SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Guy Métivier

Stabilité des chocs pour la MHD

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° X, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A10_0>

Stabilité des chocs pour la MHD

Guy Métivier*

3 février 2005

1 Introduction

La stabilité locale des ondes de choc multidimensionnelles pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\partial_t u + \sum \partial_j f_j(u) = 0 \tag{1.1}$$

a été étudiée dans un cadre général par A.Majda [Ma1, Ma2] au début des années 80. Le problème se pose comme un problème aux limites hyperbolique à frontière libre Σ, plus précisément comme un problème de transmission, les conditions aux limites étant données par les conditions de Rankine-Hugoniot

$$\sigma[u] + \sum \nu_j [f_j(u)] = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \tag{1.2}$$

(σ, ν) désignant la normale à Σ. La condition "naturelle" de stabilité s'écrit alors comme une condition de Lopatinski : c'est une condition de stabilité spectrale (ou en ondes planes) pour le problème à coefficients figés (ici le choc plan tangent en chaque point du front) (cf [Ma1] et [Kr, Sa1, Sa2, ChPi] pour l'introduction de ces notions dans le cadre de l'étude des problèmes aux limites hyperboliques). Deux problèmes se posent alors : d'abord, celui de la stabilité linéaire, c'est-à-dire montrer que la condition spectrale implique que le problème linéarisé autour d'un choc (courbe) est bien posé ; ensuite, celui de la stabilité non linéaire, c'est-à-dire montrer que le problème non linéaire (1.1) (1.2) est localement stable pour des petites perturbations.

Par ailleurs, la théorie classique des systèmes hyperboliques de lois de conservation envisage les solutions faibles, et donc les chocs, comme des solutions de viscosité (cf [La, BiBr]). On considère alors des régularisations paraboliques, ou partiellement paraboliques, de (1.1)

$$\partial_t u + \sum \partial_j f_j(u) - \varepsilon \sum \partial_j \big(B_{j,k}(u) \partial_k u \big) = 0. \tag{1.3}$$

Les motivations physiques sont elles aussi très claires : penser aux écoulements à grand nombre de Reynolds (ou faible viscosité) et à la limite Navier-Stokes vers Euler lorsque la viscosité tend vers zéro. Les chocs plans pour (1.1) sont remplacés par des ondes simples $w((\nu \cdot x - \sigma t)/\varepsilon)$ qui sont des solutions exactes de (1.3). Le profil w est solution d' une équation différentielle ; ses limites à $\pm\infty$ sont les valeurs à droite et à gauche du choc plan ; le saut du choc est ainsi

*MAB Université de Bordeaux I, 33405 Talence Cedex , France; metivier@math.u-bordeaux.fr.

remplacé par une transition rapide mais régulière entre les états limites. L'analyse spectrale de stabilité de ces profils de chocs conduit non plus à des déterminants de Lopatinski mais à des *fonctions d'Evans* (cf [GaZu, ZuHo] et [Zu1, Zu2, Zu3]). On retrouve alors les deux problèmes précédents : d'abord étudier le caractère bien posé des équations linéarisées sous des conditions spectrales d'Evans, et ensuite étudier la stabilité non linéaire pour des petites perturbations. Ces deux problèmes, en dimension quelconque, font l'objet d'une série de travaux [GMWZ1, GMWZ2, GMWZ3, GMWZ4]. Les deux premiers concernent une analyse directe de la stabilité des chocs visqueux, d'abord en temps grand pour une viscosité fixée et ensuite localement en temps, lorsque la viscosité tend vers 0. Dans le troisième, on reprend l'approche des problèmes à frontière libre dans le cadre visqueux ; ceci permet d'obtenir des estimations de stabilité maximales qui pour $\varepsilon = 0$ redonnent les estimations hyperboliques. Le quatrième article concerne le cas des viscosités partielles, avec pour application principale le cas des équations de Navier-Stokes.

Cependant, ni les travaux de A.Majda dans le cas hyperbolique ni les travaux cités ci-dessus dans le cas visqueux, ne permettent de traiter le cas des équations de la magnéto-hydrodynamique (MHD) pour la raison que le système hyperbolique est à multiplicité variable. Cet exposé est consacré à une présentation de certains résultats de [MéZu3] pour les systèmes hyperboliques et de [GMWZ5] pour les systèmes avec viscosité, où est abordée l'analyse de certains systèmes à multiplicité variable avec des applications à la MHD.

Pour les problèmes aux limites hyperboliques, l'analyse est bien comprise dans deux situations dont aucune ne recouvre entièrement l'autre. Il y a d'abord la théorie des systèmes symétriques et des conditions aux limites dissipatives [Fr1, Fr2, FrLa]. Ensuite, il y a la théorie de Kreiss, pour les problèmes aux limites hyperboliques vérifiant la condition dite de Lopatinski uniforme ([Sa1, Sa2, Kr, MaOs, Mé3]). Dans les deux cas, l'estimation d'énergie fondamentale est obtenue à l'aide de symétriseurs et d'intégrations par partie. Dans la première théorie, l'estimation L^2 est immédiate : le symétriseur est donné et la dissipativité du terme de bord est supposée. Par contre, dans la théorie de Kreiss, la construction du symétriseur est précisément le point délicat. Ce sont des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels dont le symbole est fourni par une analyse symbolique basée sur l'étude des problèmes à coefficients figés. Cette analyse a d'abord été faite par Kreiss ([Kr] dans le cas des systèmes strictement hyperboliques (voir aussi [Ral] pour les systèmes complexes et le chapitre 7 de Chazarain-Piriou [ChPi]). Comme remarqué par Majda-Osher, la stricte hyperbolicité ne sert qu'à un seul moment, pour mettre le système sous une forme normale et la construction de Kreiss s'étend immédiatement aux systèmes que l'on peut réduire à cette forme normale. Cette condition est appelée *block structure condition* dans [MaOs], on dira ici hypothèse de structure de bloc. Ils ont aussi remarqué que beaucoup de systèmes physiques vérifient cette condition, notamment le système d'Euler de la dynamique des gaz ([Ma1]). Il a été montré ultérieurement que cette condition est automatiquement satisfaite dès que les valeurs propres du système hyperboliques sont semi-simples et de multiplicité constante (see [Mé3]). C'est donc naturellement sous cette hypothèse de multiplicité constante qu'on a travaillé dans [GMWZ1– 4]. Mais, notamment pour couvrir l'exemple intéressant de la MHD, il est utile de pousser l'analyse un peu plus loin.

2 Le cas hyperbolique

2.1 Racines multiples

Considérons un système $N \times N$ de symbole

$$L(p, \tau, \xi) = \tau \mathrm{Id} + A(p, \xi) = \tau \mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j(p). \tag{2.1}$$

Le polynôme caractéristique est $\Delta(p, \tau, \xi) = \det L(p, \tau, \xi)$. Rappelons les définitions suivantes.

Définition 2.1. *(i) Le polynôme $\pi(\eta)$ est hyperbolique dans la direction ν si $\pi(\nu) \neq 0$ et pour tout $\eta' \notin \mathbb{R}\nu$, toutes les racines $z \in \mathbb{C}$ de $\pi(z\nu + \eta') = 0$ sont réelles.*

(ii) (2.1) *est hyperbolique dans la direction ν si Δ l'est.*

(iii) L est hyperbolique symétrique dans la direction ν (au sens de Friedrichs) s'il existe une matrice auto-adjointe $S(p)$, C^∞ en p, telle que les $S(p)A_j(p)$ sont auto-adjointes et $S(p)L(p, \nu)$ est définie positive.

Dans la suite, on suppose toujours que L est hyperbolique dans la direction $dt = (1, 0, \ldots, 0)$.

Si $\Delta(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi}) = 0$, alors $-\underline{\tau}$ est une valeur propre de $A(\underline{p}, \underline{\xi})$. On note m sa multiplicité algébrique et m_g sa multiplicité géométrique.

Définition 2.2. *Soit $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi})$ une racine de $\Delta(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi}) = 0$ de multiplicité algébrique m.*

i) $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi})$ est algébriquement régulière si, localement, il existe m fonctions régulières réelles $\lambda_j(p, \xi)$, analytiques en ξ, telles que

$$\Delta(p, \tau, \xi) = e(p, \tau, \xi) \prod_{j=1}^{m} \big(\tau + \lambda_j(p, \xi)\big) \tag{2.2}$$

où $e(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi}) \neq 0$.

ii) $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\xi})$ est géométriquement régulière si en plus il existe localement m fonctions $e_j(p, \xi)$ régulières, analytiques en ξ, telles que

$$A(p, \xi) e_j(p, \xi) = \lambda_j(p, \xi) e_j(p, \xi), \tag{2.3}$$

et les $e_1, \ldots, e_m$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^N$.

Remarques 2.3. a) Les racines simples ($m = 1$) sont géométriquement régulières.

b) Les racines de multiplicité constante sont algébriquement régulières. Dans ce cas, tous les λ_j sont égaux. Elles sont géométriquement régulières si elles sont en outre semi-simples ($m = m_g$). Dans ce cas, les e_j forment une base régulière de l'espace propre associé.

On rappelle les résultat suivant :

Proposition 2.4. *Soit $\pi(\tau, \xi)$ un polynôme hyperbolique dans la direction $dt = (1, 0, \ldots, 0)$. Si $(\underline{\tau}, \underline{\xi}) \neq 0$ est une racine de multiplicité $m \geq 1$ of $\pi(\cdot, \underline{\xi}) = 0$, alors*

$$\pi(\underline{\tau} + \tau, \underline{\xi} + \xi) = \underline{\pi}^{(m)}(\tau, \xi) + O(|\tau, \xi|^{m+1}) \tag{2.4}$$

où $\underline{\pi}^{(m)}$ est homogène de degré m en (τ, ξ) et hyperbolique dans la direction dt.

2.2 Fréquences rentrantes, sortantes, rasantes

La notion d'onde entrante, sortante ou rasante joue un rôle fondamental dans l'étude des problèmes aux limites. Ces notions s'étendent naturellement aux valeurs propres multiples. On note maintenant $(y, x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ les variables spatiales, (η, ξ) les variables duales. Le bord considéré est $\{x = 0\}$. Pour une valeur propre $\lambda(\eta, \xi)$ régulière, la classification dépend du signe de $\partial_\xi \lambda$ qui donne la position du champ Hamiltonien par rapport au bord.

Considérons une racine $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$ de Δ, de multiplicity m en τ. On note $\underline{\Delta}^{(m)}$, le terme d'ordre m dans le développement de Taylor de $\Delta(\underline{p}, \cdot)$ en $(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$. D'après la Proposition 2.4, $\underline{\Delta}^{(m)}$ est hyperbolique dans la direction dt. Soit $\underline{\Gamma}_+$ la composante de dt dans $\underline{\Delta}^{(m)} > 0$. C'est un cône ouvert convexe et $\underline{\Delta}^{(m)}$ est hyperbolique dans toutes les directions de $\underline{\Gamma}_+$.

Définition 2.5. *i) $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$ est non rasante si le bord $\{x = 0\}$ est non caractéristique pour $\underline{\Delta}^{(m)}$.*

ii) $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$ est totalement entrante si $dx \in \underline{\Gamma}_+$ et totalement sortante si $-dx \in \underline{\Gamma}_+$.

Exemple 2.6. Pour une racine algébriquement régulière (2.2), on a

$$\underline{\Delta}(\tau, \eta, \xi) = \beta \prod_j \big(\tau + \partial_\eta \lambda_j \cdot \eta + \partial_\xi \lambda_j \xi\big),$$

où les coefficients sont évalués en $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$. Chaque mode peut être rasant, entrant ou sortant suivant que $\partial_\xi \lambda_j$ est nul, positif ou négatif. D'après la Définition 2.5, $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$ est non rasant si tous les $\partial_\xi \lambda_j$ sont non nuls et totalement entrant [resp. sortant] si tous les $\partial_\xi \lambda_j$ sont > 0 [resp. < 0].

2.3 La condition de Lopatinski

Considérons le système $L(p, \partial_t, \partial_y, \partial_x)u = f$ sur l'ouvert $\{x > 0\}$. On suppose que le bord $\{x = 0\}$ est *non caractéristique*, c'est-à-dire que la matrice A_d est inversible. Par transformation de Fourier-Laplace en (t, y), on se ramène aux équations

$$\partial_x u - H(p, \zeta)u = f, \quad G(p, \zeta) = -A_d^{-1}(p)\Big(i\tau + \gamma)\mathrm{Id} + \sum \eta_j A_j(p)\Big) \tag{2.5}$$

avec $\zeta = (\tau - i\gamma, \eta)$, identifié à (τ, η, γ). On y ajoute des conditions aux limites, qui après transformation de Fourier Laplace sont de la forme

$$M(p, \zeta)u_{|x=0} = g. \tag{2.6}$$

On suppose ici que M est une fonction régulière de p et $\zeta \in \mathbb{R}^{d+1} \backslash \{0\}$, homogène de degré 0 en ζ. Par homogénéité, on peut se limiter au cas où $\zeta \in S^d_+ = \{|\zeta| = 1; \gamma > 0\}$.

L'hyperbolicité de L implique que pour $\zeta \in S^d_+$, les valeurs propres de $H(p, \zeta)$ ont une partie réelle non nulle. Les solutions L^2 de $(\partial_x - H)u = 0$ sont les fonctions $u(x) = e^{xH}h$ avec $h \in \mathbb{E}_-(p, \zeta)$, où $\mathbb{E}_-(p, \zeta)$ désigne l'espace invariant par $H(p, \zeta)$ associé au spectre situé dans $\{\mathrm{Re}\, \mu < 0\}$. La dimension de $\mathbb{E}_-$ est égale au nombre N_+ de valeurs propres positives de A_d. On suppose que le nombre de conditions aux limites dans (2.6) est le bon, i.e.

$$\dim \ker M(p, \zeta) = N_- = N - N_+, \tag{2.7}$$

Pour simplifier, on suppose aussi que M est surjective, c'est-à-dire que M est une matrice $N_+ \times N$.

Le problème (2.5) (2.6) est bien posé, si est seulement si

$$\mathbb{E}_-(p,\zeta) \cap \ker M(p,\zeta) = \{0\}. \tag{2.8}$$

C'est la condition de Lopatinski *faible*. Pour revenir au problème initial on doit aussi avoir des estimations uniformes en ζ. Suivant Kreiss et Majda, les estimations maximales pour les solutions de (2.5) (2.6) sont :

$$\gamma\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + |u(0)|^2 \lesssim \frac{1}{\gamma}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + |g|^2, \tag{2.9}$$

où $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante C indépendante des paramètres (ici u, f, g et $\zeta \in S^d_+$) telle que $A \le CB$. Une condition nécessaire est que pour toute donnée initiale $u(0) \in \mathbb{E}_-(p,\zeta)$, la solution de $(\partial_x - H)u = 0$ vérifie (2.9), donc qu'il existe C tel que

$$\forall p,\ \forall \zeta \in S^d_+,\ \forall h \in \mathbb{E}_-(p,\zeta), \quad |h| \le C|M(p,\zeta)h|. \tag{2.10}$$

Définition 2.7. *Le déterminant de Lopatinski associé à L, M est*

$$D(p,\zeta) = \det\big(\mathbb{E}_-(p,\zeta), \ker M(p,\zeta)\big).$$

On dit que (L,M) vérifie la condition de Lopatinski uniforme sur ω s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|D(p,\zeta)| \ge c$ pour tout $(p,\zeta) \in \omega \times S^d_+$.

Dans cette définition, le determinant est formé en prenant des base orthonormées arbitraires de $\mathbb{E}_-$ et $\ker M$ (noter que $\dim \mathbb{E}_- + \dim\ker M = N$).

2.4 Symétriseurs

Définition 2.8. *Un symétriseur borné de H sur Ω, est une matrice $\Sigma(p,\zeta)$ définie pour $(p,\zeta \in \Omega$ telle que pour des constantes C, $c > 0$, on a pour tout sur Ω,*

$$\Sigma(p,\zeta) = \Sigma^*(p,\zeta), \qquad |\Sigma(p,\zeta)| \le C, \tag{2.11}$$

$$\operatorname{Re}\Sigma(p,\zeta)H(p,\zeta) \ge c\gamma \mathrm{Id}, \quad \textit{pour } \gamma > 0. \tag{2.12}$$

C'est un symétriseur de Kreiss pour (H,M) si en plus on a

$$\Sigma(p,\underline{\zeta}) + CM^*(p,\zeta)M(p,\zeta) \ge c\mathrm{Id}. \tag{2.13}$$

Le symétriseur est régulier s'il est C^∞ sur Ω.

Remarque 2.9. En pratique, on montre un peu plus que (2.12) : on montre que

$$\operatorname{Re}\Sigma(p,\zeta)H(p,\zeta) = \sum V_k^*\Sigma_k V_k, \tag{2.14}$$

avec V_k et Σ_k régulières et vérifiant *i*) $\sum V_k^* V_k$ est définie positive, *ii*) ou bien Σ_k est définie positive ou bien $\Sigma_k = \gamma\Sigma_{k,1}$ avec $\Sigma_{k,1}$ définie positive.

En intégrant par parties le produit scalaire de (2.5) avec Σu, on obtient immédiatement :

Lemme 2.10. *S'il existe un symétriseur de Kreiss borné pour (H,M) sur $\omega \times S^d_+$ alors l'estimation maximale* (2.9) *est vraie pour $(p,\zeta) \in \omega \times S^d_+$.*

Dans [Kr, Ma1], on procède de la façon suivante : on construit une famille *universelle* de symétriseurs Σ^κ pour L, et on montre ensuite que si la condition aux limites$M$ vérifie la condition de Lopatinski uniforme, alors Σ^κ est un symétriseur de Kreiss pour (H, M) pourvu que κ soit assez grand.

Définition 2.11. *Une famille de symétriseurs Σ^κ sur des voisnages Ω^κ de $(\underline{p}, \check{\underline{\zeta}})$ est une K-famille s'il existe une décomposition*

$$\mathbb{C}^N = \underline{\mathbb{E}}_H^- \oplus \underline{\mathbb{E}}_H^+, \quad \textit{avec } \dim \underline{\mathbb{E}}^- = N_-, \tag{2.15}$$

telle que

$$\Sigma^\kappa(\underline{p}, \check{\underline{\zeta}}) \geq m(\kappa)\Pi_+^*\Pi_+ - \Pi_-^*\Pi_-, \quad \lim_{\kappa\to+\infty} m(\kappa) = +\infty, \tag{2.16}$$

où les $\Pi_\pm$ sont les projecteurs associés à la décomposition (2.15)*.*

Remarque 2.12. S'il existe une K-famille de symétriseurs, alors $\underline{\mathbb{E}}^-$ est la limite des espaces $\mathbb{E}_-(p, \check{\zeta})$ lorsque $(p, \check{\zeta}) \to (\underline{p}, \check{\underline{\zeta}})$ avec $\gamma > 0$ ([MéZu2]). Donc $\underline{\mathbb{E}}^-$ est uniquement déterminé. Par contre, $\underline{\mathbb{E}}^+$ est un supplémentaire arbitraire, quitte à changer $m(\kappa)$ et multiplier Σ^κ par un facteur positif.

Proposition 2.13. *Si Σ^κ est une K-famille de symétrizeurs de H et si (H, M) vérifie la condition de Lopatinski uniforme, alors pour κ assez grand Σ^κ est un symétriseur de Kreiss pour (H, M) au voisinage de $(\underline{p}, \underline{\zeta})$.*

2.5 Construction des symétriseurs

Fixons $\underline{\zeta} \in \overline{S}_+^d$ et notons $\underline{\mu}_k$ les valeurs propres distinctes de $H(\underline{p}, \underline{\zeta})$. Pour (p, ζ) voisin de $(\underline{p}, \underline{\zeta})$, on a

$$V^{-1}HV = \mathrm{diag}(H_k) \tag{2.17}$$

où H_k a son spectre dans un petit disque centré en $\underline{\mu}_k$. L'avantage de la notion de K-famille est qu'elle est réductible par blocs et qu'il suffit de construire des K-familles pour chaque bloc H_k de dimension notée N_k.

Quand le mode est *elliptique*, i.e. quand $\mathrm{Re}\,\underline{\mu}_k \neq 0$, la construction est facile (see e.g. [Kr, ChPi]). On choisit naturellement $\underline{\mathbb{E}}_{k,-} = \{0\}$ si $\mathrm{Re}\,\underline{\mu}_k > 0$ et $\underline{\mathbb{E}}_{k,-} = \mathbb{C}^{N_k}$ si $\mathrm{Re}\,\underline{\mu}_k < 0$. On a alors

$$\begin{aligned} &i) \quad \mathrm{Re}\,(\Sigma_k^\kappa \check{H}_k) > 0, \\ &ii) \quad \mathrm{Re}\,\Sigma_k^\kappa \geq \kappa\mathrm{Id} \quad if \quad \mathrm{Re}\,\underline{\mu}_k > 0, \\ & \quad \mathrm{Re}\,\Sigma_k^\kappa \geq -\mathrm{Id} \quad if \quad \mathrm{Re}\,\underline{\mu}_k < 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Considérons maintenant un mode non elliptique, $\underline{\mu}_k = i\check{\underline{\xi}}$ avec $\check{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}$. L'hyperbolicité implique que $\underline{\gamma} = 0$ et que $-\underline{\tau}$ est une valeur propre de $A(\underline{p}, \underline{\eta}, \check{\underline{\xi}})$. La construction de K-familles de symétriseurs est le point central du travail de O.Kreiss [Kr]. Comme remarqué dans [MaOs, Ma1], la construction s'étend immédiatement au cas où le bloc H_k vérifie *l'hypothèse de structure de bloc*. On dispose maintenant d'une caractérisation géométrique de cette condition :

Théorème 2.14 ([MéZu3]). *Le bloc H_k vérifie l'hypothèse de structure de bloc de Majda si et seulement si $(\underline{p}, \underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\xi})$ est une racine géométriquement régulière de Δ.*

On en déduit l'existence de K-familles de symétriseurs lorsque le mode est géométriquement régulier.

Pour étudier le cas de modes non géométriquement réguliers, on part de la remarque suivante : la construction de Kreiss est beaucoup plus simple lorsque le mode (associé à une valeur propre simple ou de multiplicité constante) est *hyperbolique* c'est-à-dire non rasant ; dans ce cas on choisit $\underline{\mathbb{E}}_{k,-} = \{0\}$ si le mode est sortant et $\underline{\mathbb{E}}_{k,-} = \mathbb{C}^{N_k}$ s'il est entrant ; il suffit de construire *un* symétriseur et de le multiplier par κ dans le cas sortant. Dans le cas d'une valeur propre multiple générale totalement entrante ou sortante, on peut tout à fait répéter cette manœuvre ; il suffit de construire un symétriseur pour le bloc H_k, ce qui est quasi-immédiat par restriction, si le système initial est symétrique au sens de Friedrichs.

Au final, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.15 ([MéZu3]). *Soit L hyperbolique symétrique au sens de Friedrichs. On suppose que toutes les racines réelles de l'équation caractéristique sont soit géométriquement régulières soit totalement rentrantes ou sortantes. Alors,*

i) il existe des K-familles régulières de symétriseurs,

ii) le fibré $\mathbb{E}_-(p, \zeta)$ se prolonge continûment à $\gamma = 0$;

iii) si en outre les conditions aux limites vérifient la condition de Lopatinski uniforme, il existe un symétriseur de Kreiss régulier et les estimations maximales (2.9) *sont vérifiées.*

Remarque 2.16. Ce théorème n'est que la première étape dans l'analyse de stabilité : pour un problème à coefficients variables, p est à remplacer par une fonction de $p(t, y, x)$. Le théorème fournit les symboles $\Sigma(p(t, y, x); \zeta)$; le symétriseurs sont alors les opérateurs pseudo ou para-différentiels associés à ces symboles, cf [ChPi, Ma1, Mé2].

3 Le cas hyperbolique-parabolique

3.1 Hypothèses de structure

Considérons un système $N \times N$ de la forme

$$L_\varepsilon u := \partial_t u + A(p, \partial)u - \varepsilon B(p, \partial)u \tag{3.1}$$

avec

$$A(p, \xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j(p), \quad B(p, \xi) = \sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k B_{j,k}(p).$$

Pour couvrir le cas des viscosités physiques, on suppose que, après un bon choix d'inconnues, celles-ci se décomposent en $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^{N-N'} \times \mathbb{R}^{N'}$ et que les matrices ont une structure de la forme (voir [GMWZ4] pour plus de commentaires)

$$B_{jk}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{jk}^{22}(p) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

On renvoie aussi à [GMWZ4, GMWZ5] pour une discussion des hypothèses suivantes, motivées par les applications aux équations de Navier-Stokes ou à la MHD.

Hypothèse 3.1. (H1) *Il existe $c > 0$ tel que pour tout p et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ les valeurs propres de $iA(u,\xi) + B(u,\xi)$ vérifient*

$$\operatorname{Re}\mu \geq c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\,. \tag{3.3}$$

(H2) *Il existe $c > 0$ tel que pour tout p et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ les valeurs propres de $B^{22}(p,\xi)$ vérifient* $\operatorname{Re}\mu \geq c|\xi|^2$.

Remarque 3.2. (H1) implique que L_0 est hyperbolique.

On considère un problème aux limites sur $\{x > 0\}$, en notant maintenant $(y,x) \in \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$ les variables spatiales.

Hypothèse 3.3. (H3) *$A_d(p)$ est inversible.*
(H4) *Les valeurs propres de $A^{11}(p,\eta,\xi)$ sont réelles semi-simples et de multiplicité constantes et $\partial_t + A^{11}$ est hyperbolique dans la direction dx.*

(H3) signifie que le bord est non caractéristique pour L_0. (H4) est une hypothèse "technique", utile pour les hautes fréquences. Dans les applications à Navier-Stokes ou la MHD, $\partial_t + A^{11}$ est une équation de transport.

3.2 Stabilité spectrale

On effectue le changement d'echelles $(t,y,x) = \varepsilon(\tilde{t},\tilde{y},z)$,, on multiplie l'équation par ε et on effectue une transformation de Fourier-Laplace en variables tangentielles. On obtient alors le système

$$-B_{d,d}\partial_z^2 u + \mathcal{A}(p,\zeta)\partial_z u + \mathcal{M}(p,\zeta)u, \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}(p,\zeta) = A_d - \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j(B_{j,d}+B_{d,j}) \\ \mathcal{M}(p,\zeta) = (i\tau+\gamma)\mathrm{Id} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A_j + \sum_{j,k=1}^{d-1}\eta_j\eta_k B_{j,k}\,. \end{cases}$$

On réduit (3.4) au premier ordre en posant $U = {}^t(u,\partial_z u^2)$. Le système en U est de la forme

$$G_d\partial_z U - MU, \quad G_d(p,\zeta) = \begin{pmatrix} -\mathcal{A} & \overline{B}_d \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0_{N\times N'} \\ 0_{N'\times N} & \mathrm{Id}_{N'\times N'} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

avec, dans la décomposition $u = (u^1,u^2)$,

$$\overline{B}_d(p) = \begin{pmatrix} 0_{N-N'\times N'} \\ B^{22}_{d,d}(p) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0_{N'\times N-N'} & \mathrm{Id}_{N'\times N'} \end{pmatrix}.$$

Les hypothèses (H3) et (H4) impliquent que $G_d(p,\zeta)$ est inversible et on aboutit à l'équation

$$\partial_z U - G(p,\zeta)U = F \quad G := G_d^{-1}M. \tag{3.6}$$

On y ajoute des conditions aux limites

$$\Gamma(p,\zeta)U_{|x=0} = 0 \tag{3.7}$$

(H1) implique que

Lemme 3.4. *Pour* $\zeta \in \mathbb{R}^{d+1}_{+}\backslash\{0\} := \big\{(\tau,\eta,\gamma) \neq 0, \gamma \geq 0\big\}$*,* $G(p,\zeta)$ *n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et le nombre* $\tilde{N}_{-}$ *de valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, dans* $\{\mathrm{Re}\,\mu < 0\}$ *est constant.*

Pour $\zeta \in \mathbb{R}^{d+1}_{+}\backslash\{0\}$, on note $\mathbb{E}^{-}(p,\zeta)$ l'espace invariant de $G(p,\zeta)$ associé au spectre dans $\{\mathrm{Re}\,\mu < 0\}$. Alors $\dim \mathbb{E}^{-} = \tilde{N}^{-}$ et le problème (3.6) (3.7) est bien posé si et seulement si

$$\dim\ker\Gamma + \dim\mathbb{E}^{-} = N + N', \tag{3.8}$$

$$\mathbb{E}^{-} \cap \ker\Gamma = \{0\}. \tag{3.9}$$

Le déterminant de Lopatinski (ou fonction d'Evans) associé est alors

$$D(p,\zeta) = \det\big(\mathbb{E}^{-}(p,\zeta), \ker\Gamma(p,\zeta)\big). \tag{3.10}$$

On remarque que (3.8) dit simplement que l'on a le bon nombre de conditions aux limites et que le déterminant est défini. Ensuite, (3.9) est équivalent à $D(p,\zeta) \neq 0$ qui est la condition de *stabilité faible.* Les conditions de *stabilité forte* (ou uniforme) s'obtiennent en imposant des conditions sur le comportement quand $\zeta \to 0$ et $|\zeta| \to \infty$. Le lecteur notera qu'une grande différence avec le cas hyperbolique est que la matrice G *n'est pas homogène en* ζ.

3.3 L'analyse basse fréquence

Comme dans le cas hyperbolique, le but essentiel est d'obtenir des estimations a priori par des méthodes de symétriseurs (multiplicateurs de Fourier dans le cas des coefficients constants). Le cas des hautes ($|\zeta|$ grand) et moyennes ($0 < c \leq |\zeta| \leq C$) fréquences est traité dans [MéZu1] quand $N' = N$ et dans [GMWZ4] quand $N' < N$. On se sert uniquement des hypothèses (H1) à (H4) et des conditions de stabilité uniforme ad hoc. Concentrons nous maintenant sur les basses fréquences, c'est-à-dire sur le cas où $|\zeta|$ est petit. Dans les articles cités, l'analyse basse fréquence est faite sous l'hypothèse supplémentaire que les valeurs propres du systèmes hyperbolique L_0 sont de multiplicité constante. Comme dans le cas hyperbolique, certaines situations de valeurs propres de multiplicité variable peuvent être admises, on renvoie à [GMWZ5] pour les détails.

Lemme 3.5. *Au voisinage de* $(\underline{p}, 0)$*, on a*

$$V^{-1}GV = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

où P *est de dimension* $N' \times N'$ *et ses valeurs propres vérifient* $|\mathrm{Re}\,\mu| \geq c > 0$ *et* H *est de dimension* $N \times N$ *et*

$$H(p,\zeta) = H_0(p,\zeta) + O(|\zeta|^2), \quad H_0 =:= -A_d^{-1}\Big((i\tau+\gamma)\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A_j(p)\Big) \tag{3.12}$$

Autrement dit, H est une perturbation de l'opérateur H_0 associé à l'opérateur hyperbolique L_0. La notion de symétriseur, de symétriseur de Kreiss, de K-famille de symétriseurs est complètement parallèle à ce qui a été discuté au paragraphe 2.

La construction des symmetriseurs pour le bloc elliptique P est standard (cf [MéZu1]). Notant $\mathbb{E}_P^{\pm}(p,\zeta)$ les espaces invariants de $P(p,\zeta)$ associés au spectre situé dans $\{\pm\mathrm{Re}\,\mu > 0\}$. il existe des $\Sigma_P^{\kappa}(p,\zeta)$, C^∞ au voisinage de ($\underline{\cdot}$0) tels que

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \mathrm{Re}\,\Sigma_P^\kappa P > 0,\\
&ii) \quad \mathrm{Re}\,\Sigma_P^\kappa \geq \kappa(\Pi_P^+)^*\Pi_P^+ - (\Pi_P^-)^*\Pi_P^-
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

où les $\Pi_P^{\pm}$ sont les projecteurs sur $\mathbb{E}_P^{\pm}$.

Pour comprendre H, on passe en coordonnées polaires $\zeta = \rho\check\zeta, \quad \rho = |\zeta|, \quad \check\zeta \in S^d$. On a alors

$$
H(p,\zeta) = \rho\check H(p,\check\zeta,\rho), \quad \check H(p,\check\zeta,\rho) = H_0(p,\check\zeta) + O(\rho). \tag{3.14}
$$

On fixe $\underline{\check\zeta} \in \overline{S}_+^d$, i.e. $\underline{\check\zeta} = (\underline{\check\tau},\underline{\check\eta},\underline{\check\gamma})$ dans la sphère unité avec $\underline{\check\gamma} \geq 0$. Le but est de construire des symétriseurs de $\check H$ pour $(p,\check\zeta,\rho)$ près de $(\underline{p},\underline{\check\zeta},0)$. Les définitions sont analogues à celles de la Définition 2.8, à ceci près qu'on remplace (2.12) par

$$
\mathrm{Re}\,\check\Sigma\check H \geq c(\check\gamma + \rho)\mathrm{Id}, \quad \text{pour } \check\gamma \geq 0,\ \rho > 0. \tag{3.15}
$$

Comme à la Remarque 2.9, on construit en fait les $\check\Sigma$ tels que $\mathrm{Re}\,\check\Sigma^H\check H = \sum V_k^*\Sigma_k V_k$, avec $\sum V_k^* V_k$ définie positive et, ou bien Σ_k définie positive ou bien $\Sigma_k = \gamma\Sigma_{k,1} + \rho\Sigma_{k,2}$ avec $\Sigma_{k,1}$ et $\Sigma_{k,2}$ définies positives.

On définit de même la notion de K-familles de symétriseurs.

3.4 Construction des symétriseurs

On fixe $\underline{\check\zeta} \in \overline{S}_+^d$. En notant $\underline{\mu}_k$ les valeurs propres distinctes de $H_0(\underline{p},\underline{\check\zeta})$, Pour $(p,\check\zeta,\rho)$ voisin de $(\underline{p},\underline{\check\zeta},0)$, on a

$$
V^{-1}\check H V = \mathrm{diag}(\check H_k) \tag{3.16}
$$

où $\check H_k$ a son spectre dans un petit disque centré en $\underline{\mu}_k$. On construit les K-familles pour chaque bloc séparément.

Le cas des blocs elliptiques est toujours aussi simple. Il reste le cas des blocs non elliptiques, pour lesquels $\underline{\check\gamma} = 0$ et $\underline{\mu}_k = i\underline{\check\xi} \in i\mathbb{R}$. Alors, $(\underline{p},\underline{\check\tau},\underline{\check\eta},\underline{\check\xi})$ est un point de la variété caratéristique de L_0 et $-\underline{\tau}$ est une valeur propre de la matrice $A(\underline{p},\underline{\check\eta},\underline{\check\xi})$.

Dans [GMWZ5], on définit une notion de *structure de bloc généralisée* pour les blocs $\check H_k$ qui sont des perturbations $\check H$ des blocs $H_{0,k}$ de H_0. On montre aussi :

Théorème 3.6 ([GMWZ5]). *i) Si le block $\check H_k$ vérifie la structure de bloc généralisée, alors il existe des K-familles de symétriseurs réguliers de $\check H_k$ au voisinage de $(\underline{p},\underline{\check\zeta},0)$.*

ii) Si $(\underline{p},\underline{\check\tau},\underline{\check\eta},\underline{\check\xi})$ est associé à une valeur propre semi-simple de multiplicité constante de $A(p,\check\eta,\check\xi)$, alors le bloc $\check H_k$ vérifie la structure de bloc généralisée au voisinage de $(\underline{p},\underline{\check\zeta},0)$.

Ce résultat précise un théorème de [MéZu1], où il est montré que si la valeur propre est semi-simple de multiplicité constante alors il existe des K-familles de symétriseurs. Mais l'analogue du Théorème 2.14 est faux :

Remarque 3.7. La condition que $(\underline{p},\underline{\check\tau},\underline{\check\eta},\underline{\check\xi})$ soit géométriquement régulier est nécessaire mais non suffisante pour que la condition de structure de bloc *généralisée* soit satisfaite.

Pour expliquer le rôle particulier de la multiplicité constante l'influence de la perturbation parabolique, considérons le cas où $(\underline{p}, \check{\underline{\tau}}, \check{\underline{\eta}}, \check{\underline{\xi}})$ est non rasant. Il est associé à des valeurs propres lisses λ_j, qui se croisent au point considéré. Dans le cas hyperbolique, l'hypothèse de régularité implique une diagonalisation totale de $H_{k,0}$ et la construction de symétriseurs est facile. On note toutefois que le point central de la construction des symétriseurs est de donner un poids $O(\kappa)$ aux modes sortants et un poids $O(1)$ aux modes entrants (cf (2.16)), ce qui ne pose pas de problèmes si ces modes sont découplés. Par contre, la perturbation $\check{H}_k$ en général, ne respecte pas la diagonalisation de $H_{k,0}$ et couple les différents modes. Le couplage des modes entrants et sortants empêche de leur accorder des poids d'ordre différents et est un obstacle réel à la construction de symétriseurs réguliers. Par contre, dans le cas d'une valeur propre de multiplicité constante, tous les λ_j sont égaux ; tous les modes sont de même nature, entrants ou sortants et la difficulté précédente est évitée.

Dans les cas d'une racine $(\underline{p}, \check{\underline{\tau}}, \check{\underline{\eta}}, \check{\underline{\xi}})$ quelconque mais totalement entrante ou totalement sortante, on le problème de séparation des modes ne se pose pas et la construction de symétriseurs est à nouveau très simple si le système initial est symétrique, c'est à dire s'il existe une matrice $S(p)$ définie positive telle que les SA_j et $SB_{j,k}$ sont symétriques. Au final, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.8 ([GMWZ5]). *Soit L_ε un système* (3.1)*, symétrique et vérifiant les hypothèses* $(H1)$ *à* $(H4)$*. On suppose en outre que toutes les racines réelles de l'équation caractéristique de L_0 sont soit semi-simples de multiplicité constante, soit totalement rentrantes ou sortantes. Alors, il existe des K-familles régulières de symétriseurs,*

4 Brève revue de l'analyse de stabilité

4.1 Chocs et problèmes de transmission à frontière libre

Considérons un système de la forme (1.3). Pour $\varepsilon = 0$, le système est supposé hyperbolique. Un choc, de front $\Sigma = \{x = \psi(t, y)\}$ dans des variables spatiales $(y, x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, est une solution

$$u_0(t, y, x) = \begin{cases} u_0^- & x \leq \psi(y, t) \\ u_0^+ & x \geq \psi(y, t), \end{cases} \tag{4.1}$$

régulière et vérifiant (1.1) de part et d'autre du front et satisfaisant les conditions de Rankine-Hugoniot (1.2). Le front est redressé en utilisant le changement de variables $\tilde{x} = x - \psi(t, y)$ qui conduit aux équations

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u, \psi) := D_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(u) D_j u - \varepsilon \sum_{j,k=1}^{d} D_j\big(B_{j,k}(u) D_k u\big) = 0 \tag{4.2}$$

avec $A_j(u) = f_j'(u)$, $D_0 = \partial_t - \partial_t\psi\partial_d$, $D_j = \partial_j - \partial_j\psi\partial_d$ pour $1 \leq j < d$ et $D_d = \partial_d$. Pour $\varepsilon = 0$, (4.2) est exactement l'équation étudiée par [Ma1, Ma2]. Dans ce cas, les conditions de transmission s'écrivent

$$\partial_t\psi\big[u\big] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j\psi\big[f_j(u)\big] = \big[f_d(u)\big] \quad \text{sur } \{\tilde{x}_d = 0\}. \tag{4.3}$$

Dans le cas où $\varepsilon > 0$ on ajoute à (4.2) les conditions de transmission naturelles

$$\big[u\big] = 0, \quad \big[B_{\nu,\nu}(u, d\psi)\partial_d u\big] = 0 \quad \text{sur } \{\tilde{x}_d = 0\}, \tag{4.4}$$

où $B_{\nu,\nu}(u, d\psi)$ est le coefficient de ∂_d^2 dans (4.2).

Dans la suite, on travaille uniquement avec (4.2) et on oublie les $\tilde{}$.

4.2 Profils de choc et solutions approchées

Une analyse BKW montre que près de $x = 0$ la solution de (4.2) est de la forme

$$u(t, y, x) = w\big(t, y, \frac{x}{\varepsilon}\big) \tag{4.5}$$

où $z \mapsto w(t, y, z)$ est une solution de

$$A_\nu(w, d\psi)\partial_z w - \partial_z\big(B_{\nu,\nu}(w, d\psi)\partial_z w\big) = 0, \tag{4.6}$$

$A_\nu(u, d\psi)$ désigant le coefficient de ∂_d dans l'équation (4.2). Cette équation est posée en chaque point du front (t, y) et $d\psi$ est calculée en ce point. De plus, w est un profil de choc associé à (4.1), ou plutôt à sa version dans les variables redressées, si

$$\lim_{z \to -\infty} w(t, y, z) = u_0^-(t, y, 0), \qquad \lim_{z \to +\infty} w(t, y, z) = u_0^+(t, y, 0). \tag{4.7}$$

Recollant ce profil avec la solution $u_0^\pm$ conduit à une solution approchée de (4.2). La question est de construire une solution exacte voisine. Cela se fait par une méthode itérative basée sur la résolution des équations linéarisées.

Dans le cas visqueux, le front n'a pas de signification réelle et l'on pourrait penser que le front limite hyperbolique suffit à décrire la couche limite. C'est vrai en partie ([GMWZ1, GMWZ2]), mais suivant [GMWZ3], on obtient une bien meilleure description des phénomènes en considérant, y compris dans le problème parabolique, le front ψ comme inconnu. Cela est très nettement présenté dans [GuWi] où sont construites des solutions approchées $(u^\varepsilon_{app}, \psi^\varepsilon_{app})$ par des développements BKW d'ordre élevé.

4.3 Linéarisation

Les équations linéarisées autour d'une solution approchée $(u^\varepsilon_{app}, \psi^\varepsilon_{app})$, sont de la forme

$$\mathcal{L}'_u \dot{u} + \mathcal{L}'_\psi \dot{\psi} = \dot{f}. \tag{4.8}$$

On y ajoute les conditions de transmission déduites de (4.4), qu'on écrit sous la forme

$$\big[\Gamma(\dot{u}, \partial_z \dot{u})\big] = 0, \tag{4.9}$$

Puisqu'on a une inconnue supplémentaire $\dot{\psi}$, les conditions (4.9) ne suffisent pas à déterminer la solution $(\dot{u}, \dot{\psi})$. Suivant [GMWZ3], on ajoute une condition aux limites supplémentaire :

$$\partial_t \dot{\psi} - \varepsilon \Delta_y \dot{\psi} = \ell(t, y) \cdot u(t, y0). \tag{4.10}$$

Il y a en fait une très grande liberté pour le choix de l'opérateur Δ et du vecteur ℓ, cf [GMWZ3].

Les opérateurs linéarisés autour de solutions approchées du type (4.5) sont des opérateurs différentiels dont les coefficients sont des fonctions régulières des variables lentes (t, y, x) et aussi de la vatiable rapide $z := x/\varepsilon$. Factorisant ε^{-1} ils apparaissent aussi comme des opérateurs différentiels en $\varepsilon\partial_t, \varepsilon\partial_y, \varepsilon\partial_x$:

$$\mathcal{L}'_u = \frac{1}{\varepsilon} L\Big(t, y, x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\partial_t, \varepsilon\partial_y, \varepsilon\partial_x\Big). \tag{4.11}$$

L'analyse classique des problèmes aux limites pour ces équations se fait en figeant les variables lentes $p = (\underline{t}, \underline{y}, \underline{x})$ et en opérant une transformation de Fourier-Laplace dans les variables (t, y). On obtient ainsi des systèmes

$$\frac{1}{\varepsilon} L\Big(p, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon(\gamma + i\tau), i\varepsilon\eta, \varepsilon\partial_x\Big).$$

On introduit alors la variable $z = x/\varepsilon$ et on effectue un changement d'échelle dans les variables de fréquence, posant $\zeta = (\tilde{\tau}, \tilde{\eta}, \tilde{\gamma}) = \varepsilon(\tau, \eta, \gamma)$. Multipliant l'équation par ε, on obtient un système de la forme

$$L(p, z, \zeta, \partial_z)\tilde{u} + \tilde{\psi} L_1(p, z, \zeta) = \tilde{f}. \tag{4.12}$$

Il est commode de mettre ces équations sous la forme d'un système du premier ordre en $U = (\tilde{u}, B_{\nu,\nu}\partial_z\tilde{u})$:

$$\partial_z U = G(p, z, \zeta)U + \tilde{\psi} G_1 + F. \tag{4.13}$$

Les conditions aux limites s'écrivent sous la forme

$$\big[\Gamma(p)U\big] = 0, \quad (\gamma + i\tau + |\eta|^2)\tilde{\psi} = \ell(p) \cdot U_{|z=0}. \tag{4.14}$$

Les conditions de stabilité d'Evans-Lopatinski expriment que les problèmes (4.13) (4.14) sont bien posés.

4.4 L'analyse basse fréquence, réduction aux coefficients constants

L'analyse des équations (4.13) (4.14) dépend de la taille des fréquences ζ. Quand ζ est grand, le côté parabolique des équations domine (voir toutefois [GMWZ4] pour le cas des viscosité partielles B). Pour les fréquences ζ bornées, le lemme de conjugaison de [MéZu1], qui repose sur la convergence exponentielle des coefficients de L quand $z \to \infty$, implique qu'il y a des changements de variables $U = \Phi_\pm(p, z, \zeta)U^\pm$, respectivement pour $z \geq 0$ et pour $z \leq 0$, qui réduisent (4.13) à des équations à coefficients constants :

$$L(p, \pm\infty, \gamma + i\tau, i\eta, \partial_z)\tilde{u} + \tilde{\psi} L_1(\pm\infty, \zeta) = \tilde{f}, \tag{4.15}$$

En gros, les coefficients ont été figés à $\pm\infty$ mais les conditions de transmissions ont tourné

$$\big[\Gamma(p)\Phi(p, 0, \zeta)U\big] = 0, \quad (\gamma + i\tau + |\eta|^2)\tilde{\psi} = \ell(p) \cdot \Phi^+ U^+_{|z=0}. \tag{4.16}$$

Ce qui est exposé dans les paragraphes 2 et 3 ci-dessus concerne l'analyse des équations (4.15) (4.16), avec la construction de symétriseurs $\Sigma(p, \zeta)$, qui permettent d'obtenir les bonnes estimations a priori, qu'on peut ensuite remonter aux solutions de (4.13) (4.14) :

$$\begin{aligned} &(\gamma + |\zeta|^2)\|u\|_{L^2} + (\gamma + |\zeta|^2)^{1/2}\|B_{\nu,\nu}\partial_z u\|_{L^2} \\ &\qquad + (\gamma + |\zeta|^2)^{1/2}\big(\big|U_{|z=0}\big| + |\zeta|\,\Big|\tilde{\psi}_{|z=0}\Big|\big) \lesssim \|\tilde{f}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ces estimations sont valables pour ζ borné. Les estimations hautes fréquences utilisent le caractère parabolique ou partiellement parabolique de (4.13).

Pour étudier (4.8), mis sous forme d'un système du premier ordre, on utilise pour symétriseurs les opérateurs pseudo ou para-différentiels sont les symboles $\Sigma(p(t,y,x),\zeta)$ sont donnés par l'analyse précédente à coefficients lents figés en (t,y,x). On obtient, en particulier, des estimations du type

$$\gamma\|e^{-\gamma t}\dot{u}\|_{L^2} + \sqrt{\gamma}\big(\|e^{-\gamma t}\dot{u}_{|x=0}\|_{L^2} + \|e^{-\gamma t}\nabla\dot{\psi}\|_{L^2}\big) \leq \|e^{-\gamma t}\dot{f}\|_{L^2} \tag{4.18}$$

qui sont uniformes en ε et sont exactement les estimations de Majda pour le cas hyperbolique $\varepsilon = 0$.

La stabilité nonlinéaire s'en déduit ensuite.

5 Application à la magnéto-hydrodynamique

5.1 Les équations

Dans le cas le plus simple (isentropique), les équations de la MHD s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u^t u) + \nabla p + H \times \mathrm{curl} H = \varepsilon\nu\Delta u \\ \partial_t H + \mathrm{curl}(H \times u) = \varepsilon\mu\Delta H \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{div} H = 0, \tag{5.2}$$

où $\rho \in \mathbb{R}$ est la densité, $u \in \mathbb{R}^3$ la vitesse, $p = p(\rho) \in \mathbb{R}$ la pression et $H \in \mathbb{R}^3$ le champ magnetique. Quand $H \equiv 0$, les équations (5.1) se réduisent aux équations de la dynamique des fluides.

Les équations (5.1) ont une forme conservative : avec (5.2) la seconde équation s'écrit aussi

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u^t u) + \nabla p + (1/2)\mathrm{div}(|H|^2 I - 2H^t H)^{\mathrm{tr}} = \varepsilon\nu\Delta u. \tag{5.3}$$

On peut aussi les mettre sous forme symétrique en écrivant la troisième équation

$$\partial_t H + (\mathrm{div} u)H + (u\cdot\nabla)H - (H\cdot\nabla)u = \mu\varepsilon\Delta H. \tag{5.4}$$

En oubliant l'équation de divergence, on obtient alors un système 7×7 symétrique.

5.2 Éléments propres

Le symbole du système en (ρ, u, H), agissant sur $(\dot{\rho}, \dot{u}, \dot{H})$ est

$$\begin{cases} \tilde{\tau}\dot{\sigma} + \rho(\xi\cdot\dot{u}) = 0 \\ \tilde{\tau}\dot{u} + c^2\dot{\sigma}\xi + v\times(\xi\times\dot{v}) = i\nu|\xi^2|\dot{u}/\rho \\ \tilde{\tau}\dot{v} + (\xi\cdot\dot{u})v - (v\cdot\xi)\dot{u} = i\mu|\xi|^2\dot{v}. \end{cases} \tag{5.5}$$

où c est la vitesse du son ($c^2 = dp/d\rho$) et

$$\tilde{\tau} = \tau + u\cdot\xi, \quad v = H\sqrt{\rho}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\rho}/\rho, \quad \dot{v} = \dot{H}/\sqrt{\rho}. \tag{5.6}$$

La condition (3.2) est satisfaite avec $N' = 6$, de même que les hypothèses (H1) à (H4).

Considérons ensuite le problème hyperbolique, i.e. le cas $\varepsilon = 0$. Les 7 valeurs propres de $A(\xi)$ sont

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda_0 &= u \cdot \xi, \\
\lambda_{\pm s} &= \lambda_0 \pm c_s |\xi|, \\
\lambda_{\pm 2} &= \lambda_0 \pm v \cdot \xi, \\
\lambda_{\pm f} &= \lambda_0 \pm c_f |\xi|,
\end{aligned}
\right.
\tag{5.7}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
& c_f^2 := \frac{1}{2}\Big(c^2 + |v|^2 + \sqrt{(c^2 - |v|^2)^2 + 4 b^2 c^2} \Big) \\
& c_s^2 := \frac{1}{2}\Big(c^2 + |v|^2 - \sqrt{(c^2 - |v|^2)^2 + 4 b^2 c^2} \Big), \\
& c^2 = p'(\rho) > 0, \quad v = H/\sqrt{\rho}, \quad b = |\hat{\xi} \times v|, \quad \hat{\xi} = \xi/|\xi|.
\end{aligned}
$$

La première valeur propre correspond au transport de la divergence et peut être découplée du reste du système : il y a un espace $\mathbb{E}_0$, lisse en les paramètre, de dimension 1, tel que $\mathbb{E}_0$ et $\mathbb{E}_0^\perp$ sont stables par $A(\xi)$.

Lemme 5.1 ([MéZu2]). *Supposons que $0 < |H|^2 \neq \rho c^2$ et $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.*

i) Si $\xi \cdot v \neq 0$ et $\xi \times H \neq 0$, les valeurs propres sont simples.

ii) Sur $\{\xi \times v = 0\}$, λ_0 is simple. Quand $|v|^2 < c^2$ [resp. $|v|^2 > c^2$], $\lambda_{\pm f}$ [resp. $\lambda_{\pm s}$] sont simples et les autres valeurs propres $\lambda_{\pm 2} = \lambda_{\pm s}$ [resp. $\lambda_{\pm 2} = \lambda_{\pm f}$] sont doubles, algébriquement régulières mais non t géométriquement régulières.

iii) Sur $\{\xi \cdot v = 0\}$ les valeurs propres $\lambda_{\pm f}$ sont simples et $\lambda_0 = \lambda_{\pm s} = \lambda_{\pm 2}$ est géométriquement régulière. Plus précisément, on peut renuméroter les $\{\lambda_s, \lambda_{-s}\} = \{\lambda_1, \lambda_{-1}\}$ de sorte que les $\lambda_{\pm 1}$ sont lisses et

$$
\lambda_{\pm 1} = u \cdot \xi \pm \delta v \cdot \xi + O\big((v \cdot \xi)^2\big), \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}}.
\tag{5.8}
$$

Considérons le bord $\{x_3 = 0\}$. Il est non caractéristique pour le système hyperbolique si et seulement si

$$
u_3 \notin \big\{0, \ v_3, \ \pm c_s(n), \ \pm c_f(n)\big\}
\tag{5.9}
$$

où $c_s(n)$ and $c_f(s)$ sont les vitesses lentes et rapides évaluées dans la direction normale $n = (0,0,1)$.

Lemme 5.2. *Supposons que $0 < |H|^2 \neq \rho c^2$.*

i) Sur $\{\xi \times v = 0\}$, les valeurs propres multiples sont non rasantes si et seulement si $u_3 \neq \pm v_3$. Dans ce cas, elles sont totalement entrantes ou totalement sortantes.

ii) Sur $\{\xi \cdot v = 0\}$, les valeurs propres multiples sont non rasantes si et seulement si $u_3 \neq 0$, $u_3 \neq \pm v_3$ et $u_3 \neq \pm \delta v_3$. Elles sont totalement entrantes ou totalement sortantes si $|u_3| > |v_3|$.

Lemme 5.3. *Quand $H = 0$, les valeurs propres $\lambda_{\pm f} = \lambda_0 \pm c|\xi|$ sont simples et la valeur propre multiple $\lambda_0 = \lambda_{\pm s} = \lambda_{\pm 2} = u \cdot \xi$ est totalement entrante ou sortante si $u_3 \neq 0$.*

5.3 Chocs hyperboliques

Considérons un choc plan, de front $\{x_3 = \sigma t\}$. On note (ρ^-, u^-, H^-) et (ρ^+, u^+, H^+) les états à gauche et à droite du front. Toute l'analyse précédente s'adapte en remplaçant u_3 par $u_3 - \sigma$.

Les conditions de saut sont obtenues à partir de la formulation conservative. Elles s'écrivent :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
[\rho(u_3 - \sigma)] = 0, \\
[\rho u(u_3 - \sigma)] + r_3 \left[p + \frac{1}{2}|H|^2\right] - [H_3 H] = 0, \\
[(u_3 - \sigma)H] - [H_3 u] = 0, \\
[H_3] = 0,
\end{array}
\right.
\tag{5.10}
$$

où $r_3 = {}^t(0, 0, 1)$. La dernière condition vient de (5.2). En apparence, ce système de 8 équations est trop grand, mais elles ne sont pas indépendantes : en projetant la troisième équation sur e_3 donne $\sigma[H_3] = 0$ qui est impliqué par la dernière équation. En notant $u_{\rm tg}$ et $H_{\rm tg}$ les composantes tangentielles de of u et H, (5.10) équivaut au système de 7 équations

$$
\left\{
\begin{array}{l}
[\rho(u_3 - \sigma)] = 0, \\
[\rho u(u_3 - \sigma)] + r_3 \left[p + \frac{1}{2}|H|^2\right] - [H_3 H] = 0, \\
[(u_3 - \sigma)H_{\rm tg}] - [H_3 u_{\rm tg}] = 0, \quad [H_3] = 0.
\end{array}
\right.
\tag{5.11}
$$

Conditions de Lax. Considérons un *choc rapide* associé à une valeur propre extrême $\lambda_{\pm f}$. Quitte à changer x en $-x$, les conditions de Lax s'écrivent :

$$
\begin{array}{l}
u_3^- + |v_3^-| < \sigma < u_3^- + c_f^-, \\
u_3^+ + c_f^+ < \sigma.
\end{array}
\tag{5.12}
$$

Pour un *choc lent* associé à $\lambda_{\pm s}$, changeant x en $-x$ au besoin, les conditions de Lax s'écrivent :

$$
\begin{array}{l}
u_3^- - c_s^- < \sigma < u_3^- + c_s^- \\
u_3^+ + c_s^+ < \sigma < u_3^+ + |v_3^+|.
\end{array}
\tag{5.13}
$$

Elles impliquent en particulier que le front est non caractéristique de chaque côté.

Proposition 5.4. *Pour les chocs de Lax rapides, les hypothèses du Théorème* 2.15 *sont satisfaites dès que* $|H^\pm|^2 \neq \rho^\pm(c^\pm)^2$.

Pour les chocs de Lax lents, elles sont satisfaites pour $0 < |H^\pm|^2 \neq \rho^\pm(c^\pm)^2$.

Preuve. Il suffit de vérifier que les valeurs propres non géométriquement régulières sont totalement entrantes ou sortantes.

Dans le cas où $0 < |H^\pm|^2 \neq \rho^\pm(c^\pm)^2$, cela ne concerne que les valeurs propres associées aux fréquences telles que $v^\pm \times \xi = 0$, qui d'après le Lemme 5.2 sont totalement entrantes ou sortantes dès que $u_3^\pm - \sigma \neq \pm v_3^\pm$, ce qui est impliqué par les conditions de Lax.

Quand $H = 0$, le Lemme 5.3 implique que la valeur propre multiple est totalement entrante ou sortante si $u_3 - \sigma \neq 0$, ce qui est impliqué par (5.12). $\square$

Corollaire 5.5. *Sous les hypothèses précédentes, les chocs de Lax qui vérifient la condition de Lopatinski uniforme sont linéairement et non linéairement stables au sens de Majda.*

Pour la vérification de la condition de Lopatinski, on renvoie à [Ma1] pour les équations d'Euler, à [Mé1] pour le cas des chocs faibles et plus précisément à [Bl, BT1, BT2, BT3, BT4, BTM1, BTM2] pour la MHD.

5.4 Chocs visqueux

Pour appliquer le Théorème 3.8 on doit maintenant vérifier que tous les modes multiples sont totalement entrants ou sortants. Pour les modes tels que $v^\pm \times \xi = 0$ cela ne change rien. Mais pour les fréquences telles que $v^\pm \cdot \xi = 0$ se traduit d'après le Lemme 5.2 par la condition $|v_3^\pm| < |u_3^\pm - \sigma|$. Cette condition n'est jamais satisfaite pour les chocs lents. Elle l'est pour les chocs rapides.

Proposition 5.6. *Pour les chocs de Lax rapides, les hypothèses du Théorème* 3.8 *sont satisfaites dès que* $|H^\pm|^2 \neq \rho^\pm (c^\pm)^2$

Corollaire 5.7. *Pour les profils de chocs associées à des chocs de Lax qui vérifient la condition d'Evans-Lopatinski uniforme sont linéairement et non linéairement stables au sens de [GMWZ3].*

Pour la vérification de la condition de stabilité uniforme d'Evans, on renvoie à [Go, Zu1, Zu2, HuZu, FrSz, MaZ1, PZ]. On renvoie aussi à [GMWZ5] pour le cas des chocs rapides de la MHD quand H petit.

Références

[BiBr] S.Bianchini, A.Bressan, Vanishing viscosity limit solutions to nonlinear hyperbolic systems, Ann. of Maths., paraÓtre.

[Bl] A.M. Blokhin, *Strong discontinuities in magnetohydrodynamics.* Translated by A. V. Zakharov. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, 1994. x+150 pp.

[BT1] A. Blokhin and Y. Trakhinin, *Stability of strong discontinuities in fluids and MHD.* in Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I, 545–652, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[BT2] A.M. Blokhin and Y. Trakhinin, *Stability of fast parallel MHD shock waves in polytropic gas.* Eur. J. Mech. B Fluids 18 (1999), 197–211.

[BT3] A.M. Blokhin and Y. Trakhinin, *Stability of fast parallel and transversal MHD shock waves in plasma with pressure anisotropy.* Acta Mech. 135 (1999), 57–71.

[BT4] A.M. Blokhin and Y. Trakhinin, *Hyperbolic initial-boundary value problems on the stability of strong discontinuities in continuum mechanics.* Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. I (Zürich, 1998), 77–86, Internat. Ser. Numer. Math., 129, Birkhäuser, Basel, 1999.

[BTM1] A.M. Blokhin, Y. Trakhinin, and I.Z. Merazhov, *On the stability of shock waves in a continuum with bulk charge.* (Russian) Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz. 39 (1998) 29–39 ; translation in J. Appl. Mech. Tech. Phys. 39 (1998) 184–193.

[BTM2] A.M. Blokhin, Y. Trakhinin, and I.Z. Merazhov, *Investigation on stability of electro-hydrodynamic shock waves.* Matematiche (Catania) 52 (1997) 87–114.

[ChPi] J. Chazarain-A. Piriou, *Introduction to the theory of linear partial differential equations,* Translated from the French. Studies in Mathematics and its Applications, 14. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982. xiv+559 pp.

[FrSz] H. Freistühler and P. Szmolyan, *Spectral stability of small shock waves.* Arch. Ration. Mech. Anal. 164 (2002) 287–309.

[Fr1] K.O. Friedrichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations.* Comm. Pure and Appl. Math. 7 (1954) 345–392.

[Fr2] K.O. Friedrichs, *On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics.* Comm. Pure and Appl. Math. 27 (1974) 749–808.

[FrLa] K.O. Friedrichs, P. Lax, *Systems of conservation equations with a convex extension.* Proc. nat. Acad. Sci. USA 68 (1971) 1686–1688.

[GaKr] C.S. Gardner, M.D. Kruskal, *Stability of plane magnetohydrodynamic shocks.* Phys. Fluids 7 (1964) 700–706.

[GaZu] R. Gardner, K.Zumbrun, *The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles,* Comm. Pure and Appl. Math., 51 (1998), 797–855.

[Go] J.Goodman, *Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws,* Arch.Rat.Mech.Anal., 95 (1986), pp 325–344.

[GMWZ1] O. Gues, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *Multidimensional viscous shocks I : degenerate symmetrizers and long time stability.* J. A.M.S., paraÓtre.

[GMWZ2] O. Gues, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *Multidimensional viscous shocks II : the small viscosity limit.*, Comm. Pure and Appl. Math., 57 (2004) 141–218.

[GMWZ3] O. Gues, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *A new approach to stability of multidimensional viscous shocks,* Arch. Rat.Mech. Anal., paraÓtre.

[GMWZ4] O. Gues, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *Navier–Stokes regularization of multidimensional Euler shocks,* en prÈparation.

[GMWZ5] O. Gues, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *Viscous Boundary Value Problems for Symmetric Systems with Variable Multiplicities,* en prÈparation.

[GuWi] Guès, O., Williams, M., *Curved shocks as viscous limits : a boundary problem apprach,* Indiana Univ.Math.J., 51 (2002) 421–450.

[HuZu] J.Humphrey, K.Zumbrun, *Spectral stability of small amplitude shock profiles for dissipative symmetric hyperbolic-parabolic systems,* Z.Angew.Math.Phys., 53 (2002), pp 20–34.

[Kr] H.O. Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems,* Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) 277-298.

[La] P. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves,* CBSM-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., 11, SIAM , Philadelphia (1973).

[Ma1] A. Majda, *The stability of multi-dimensional shock fronts* . Mem. Amer. Math. Soc. 275 (1983).

[Ma2] A. Majda, *The esistence of multi-dimensional shock fronts* . Mem. Amer. Math. Soc. 281 (1983).

[MaOs] A. Majda, S. Osher, *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary,* Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 607-676.

[MaZ1] C. Mascia, K. Zumbrun, *Stability of small-amplitude shock profiles for dissipative symmetric hyperbolic–parabolic systems.* Comm. Pure and Appl.Math., 57 (2004) 141–218.

[MaZ2] C. Mascia, K. Zumbrun, *Stability of large-amplitude shock profiles of hyperbolic–parabolic systems.* Arch. Rational Mech. Anal., 172 (2004) 93–131.

[Mé1] G. Métivier, *Stability of multidimensional weak shocks,* Comm., Partial Diff. Eq., 15 (1990), 983-1028.

[Mé2] G. Métivier, *Stability of multidimensional shocks.* Advances in the theory of shock waves, 25–103, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[Mé3] G.Métivier. *The Block Structure Condition for Symmetric Hyperbolic Problems*, Bull. London Math.Soc., 32 (2000), 689–702

[MéZu1] G.Métivier, K.Zumbrun, *Viscous Boundary Layers for Noncharacteristic Nonlinear Hyperbolic Problems*, Memoirs of the AMS, à paraître.

[MéZu2] G.Métivier, K.Zumbrun, *Symmetrizers and continuity of stable subspaces for parabolic–hyperbolic boundary value problems,* J. Discrete. Cont. Dyn. Systems, 11 (2004) 205–220.

[MéZu3] G.Métivier, K.Zumbrun, *Hyperbolic Boundary Value Problems for Symmetric Systems with Variable Multiplicities*, J.Diff. Eq., à paraître.

[PZ] R. Plaza, K. Zumbrun, *An Evans function approach to spectral stability of small-amplitude viscous shock profiles,* Discrete and Cont. Dyn. Syst. Ser B, 10 (2004) 885–924.

[Ral] J.V. Ralston, *Note on a paper of Kreiss,* Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 759–762.

[Ra2] J.Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Amer.Math.Soc, 291 (1985), 167–185.

[Sa1] R. Sakamoto, *Mixed problems for hpyerbolic equations, I, II,* J. Math. Kyoto Univ. 10 (1970), 349-373 and 403-417.

[Sa2] R. Sakamoto, *Hyperbolic boundary value problems,* Cambridge U. P., 1982.

[Zu1] K. Zumbrun, *Multidimensional stability of planar viscous shock waves.* Advances in the theory of shock waves, 307–516, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[Zu2] K. Zumbrun, *Stability of large-amplitude shock waves of compressible Navier–Stokes equations.* For Handbook of Fluid Mechanics III, S.Friedlander, D.Serre ed., Elsevier North Holland 2004.

[Zu3] K. Zumbrun, *Planar stability criteria for viscous shock waves of systems with real viscosity.* Lecture notes for CIME summer school at Cetraro, 2003, preprint.

[ZuHo] K.Zumbrun, P.Howard, *Pointwide semigroup methods and stability of viscous shock waves,* Indiana J.Math., 47 (1998), 741-871, and Indiana J.Math, 51 2002, 1017-1021.