16}}(\frac{\varepsilon}{t})^{\frac{1}{2}}.$$

3.4 Estimations de Strichartz

En utilisant un argument classique de type TT^* et la dispersion, nous obtenons :

Lemme 3.2 *Estimations de Strichartz*
Supposons que U vérifie sur $[0,T]$ le système:

$$\begin{cases}\partial_t U - LU + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}U = F\\ div\ v = 0\\ U_{/t=0} = U_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\end{cases}$$

et que

$$supp\widehat{U_0} \cup supp\widehat{F}(t) \subset \mathcal{C}_{r,R}.$$

Alors il existe une constante $C = C_{r,R,F}$ telle que l'on ait, pour $i = 3$ ou 4:

$$\|\mathbb{P}_i(U)\|_{L^4([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}\Big(\|\mathbb{P}_i(U_0)\|_{L^2} + \|\mathbb{P}_i(F)\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))}\Big)$$

Comme les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux (comme c'est le cas pour les fluides tournants par exemple), et que la solution a une composante non nulle selon le deuxième espace propre, il nous faut borner les normes des projecteurs $\mathbb{P}_i$ ce qui nous permettra non seulement de donner les estimations des projections de U_{osc} dans les deux derniers sous-espaces propres (correspondant à λ et $\overline{\lambda}$) et donc borner ceci avec les normes de U_0 et F, mais aussi d'estimer la projection $\mathbb{P}_2$, qui tend elle aussi vers z'ero. Nous prouvons ceci dans [3] ce qui nous permet d'obtenir les estimations de Strichartz suivantes:

Lemme 3.3 *Sous les mêmes hypothèses, il existe une constante $C = C_{r,R,F}$ telle que:*

$$\|(\mathbb{P}_3+\mathbb{P}_4)U\|_{L^4(\mathbb{R}_+,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}\Big(\|U_0\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))}\Big)$$

En prenant $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 près de zéro (par exemple $supp\chi \subset B(0,1)$, et $\chi \equiv 1$ près de $B(0,\frac{1}{2})$.) et on décompose la partie oscillante selon :

$$U_{\varepsilon,osc} = (1-\chi(\frac{|D|}{R}))U_{\varepsilon,osc} + \chi(\frac{|D_3|}{r})\chi(\frac{|D|}{R})U_{\varepsilon,osc} + (1-\chi(\frac{|D_3|}{r}))\chi(\frac{|D|}{R})U_{\varepsilon,osc} \tag{7}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ est l'opérateur de Fourier inverse et:

- $\chi(|D|)f = \mathcal{F}^{-1}\Big(\chi(|\xi|)\hat{f}(\xi)\Big)$
- $\chi(|D_3|)f = \mathcal{F}^{-1}\Big(\chi(|\xi_3|)\hat{f}(\xi)\Big)$.

On prend r et R de façon que les deux premières parties soient petites et une fois fixés, on estime la dernière partie grâce aux estimations de Strichartz ce qui donne le théorème 2.2. En utilisant ce résultat et un argument de compacité faible nous obtenons le théorème 2.3.

4 Eléments de démonstration du théorème 2.5

4.1 Les différents systèmes

Ré-écrivons le système primitif en utilisant le projecteur de Leray :

$$\begin{cases} \partial_t U_\varepsilon + \mathbb{P}(U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon) - LU_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}U_\varepsilon = 0 \\ U_{\varepsilon/t=0} = U_0. \end{cases} \tag{8}$$

Remarquons que $(\widetilde{QG})$ est équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{U_{QG}} - L\widetilde{U_{QG}} + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\widetilde{U_{QG}} = -\mathbb{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) + G \\ \widetilde{U_{QG}}_{/t=0} = U_{0,QG} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{9}$$

$$\text{où} \quad G = \mathbb{P}\mathcal{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) - F(\nu-\nu')\Delta\Delta_F^{-2}\begin{pmatrix} -F\partial_2\partial_3^2 \\ F\partial_1\partial_3^2 \\ 0 \\ (\partial_1^2+\partial_2^2)\partial_3 \end{pmatrix}\widetilde{\Omega_{QG}}. \tag{10}$$

En effet, nous pouvons écrire que:

$$\partial_t\widetilde{U_{QG}} - L\widetilde{U_{QG}} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\widetilde{U_{QG}} = (\partial_t\widetilde{U_{QG}} - \Gamma\widetilde{U_{QG}}) + (\Gamma\widetilde{U_{QG}} - L\widetilde{U_{QG}}) + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\widetilde{U_{QG}}$$

$$= -\mathcal{Q}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) + (\Gamma - L)\widetilde{U_{QG}} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\widetilde{U_{QG}}.$$

Et d'après [3] on a:

- $\mathcal{A}\widetilde{U_{QG}} = -(\nabla\Delta_F^{-1}\widetilde{\Omega_{QG}}, 0)$ qui est dans le noyau de $\mathbb{P}$,

- $\widehat{(\Gamma - L)\widetilde{U_{QG}}} = -iF(\nu-\nu')\frac{|\xi|^2}{|\xi|_F^4}\begin{pmatrix} -F\xi_2\xi_3^2 \\ F\xi_1\xi_3^2 \\ 0 \\ (\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_3 \end{pmatrix}\widehat{\widetilde{\Omega_{QG}}}$,

- et $\quad -\mathcal{Q}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) = -\mathbb{P}\mathcal{Q}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) = -\mathbb{P}(Id-\mathcal{P})(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}})$
$$= -\mathbb{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}}) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\widetilde{U_{QG}}.\nabla\widetilde{U_{QG}})$$

Il est important de remarquer que G est la somme de deux termes qui sont tous deux à la fois de divergence nulle et de tourbillon potentiel nul, nous montrons dans [4] des estimations sur ces termes.

Comme dans [9] pour les fluides tournants, on voit bien que l'étude de la différence $V_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}}$ ne fournira aucun résultat de convergence car le forçage G ruine toute approche par des méthodes de type estimation d'énergie/Gronwall.

Nous allons donc utiliser la solution du système linéarisé avec comme force extérieure ce terme G justement pour faire osciller ce terme gênant grâce à la dispersion. On regarde donc le système :

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon - LW_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}W_\varepsilon = -G \\ W_{\varepsilon/t=0} = U_{0,osc}. \end{cases} \tag{11}$$

Pour profiter des effets dispersifs il ne faut pas oublier que nous avons besoin de troncatures en fréquence et que la dispersion ne concerne que les deux dernières valeurs propres de la matrice $\mathbb{B}$, ce qui nous fait introduire le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon^{r,R} - LW_\varepsilon^{r,R} + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}W_\varepsilon^{r,R} = -\mathcal{P}_{r,R}\mathbb{P}_{3+4}G \\ {W_\varepsilon^{r,R}}_{/t=0} = \mathcal{P}_{r,R}\mathbb{P}_{3+4}U_{0,osc}, \end{cases} \tag{12}$$

où $\mathbb{P}_{3+4}$ est le projecteur sur les deux derniers sous-espaces propres de $\widehat{L - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}A}$, et $\mathcal{P}_{r,R}$ est un opérateur de troncature en fréquence :

$$\mathcal{P}_{r,R} = \chi(\frac{|D|}{R})(1-\chi(\frac{|D_3|}{r})), \tag{13}$$

où χ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1,1]$ et valant 1 dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, et ($\mathcal{F}^{-1}$ est l'opérateur de Fourier inverse): $\chi(|D|)f = \mathcal{F}^{-1}\Big(\chi(|\xi|)\hat{f}(\xi)\Big)$ et $\chi(|D_3|)f = \mathcal{F}^{-1}\Big(\chi(|\xi_3|)\hat{f}(\xi)\Big)$.

Nous regardons donc le système vérifié par $U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} - W_\varepsilon^{r,R}$, la nouvelle force extérieure est maintenant $G - \mathcal{P}_{r,R}\mathbb{P}_{3+4}G$ et elle est arbitrairement petite. On définit ensuite :

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}} - W_\varepsilon^{r,R} \\ \delta'_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} W_\varepsilon - W_\varepsilon^{r,R}. \end{cases} \tag{14}$$

Nous renvoyons à [4] pour les détails mais précisons que l'objectif est d'obtenir des estimations d'énergie pour (11) and (12), que l'on utilise pour estimer les énergies de δ'_ε et δ_ε, et montrer qu'elles sont arbitrairement petites en utilisant l'estimation de Strichartz globale suivante :

Lemme 4.1 ([4]) *Estimation de Strichartz globale il existe une constante $K^{r,R}$ telle que si ε est suffisamment petit,*

$$\|W_\varepsilon^{r,R}\|_{L^2(\mathbb{R}_+,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \varepsilon^{\frac{1}{8}} K^{r,R},$$

Ceci permet d'estimer les termes de force extérieure du système de δ'_ε et on montre par un argument de type bootstrap la convergence vers zéro.

Puis γ_ε, qui n'est autre que la différence entre δ_ε et δ'_ε, est estimée et enfin, une injection de Sobolev $\dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$ permet d'obtenir que $U_\varepsilon - \widetilde{U_{QG}}$ converge vers zéro dans l'espace $L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty)$.

References

[1] A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko, On the asymptotic regimes and the strongly stratified limit of rotating Boussinesq equations, *Journal of Theoretical and Comp. Fluid Dynamics*, **9** (1997), 223-251.

[2] P. Bougeault, R. Sadourny, *Dynamique de l'atmosphère et de l'océan*, Editions de l'Ecole polytechnique (2001).

[3] F. Charve, Convergence of weak solutions for the primitive system of the quasi-geostrophic equations, *Asymptotic Analysis* **42 (3 & 4)** (2005), 173-209.

[4] F. Charve, Global well-posedness and asymptotics for a geophysical fluid system, *Communications in Partial Differential Equations*, **29 (11 & 12)** (2004), 1919-1940.

[5] F. Charve, Asymptotics and vortex patches for the quasigeostrophic approximation, accepté pour publication dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*

[6] J.–Y. Chemin, Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **23** (1992), 20-28.

[7] J.–Y. Chemin, Fluides parfaits incompressibles, Astérisque, **230** (1995).

[8] J.–Y. Chemin, A propos d'un problème de pénalisation de type antisymétrique, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **76** (1997), 739-755.

[9] J.–Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, Anisotropy and dispersion in rotating fluids, *Nonlinear Partial Differential Equations and their applications*, Collège de France Seminar, Studies in Mathematics and its applications, **31**, 171-191.

[10] B. Cushman-Roisin, *Introduction to geophysical fluid dynamics*, Prentice-Hall (1994).

[11] P. Embid, A. Majda, Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity, *Communications in Partial Differential Equations*, **21** (1996), 619-658.

[12] H. Fujita, T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archiv for Rationnal Mechanic Analysis*, **16** (1964), 269-315.

[13] I. Gallagher, Applications of Schochet's methods to parabolic equations, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **77** (1998), 989-1054.

[14] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equations, *Journal of Functionnal Anal.*, **133** (1995), 50-68.

[15] J.Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, **63** (1933), 193-248.

[16] J.–L. Lions, R. Temam and S. Wang, Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere, *Topological Methods in Non Linear Analysis*, **4** (1994), 1-35.

[17] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer (1979).