Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Taoufik Hmidi

Estimations uniformes en viscosité évanescente

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XII, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A12_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ESTIMATIONS UNIFORMES EN VISCOSITÉ ÉVANESCENTE

Taoufik Hmidi
UMR 7640 du C.N.R.S
CMLS, École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex.
E-mail: hmidi@math.polytechnique.fr

Résumé. Nous étudions la propagation de la régularité höldérienne dans une équation de transport-diffusion relative à un champ lipschitzien généralisant un résultat établi par R. Danchin [6] pour les espaces de Besov $B^s_{p,\infty}$, avec p fini et $s \in (-1,1)$. Comme application, nous montrons dans le cadre du système de Navier-Stokes 2-D que si le tourbillon initial est une poche dont le bord est de classe $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux préserve pour tout temps cette régularité. Nous prouvons également des résultats de limite non visqueuse.

Dans cet article nous discutons la stabilité höldérienne des poches de tourbillon relatives à un fluide visqueux incompressible et en mouvement plan. La vitesse de la particule, qui à l'instant t se trouve à la position $x \in \mathbb{R}^2$ et que l'on note $v_\nu(t,x)$, obéit au système de Navier-Stokes :

$$(NS_\nu)\begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité cinématique du fluide. Le scalaire p_ν représente la pression. Notons que le système d'Euler incompressible (E), noté parfois (NS_0), correspond à une viscosité nulle. Il est régi par

$$(E)\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

Nous dirons que le tourbillon ω, défini par $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$, possède la structure d'une poche de tourbillon s'il est l'indicatrice d'un ouvert borné. L'étude de ces structures revêt une grande importance que ce soit bien évidemment du point de vue mathématique ou du point de vue physique et même numérique. Les premières observations de stabilité des poches de tourbillon dans les équations d'Euler bidimensionnelles remontent à G. Kirchhoff qui a remarqué qu'une poche de tourbillon elliptique préserve pour tout temps cette structure et qu'elle tourne à vitesse constante autour de son centre de symétrie. Nous soulignons que la réponse définitive à la stabilité des poches peut être dérivée d'un résultat général dû à V. I. Yudovich. Il montre dans [14] que si l'on part d'une donnée initiale ayant un tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$, alors pour tout $\nu \geq 0$ le système (NS_ν) possède une unique solution. De plus, le flot défini par :

$$\psi_\nu(t,x) = x + \int_0^t v_\nu(\tau,\psi_\nu(\tau,x))d\tau,$$

existe globalement et il est unique dans la classe des fontions continues dans les deux variables d'espace et de temps. Ceci est suffisant pour dire, dans le cadre du système (E), que la structure des poches est conservée. Suite à ces résultats, il y a une question qui s'impose : il s'agit de décrire la régularité du bord. Hélas, le résultat de Yudovich ne permet pas d'avoir une réponse complètement satisfaisante. Dans les meilleurs cas, on ne peut dégager qu'un résultat faible du genre : étant donnée une poche initiale dont le bord est de classe C^1, alors la régularité de la poche à l'instant t est au moins de classe $C^{\exp -\alpha t}$. Il a fallu attendre quelques décennies pour qu'un tel problème soit définitivement résolu. Alors, on démontre que si le bord de la poche initiale est mieux que C^1, typiquement de classe $C^{1+\epsilon}$,$0 < \epsilon < 1$, alors la frontière du tourbillon l'est aussi en tout temps. En fait, c'est à J.-Y. Chemin qu'on doit ce résultat, voir [3].
Notons que ceci va à l'encontre des simulations numériques réalisées auparavant par A. Majda [9] qui laissent prévoir l'apparition de singularités en temps fini. La preuve de J.-Y. Chemin est fondée sur un contrôle Lipschitz de la vitesse et elle est applicable dans un cadre plus général, dit des poches de tourbillon généralisées. Nous signalons que P. Serfati a montré dans [10] le même résultat avec une autre méthode. Par ailleurs, l'étude des poches singulières a vu le jour suite au travail de J.-Y. Chemin qui a prouvé dans [3] que la partie régulière du bord voyage tranquillement à travers le flot sans qu'elle soit affectée par la partie singulière du bord. Toutefois, le comportement exact de la partie singulière est loin d'être élucidé. Dans ce contexte, le champ est lipschitzien en dehors du propagé des singularités par le flot. Son gradient ne peut exploser, au maximum, à l'approche de cet ensemble, qu'avec un taux de l'ordre de $-\log h$, où h est un paramètre mesurant la proximité par rapport à cet ensemble. En revanche, R. Danchin montre dans [8] que pour une poche initiale admettant une singularité particulière de type *cusp*, alors la vitesse est en tout temps lipschitzienne. Ce qui permet de propager la structure initiale de la poche, qui reste en tout temps de type *cusp*.
Dans le but de généraliser le théorème de J.-Y. Chemin à des poches de tourbillon visqueuses, R. Danchin montre dans [6] que lorsque la poche initiale est l'indicatrice d'un domaine borné Ω de classe $C^{1+\epsilon}$, alors le champ v_ν est lipschitzien. En outre, son contrôle de Lipschitz est uniforme en ν. En conséquence, il en déduit que le transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ du domaine initial par le flot visqueux est de classe $C^{1+\epsilon'}$, pour tout $\epsilon' < \epsilon$. De plus, on a la "convergence" du bord visqueux vers celui d'Euler lorsque le paramètre ν tend vers zéro. Cette apparente perte de la régularité höldérienne n'a pas lieu dans les espaces de Besov $B^\epsilon_{p,\infty}$, avec $2 < p < +\infty$ et $\epsilon \in]2/p, 1[$. Ceci est dû à la propagation de la régularité Besov, uniformément en ν, dans les équations de type (TD_ν) que nous définirons dans le prochain paragraphe. Le but de ce travail est de montrer la propagation dans le cas limite $p = +\infty$, i.e., dans les espaces de Hölder. Comme conséquence de ce résultat, nous établissons que le bord du transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ conserve la régularité $C^{1+\epsilon}$, uniformément par rapport à ν.

Théorème 0.1. *Soient $\epsilon \in]0,1[$ et Ω^0 un un ouvert borné dont le bord est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. Désignons par v^0 le champ de vecteurs dont le rotationnel vaut $\omega^0 = \mathbf{1}_{\Omega^0}$. Alors pour tout $\nu \geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. D'une manière plus précise, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et Ω^0 telle* *que, pour tout $\nu \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+\nu)e^{Ct}.$$

De plus, si l'on désigne par $\Omega_\nu(t)$ le transporté de Ω^0 par le flot de v_ν, alors $\partial\Omega_\nu(t)$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. En outre, il existe une paramétrisation régulière γ_ν de la frontière de $\Omega_\nu(t)$ appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ telle que, pour tout $\epsilon' < \epsilon$, γ_ν converge vers γ_0 dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon'}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ lorsque ν tend vers zéro.

La preuve que nous avons trouvée semble plus simple que celle de [6], dans la mesure où nous n'utilisons pas les techniques de parachamps introduites par l'auteur pour remédier aux difficultés posées par la faible régularité du tourbillon. Elle repose essentiellement sur deux nouvelles estimations, uniformes en viscosité évanescente, valides pour le modèle de transport-diffusion (TD_ν)

$$(TD_\nu)\left\{\begin{array}{l}\partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = f + \nu g\\ a_{|t=0} = a^0,\end{array}\right.$$

et qui exploitent de différentes manières l'effet régularisant de l'opérateur de Laplace. Pour mieux décrire ces résultats nous allons rappeler les opérateurs de Littlewood-Paley : il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1.$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)\big)\ ;\ \forall\, q \in \mathbb{N},\, \Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\xi)\big) \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1\leq p\leq q-1}\Delta_p u.$$

On définit les espaces de Besov inhomogènes par

$$B^s_{p,\infty} = B^s_p = \Big\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\, \|u\|_{B^s_{p,\infty}} \overset{déf}{=} \sup_{q\geq -1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty\Big\}.$$

Notons que pour s non entier $C^s = B^s_{\infty,\infty}$. Nous disons qu'une fonction u appartient à l'espace $\widetilde{L^r_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B^s_{p,\infty})$ si l'on a

$$\forall T > 0,\ \|u\|_{\widetilde{L^r_T}(B^s_{p,\infty})} \overset{déf}{=} \sup_{q\geq -1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^r([0,T];\,L^p)} < +\infty.$$

1. Effet régularisant

Nous établissons dans cette section le résultat suivant.

Théorème 1.1. ($Cas\ f = g = 0$) *Soient v un champ de vecteurs de divergence nulle et appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\ ;\ \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et a une solution de (TD_ν) associée à une donnée initiale $a^0 \in L^p, p \in [1,+\infty]$. Alors on aura pour tout $r \in [1,+\infty]$ et pour tout $t \geq 0$*

$$\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L^r_t}B^{\frac{2}{r}}_{p,\infty}} \leq C\|a^0\|_{L^p}\Big(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big)^{\frac{1}{r}},$$

avec C une constante absolue.

Ceci montre dans le cas particulier $r = 1$ que la moyenne en temps induit un gain de deux dérivées et c'est effectivement ce dont on a besoin dans l'étude de la propagation höldérienne de la régularité tangentielle du tourbillon.

2. Propagation höldérienne

Théorème 2.1. i) *Soient $s \in (-1,1)$, $p \in [1,+\infty]$ et v est un champ de vecteurs lipschitzien et de divergence nulle. Si a une solution de (TD_ν), avec $a^0 \in B^s_p$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B^s_p)$ et $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B^{s-2}_p)$, alors pour tout temps positif t, on a*

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq Ce^{CV(t)}\left(\|a^0\|_{B^s_p} + (1+\nu t)\|g\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p} + \int_0^t e^{-CV(\tau)}\|f(\tau)\|_{B^s_p} d\tau\right).$$

La constante C ne dépend que de s et d. Nous rappelons que $V(t) = \displaystyle\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$.

ii) *On se donne maintenant $s \in]-1,1[$ et $r \in]\frac{2}{1-s}, +\infty]$. On suppose que les fonctions f, g et v appartiennent successivement aux espaces $\widetilde{L^1_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B^s_p)$; $\widetilde{L^r_{loc}}\big(\mathbb{R}_+;\, B_p^{s+\frac{2}{r}-2}\big) \cap \widetilde{L^\infty_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B^{s-2}_p)$ et $L_{loc}^{\frac{r}{r-1}}\big(\mathbb{R}_+;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)\big)$. Alors, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $0 \leq \nu \leq 1$, on aura*

$$\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L^r_t}B_p^{s+\frac{2}{r}}} \;\leq\; N_r(t)\left(\|a^0\|_{B^s_p} + \|f\|_{\widetilde{L^1_t}B^s_p} + (1+t)\Big(\nu^{\frac{1}{r}}\|g\|_{\widetilde{L^r_t}B_p^{s+\frac{2}{r}-2}} + \|g\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p}\Big)\right),$$

avec

$$N_r(t) = C_1(1+t^{\frac{1}{r}})\big(1+t/r+\|\nabla v\|_{L^{\bar r}_t L^\infty}\big)e^{CV(t)} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\bar r} + \frac{1}{r} = 1.$$

La constante C_1 ne dépend que de d, s et r.

3. Preuve de l'effet régularisant

Nous souhaitons dans cette section donner une preuve du théorème 1.1 qui sera effectuée en deux temps : en premier lieu nous démontrons l'effet régularisant sur un petit intervalle de temps qui ne dépend pas de la donnée initiale mais uniquement du champ de vecteurs v. Ensuite, nous procédons à un découpage en temps permettant ainsi d'étendre les estimations à n'importe quel temps positif arbitrairement choisi.

3.1. **Estimation Locale.** Nous commençons par appliquer l'opérateur de découpage en fréquences à l'équation (TD_ν). Alors, en posant $a_q = \Delta_q a$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t a_q + S_{q-1}v\cdot\nabla a_q - \nu\Delta a_q &= -[\Delta_q, v\cdot\nabla]a + (S_{q-1}v - v)\cdot\nabla a_q,\\ &\overset{d\acute{e}f}{=} f_q.\end{aligned} \tag{1}$$

Pour éliminer le terme de convection $S_{q-1}v\cdot\nabla a_q$ du premier membre de l'équation (1) nous allons utiliser le changement de variables lagrangien donné par le flot ψ_q du champ de vecteurs régularisé $S_{q-1}v$. En revanche, nous aurons à faire à une équation de la chaleur associée à une métrique variable. Mais une particularité de cette équation, qui est un élément capital de la preuve, est que la métrique est proche de l'identité sur des petits

intervalles de temps.
Faisons d'abord remarquer qu'un lemme de commutation classique donne pour tout $q \geq 1$,

$$\big\|f_q(t)\big\|_{L^p} \leq C\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty}\big\|a(t)\big\|_{L^p}.$$

Or un simple calcul nous assure que $\|a(t)\|_{L^p} \leq \|a^0\|_{L^p}$. Donc nous aurons

$$\big\|f_q(t)\big\|_{L^p} \leq C\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty}\big\|a^0\big\|_{L^p}. \tag{2}$$

Faisons maintenant le changement suivant

$$\bar{a}_q(t,x) = a_q(t, \psi_q(t, x)) \quad \text{et} \quad \bar{f}_q(t,x) = f_q(t,\psi_q(t,x)).$$

Alors, en notant la hessienne de $\bar{a}_q$ par $\nabla^2\bar{a}_q$, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta a_q(t) \circ \psi_q(t,x) &= \sum_{i=1}^{d} \Big\langle \nabla^2\bar{a}_q(t,x) \cdot (\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)),(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x))\Big\rangle \\ &+ \nabla\bar{a}_q(t,x) \cdot (\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)). \end{aligned} \tag{3}$$

Le symbole $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour le contrôle des dérivées du flot et de son inverse $\psi_q^{-1}(t,x)$, nous disposons des estimations classiques

$$\|\nabla\psi_q^{\mp1}(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\Big(\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big). \tag{4}$$

Quand on dérive l'équation d'évolution régissant l'inverse du flot par rapport à la variable d'espace, alors on peut déduire, grâce à (4), que la fonction ψ_q^{-1} satisfait une équation de type

$$(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) = e_i + g_q^i(t,x), \tag{5}$$

avec e_i le i^{eme} vecteur canonique de $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction g_q^i est majorée comme suit :

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\Big(\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)d\tau\Big)\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Comme S_{q-1} envoie uniformément en q l'espace L^∞ dans lui même, alors nous aurons

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq CV(t)e^{CV(t)} \overset{déf}{=} g(t). \tag{6}$$

En ce qui concerne l'estimation des dérivées secondes de $\psi_q^{-1}(t)$, nous dérivons deux fois l'équation d'évolution de ψ_q^{-1} et nous obtenons, suite à une application du lemme de Gronwall

$$\|\nabla^2\psi_q^{-1}(t)\|_{L^\infty} \leq e^{V_q(t)}\int_0^t \|\nabla^2 S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau. \tag{7}$$

Ainsi donc, par le biais de l'inégalité de Bernstein et l'estimation (4), l'inégalité (7) devient

$$\|\nabla^2\psi_q^{\mp1}(t)\|_{L^\infty} \leq C2^q g(t). \tag{8}$$

D'un autre côté, un simple calcul utilisant les informations (1), (3) et (5) montre que la fonction $\bar{a}_q$ vérifie

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) &= \nu \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2 \bar{a}_q(t,x) g_q^i, g_q^i(t,x)\rangle + 2\nu \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2 \bar{a}_q(t,x) e_i, g_q^i(t,x)\rangle \\
&+ \nu \nabla \bar{a}_q(t,x)\cdot (\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) + \bar{f}_q(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_q(t,x). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Notre outil principal qui nous servira pour la suite est le lemme suivant qui est démontré par exemple dans [4].

Lemme 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe deux constantes positives c et C telles que, pour tout couple (t,λ) de réels positifs, pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour tout $a \in L^p$, on aura l'implication :*

$$\text{Supp } \widehat{a} \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow \|e^{t\Delta} a\|_{L^p} \le C e^{-ct\lambda^2} \|a\|_{L^p}.$$

Comme la fonction composée $\bar{a}_q$ n'est pas nécessairement localisée en fréquence alors nous serons amenés à tronquer l'équation (9) via l'opérateur Δ_j, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi la formule de Duhamel montre que la fonction $\Delta_j \bar{a}_q$ vérifie

$$\Delta_j \bar{a}_q(t,x) = e^{\nu t\Delta}\Delta_j a_q(0) + \int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_j \mathcal{R}_q(\tau,x)d\tau. \qquad (10)$$

Le support de $\widehat{f_q}$ est localisé dans une boule de taille 2^q. Donc il s'ensuit, grâce au lemme de Bernstein et la préservation de la mesure par le flot, que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j \bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\le C 2^{-j} \|\nabla (f_q \circ \psi_q(t))\|_{L^p}, \\
&\le C 2^{q-j} \|\nabla \psi_q(t)\|_{L^\infty} \|f_q(t)\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Ainsi les inégalités (2) et (4) permettent d'avoir

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j \bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\le C 2^{q-j} e^{V_q(t)} \|a^0\|_{L^p} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\
&\le C 2^{q-j} e^{CV(t)} \|a^0\|_{L^p} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

En conséquence, nous déduisons, à l'aide du lemme 3.1 et compte tenu des inégalités (6) et (8), que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^p} \le C e^{-c\nu t 2^{2j}} \|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\nu\big(g(t)+g^2(t)\big) \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla^2 \bar{a}_q(\tau)\|_{L^p} d\tau \\
&+ C\nu 2^q g(t) \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla \bar{a}_q(\tau)\|_{L^p} d\tau \qquad (11) \\
&+ C 2^{q-j} e^{CV(t)} \|a^0\|_{L^p} \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.
\end{aligned}
$$

Prenons la norme L^r en temps dans les deux membres de l'inégalité (11). Alors nous obtenons par le biais de l'inégalité de Young et la croisssance de g,

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \le C(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}} \|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\big(g(t)+g^2(t)\big) 2^{-2j} \|\nabla^2 \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\
&+ C g(t) 2^q 2^{-2j} \|\nabla \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\
&+ C g(t) \|a^0\|_{L^p} 2^{q-j} (\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

En revenant à (3.1) et en se servant de (4), (8) et du lemme de Bernstein on aboutit, grâce à la conservation de la mesure par le flot, aux estimations

$$
\begin{aligned}
&(13) \qquad & \|\nabla \bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq C 2^q e^{CV(t)} \|a_q(t)\|_{L^p},\\
&(14) \qquad & \|\nabla^2 \bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq C 2^{2q} e^{CV(t)} \|a_q(t)\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Soit N_0 un entier que l'on choisira à la fin. Alors en reportant (13) et (14) dans (12) et en sommant sur les entiers $j \geq q - N_0$, on trouve

$$
\begin{aligned}
(15)\quad (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} &\leq C\|a^0\|_{L^p} + C 2^{2N_0} h(t) (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)}\\
&+ C 2^{N_0(1+\frac{2}{r})} \|a^0\|_{L^p} g(t),
\end{aligned}
$$

où l'on a posé $h(t) = g(t) + g(t)^2$. Faisons remarquer qu'il n'y a pas un cœfficient en N_0 dans le premier terme du second membre de (15) car $\Delta_j a_q(0) = 0$, si $|j - q| \geq 2$. Il faut noter aussi que le calcul que nous venons de développer est valable pour les entiers $q \geq N_0$, sinon, l'estimation (15) serait fausse.
Concernant le cas des basses fréquences $j \leq q - N_0$, on dispose du lemme suivant, démontré par M. Vishik dans [11].

Lemme 3.2. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C ne dépendant que de d telle que, pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour tous les $j,q \geq -1$,*

$$
\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi(\cdot))\|_{L^p} \leq C 2^{-|j-q|} \|\nabla \psi^{\alpha(j,q)}\|_{L^\infty} \|\Delta_q a\|_{L^p},
$$

où l'on a posé

$$
\alpha(j,q) = \begin{cases} \frac{j-q}{|j-q|}, & \text{si} j \neq q,\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}
$$

Nous convenons que $\psi^0 = \mathrm{Id}$.

Vu que le flot est une transformation qui préserve la mesure de Lebesgue, alors on peut écrire via le lemme 3.2 et les inégalités (15) et (4) que

$$
\begin{aligned}
(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} &= (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)}\\
&\leq (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} + (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \leq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)}\\
&\leq C 2^{2N_0} h(t) (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} + C 2^{3N_0} \|a^0\|_{L^p} g(t)\\
(16) \qquad &+ C\|a^0\|_{L^p} + C(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} 2^{-N_0} e^{CV(t)}.
\end{aligned}
$$

Sous cette forme on voit clairement le rôle que l'entier N_0 joue : dans la zone des hautes fréquences on profite de la petitesse (en temps) de la fonction h. Tandis que dans le spectre des basses fréquences on agrandit N_0 de manière à ce que le dernier terme figurant dans (16) soit absorbé par la quantité de gauche. Mais le choix du temps et de N_0 sont fortement liés. ils sont donnés par les deux conditions suivantes :

$$
(17) \qquad C 2^{2N_0} h(t) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad C 2^{-N_0} e^{CV(t)} \leq \frac{1}{4}.
$$

Par suite, si $V(t) \leq 1$, on choisit N_0 pour que $2^{-N_0} \leq \frac{1}{4C}e^{-C}$, puis quitte à diminuer encore $V(t)$, on assure que $C2^{2N_0}h(t) \leq 1/4$. Ainsi on montre l'existence d'une constante C_0 dépendant seulement de la dimension d telle que, si

$$\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C_0 \tag{18}$$

alors (17) aura lieu. Auquel cas l'entier N_0 est aussi absolu. Il s'ensuit que pour tout t satisfaisant (18) et pour tout $q \geq N_0$,

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,\,t];\,L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}. \tag{19}$$

Pour finir cette première étape, il nous reste à voir comment s'estiment les basses fréquences : nous obtenons aisément, grâce à l'estimation $\|a(t)\|_{L^p} \leq \|a^0\|_{L^p}$ et via la continuité uniforme en q de l'opérateur de localisation en fréquence $\Delta_q \in \mathcal{L}(L^p)$, que

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|\Delta_q a\|_{L^r([0,\,t];\,L^p)} \leq C(\nu t)^{\frac{1}{r}} \|a^0\|_{L^p}. \tag{20}$$

Ainsi, nous parvenons à établir localement en temps, le résultat du théorème 1.1.

3.2. **Globalisation.** L'extension du résultat local obtenu à n'importe quel temps arbitraire positif T n'est pas difficile. Nous parvenons à propager l'effet régularisant de proche en proche car la condition locale (18) ne tient pas compte des estimées de la solution a. Elle est uniquememt liée au gradient du champ de vecteurs v. Le point de départ de la preuve est de partager l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$ comme ci-dessous :

$$T_0 = 0 \leq T_1 \leq ... \leq T_N = T \quad \text{et} \quad \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \simeq C_0, \forall\, i \in [\![0,N-1]\!].$$

Dans chacun de ces sous intervalles $[T_i,T_{i+1}]$, on reproduit exactement la même démarche locale sauf qu'au lieu d'utiliser le flot ψ_q fixant l'espace à l'instant $t = 0$, nous devons réinitialiser le flot à l'instant T_i. On obtient alors pour tout entier $q \geq N_0$ (N_0 est le même entier qui apparaît dans la preuve locale)

$$\begin{aligned} (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,L^p)} &\leq C\|a(T_i)\|_{L^p} \\ &\leq C\|a^0\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{21}$$

Sachant que $N \simeq 1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$, alors en sommant les inégalités de 0 jusqu'au $N-1$, nous obtenons grâce à l'inégalité triangulaire que pour tout entier $q \geq N_0$ et pour tout $r \in [1,+\infty[$

$$\begin{aligned} \nu 2^{2q} \|a_q\|^r_{L^r([0,\,T];\,L^p)} &= \nu 2^{2q} \sum_{i=0}^{N-1} \|a_q\|^r_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,L^p)} \\ &\leq C\|a^0\|^r_{L^p}\Big(1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \end{aligned} \tag{22}$$

Ainsi l'estimation du théorème 1.1 découle facilement des relations (20) et (22).

4. Preuve de la propagation

La preuve est fondée sur la méthode que nous venons de détailler pour l'effet régularisant. Nous appliquons en premier lieu l'opérateur de filtrage en fréquences et nous faisons un changement de variables dans la nouvelle équation permettant de masquer le terme de convection. Ce qui ramène le problème initial à un problème parabolique à cœfficients variables. L'information cruciale qui est à la base de notre manœuvre est que la nouvelle métrique est proche de l'identité. Ce fait nous assure un résultat de propagation local qui peut s'itérer. Soulignons que le résultat local s'appuie tout particulièrement sur le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Pour tout entier $q \geq 1$, la fonction a_q vérifie*

$$\partial_t a_q + S_{q-1}v \cdot \nabla a_q - \nu \Delta a_q = f_q + \nu\, g_q + R_q(v,a),$$

telle que, d'une part, la transformée de Fourier de R_q est supportée dans une couronne de taille 2^q et d'autre part nous avons

$$\|R_q(v,a)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{q' \geq -1} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p},$$

où l'on a posé

$$a_q = \Delta_q a,\ f_q = \Delta_q f \quad \text{et} \quad g_q = \Delta_q g.$$

De plus, pour tout $q \geq -1$

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{q' \geq -1} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

5. Application aux poches de tourbillon höldériennes

Ce paragraphe est dédié à l'étude des poches de tourbillon visqueuses à bord höldérien. Nous montrerons que la perte de la régularité höldérienne mentionnée dans [6] n'est qu'un fait apparent. En d'autres termes, nous allons prouver que dans le cadre du système de Navier-Stokes, si l'on part d'une poche de tourbillon $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ de bord $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux reste en tout temps de classe $C^{1+\epsilon}$. Ceci apparaît comme un cas particulier d'un résultat général de persistance des structures géométriques des poches de tourbillon généralisées. Nous insistons sur le fait que les théorèmes 1.1 et 2.1 constituent les deux piliers de la preuve. Ce sont justement les deux nouvelles informations que nous avons obtenues en tenant compte d'une part du fait que le tourbillon est plus régulier qu'on l'attend et d'autre part du fait que le flot n'est pas quelconque mais il préserve la mesure de Lebesgue. Nous montrerons également des résultats de convergence non visqueuse des structures géométriques. Cela est axé sur un contrôle uniforme en ν de la norme lipschitzienne du champ de vitesse v_ν. Avant de fournir nos principaux résultats en cette matière, nous allons d'abord rappeler quelques concepts de base suivis d'une estimation logarithmique du gradient de la vitesse.

5.1. **Outils préliminaires.** L'objet de ce paragraphe est d'introduire les espaces de Hölder anisotropes construits à partir d'une famille donnée de champs de vecteurs. L'utilité de ces espaces se révèle lorsqu'on aspire à un contrôle lipschitzien de la vitesse, dans le cas de faible régularité, comme le montrera le théorème 5.1.

Définition 5.1. *Soit $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leurs divergence dans la classe de Hölder C^ϵ. Cette famille est dite admissible si et seulement si, on a*

$$I(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\lambda\in\Lambda} \left|X_\lambda(x)\right| > 0.$$

On note

$$\widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon} = \|X_\lambda\|_{C^\epsilon} + \|\mathrm{div} X_\lambda\|_{C^\epsilon}.$$

Nous définissons l'action de cette famille sur une distribution u appartenant à L^∞ par:

$$\forall\, \lambda \in \Lambda,\, X_\lambda(x, D)u = \mathrm{div}(uX_\lambda) - u\ \mathrm{div} X_\lambda.$$

Nous allons maintenant introduire la notion d'espace de Hölder non isotrope modelé sur une famille de champs de vecteurs X.

Définition 5.2. *Soit X une famille admissible de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leurs divergence dans C^ϵ. On note par $C^\epsilon(X)$ l'espace des distributions tempérées u, bornées sur $\mathbb{R}^d$ et telles que,*

$$\forall\, \lambda \in \Lambda,\, X_\lambda(x, D)u \in C^{\epsilon-1} \quad \text{et} \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x, D)u\|_{C^{\epsilon-1}} < +\infty.$$

La norme correspondante est définie par

$$\|u\|_{C^\epsilon(X)} = \frac{1}{I(X)}\Big(\|u\|_{L^\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x, D)u\|_{C^{\epsilon-1}}\Big).$$

L'importance de cette notion de régularité stratifiée apparaît dans le résultat suivant, établi par J.-Y. Chemin [3].

Théorème 5.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$ et pour tout $a > 1$, on a la propriété suivante :*
Soit X une famille admissible de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leur divergence dans l'espace C^ϵ. Considérons une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(X) \cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle et de tourbillon ω, alors il est lipschitzien et vérifie

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \le C\bigg(a\|\omega\|_{L^a} + \frac{\|\omega\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e + \frac{\|\omega\|_{C^\epsilon(X)}}{\epsilon\|\omega\|_{L^\infty}}\Big)\bigg). \tag{23}$$

Nous allons à travers la proposition suivante décrire l'évolution d'un champ de vecteurs tangent par le flot. La preuve se fait à l'aide d'un simple calcul de dérivation.

Proposition 5.1. *Soit v un champ de vecteurs lipschitzien et ψ le flot correspondant. Prenons une famille $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de champs de vecteurs appartenant à C^ϵ. Alors, le champ de vecteurs $X_t = \big(X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, défini par*

$$X_{t,\lambda}(x) = \psi_\star(t)X_{0,\lambda} = \big(X_{0,\lambda}(x, D))\psi(t)\big)\big(\psi^{-1}(t,x)\big),$$

satisfait l'équation

$$(24) \qquad \big(\partial_t + v\cdot\nabla\big)X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D)v.$$

Le transporté par le flot visqueux sera noté X_t^ν.

Remarque : L'utilité de l'application $\psi_\star(t)$ est qu'elle envoie un champ de vecteurs tangent à une courbe γ en un champ de vecteurs tangent à $\psi(t,\gamma)$.

Il s'agit maintenant de fournir unr généralisation du théorème 0.1.

Théorème 5.2. *Soient $0<\epsilon<1, a>1$ et X_0 une famille admissible de champs de vecteurs. On se donne un champ de vecteurs v^0 à coefficients dans C^1_* et de divergence nulle. On suppose en outre que $\nabla v^0 \in L^a$ et que son tourbillon $\omega^0 \in C^\epsilon(X_0)$. Alors, $\forall\,\nu\geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution v_ν dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. Plus précisément, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ,ω^0 et X_0 telle que si $0\leq\nu\leq 1$,*

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq Ce^{Ct} \\ \|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)\|_{C^\epsilon} + \|\omega_\nu(t)\|_{C^\epsilon(X_t^\nu)} &\leq Ce^{\exp Ct}. \end{aligned}$$

De plus, lorsque la viscosité ν tend vers zéro, alors v_ν tend vers v et $\psi_\nu - Id$ tend vers $\psi - Id$ dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;C^\alpha)$ pour tout $\alpha<1$. En outre, si $\epsilon'<\epsilon$ alors $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu, X^\nu_{t,\lambda}$ et div *$X^\nu_{t,\lambda}$ convergent respectivement vers $X_{0,\lambda}(x,D)\psi, X_{t,\lambda}$ et* div *$X_{t,\lambda}$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;C^{\epsilon'})$, uniformément en λ.*

5.2. **Démonstration du théorème 5.2.** Le point le plus délicat dans la preuve est d'estimer convenablement la quantité $\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu\|_{C^{\epsilon-1}}$ et c'est exactement dans cet endroit que l'effet régularisant et la propagation höldérienne sont décisifs. Comme les champs de vecteurs $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $X_{t,\lambda}$ commutent alors l'équation satisfaite par $X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu$ est donnée par

$$(25) \qquad \big(\partial_t + v_\nu\cdot\nabla - \nu\Delta\big)X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu = -\nu[\Delta, X_{t,\lambda}(x,D)]\,\omega_\nu.$$

Le problème qui surgit est de donner un sens au commutateur qui n'a *a priori* aucune raison d'exister vu que le laplacien consomme deux dérivées et le tourbillon est supposé juste borné. En revanche, nous allons voir que l'effet régularisant mis en évidence dans la proposition 2.1 nous permettra effectivement de montrer que le commutateur est presque pour tout temps dans l'espace $C^{\epsilon-1}$. Dans ce qui suit nous omettons l'indice ν afin d'alléger les notations.

5.2.1. *Estimation locale.* En se servant du calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony [2], nous aboutissons à la décomposition suivante :

$$\nu[\Delta, X_{t,\lambda}(x,D)]\,\omega = f + \nu\, g,$$

où l'on a posé

$$(26) \qquad f = 2\nu\, R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \partial_i\nabla\omega) + \nu R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i\omega)$$

et

$$(27) \qquad g = 2T_{\nabla X^i_{t,\lambda}}\partial_i\nabla\omega + 2T_{\partial_i\nabla\omega}\nabla X^i_{t,\lambda} + T_{\Delta X^i_{t,\lambda}}\partial_i\omega + T_{\partial_i\omega}\Delta X^i_{t,\lambda}.$$

Remarque : Nous avons utilisé la convention d'Einstein concernant la sommation sur les indices répétés.

Nous disposons pour f et g des estimations suivantes.

Lemme 5.1. *Soient* ϵ *un réel appartenant à* $]0,1[$ *et* $0 \leq C_0 \leq 1$. *Alors pour tous les réels* $0 \leq T_1 < T_2$ *vérifiant*

$$T_2 - T_1 + \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt \leq C_0 \tag{28}$$

et pour tout $t \in [T_1, T_2]$, *on a*

$$\sup_q 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q f(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C \sup_{\tau\in[T_1,\,t]} \widetilde{\|} X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty} \quad \textit{et}$$

$$\|g(t)\|_{C^{\epsilon-3}} \leq C \|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

La constante C *qui figure dans ces estimations ne dépend que de* ϵ.

Démonstration : Pour prouver le premier point on écrit que

$$R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i \omega) = \partial_i R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \omega) - R(\Delta \mathrm{div} X, \omega) \quad \text{et}$$
$$R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla \partial_i \omega) = \partial_i R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla\omega) - R(\nabla \mathrm{div} X_{t,\lambda}, \nabla\omega).$$

Ensuite on applique l'opérateur de localisation en fréquence Δ_q à f et on se sert du théorème 1.1. Concernant l'estimation de g, elle ne pose aucun problème significatif. Les paraproduits sont bien définis sous réserve que le tourbillon soit borné et que $\epsilon < 1$, et l'on obtient

$$\|g(t)\|_{C^{\epsilon-3}} \leq C \|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon} \|\omega(t)\|_{L^\infty}.$$

Pour conclure, on utilise l'estimation $\|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty}$. ■

Désormais nous nous plaçons sous la condition

$$T_2 - T_1 + \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt \simeq c. \tag{29}$$

avec c une constante que nous pouvons prendre aussi petite que l'on veut. Pour estimer la norme de $X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)$, on se sert de la formulation locale du théorème 2.1 et du lemme 5.1 et l'on obtient que pour tout réel $t \in [T_1, T_2]$,

$$\begin{aligned}
\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} &\leq C\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} + \|F\|_{\widetilde{L^1}([T_1,\,t];\,C^{\epsilon-1})} + \|G\|_{L^\infty([T_1,\,t];\,C^{\epsilon-3})}\Big) \\
&\leq C\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} + \|\omega^0\|_{L^\infty} \sup_{\tau\in[T_1,\,t]} \widetilde{\|} X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big).
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous tâcherons de décrire la propagation höldérienne du champ de vecteurs $X_{t,\lambda}$. Pour cela, on s'appuie d'une part sur l'équation qui le régit et qui est décrite dans la proposition 5.1, d'autre part, on se sert de la formulation locale de la propagation de la régularité höldérienne. Alors, on parvient à établir l'existence d'une constante absolue C telle que pour tout $t \in [T_1, T_2]$

$$\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^{t} \|X_\lambda(x,D)v(\tau)\|_{C^\epsilon} d\tau\Big). \tag{30}$$

Nous allons admettre l'inégalité qui suit. Pour plus de détails sur la preuve, on renvoie, par exemple, au lemme 3.3.2 de [3].

(31)
$$\|X_{t,\lambda}(x,D)v\|_{C^\epsilon} \leq C\Big(\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} + \|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\omega(t)\|_{L^\infty} + \|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\Big).$$

Par conséquent, en combinant (30) et (31) et en utilisant la condition (29), on trouve que pour tout $t \in [T_1,T_2]$

$$\begin{aligned}\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + C\int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} \quad &+ \quad \|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau \\ &+ \quad C\,c \sup_{T_1\leq\tau\leq t}\|X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}.\end{aligned}$$

Par suite, quitte à prendre c suffisamment petite dans (29), on trouve

$$\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + C\int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau. \tag{32}$$

Le contrôle de la quantité $\|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}$ ne pose pas de véritables problèmes. En effet, en prenant la divergence dans l'équation (24) et en se servant de l'incompressibilité du fluide, on montre que $\mathrm{div}X_{t,\lambda}$ vérifie l'équation de transport

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\mathrm{div}X_{t,\lambda} = 0.$$

Ainsi en appliquant une estimation analogue à (30), on obtient

$$\|\mathrm{div}X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\|\mathrm{div}X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon}, \forall t\in[T_1,T_2]. \tag{33}$$

Soit t un réel positif. Posons

$$\Gamma(t) \overset{déf}{=} \widetilde{\|}X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} + \frac{\|X_\lambda(x,D)\omega(t)\|_{C^{\epsilon-1}}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}.$$

Alors en combinant les inégalités (30), (32) et (33), on aboutit pour tout $t\in[T_1,T_2]$ à

$$\Gamma(t) \leq C\bigg(\Gamma(T_1) + \int_{T_1}^t \Gamma(\tau)\|\omega^0\|_{L^\infty}d\tau\bigg).$$

Donc nous aurons par l'intermédiaire du lemme de Gronwall et la définition (29)

$$\Gamma(t) \leq C\Gamma(T_1)\exp\bigg(C\int_{T_1}^t \|\omega^0\|_{L^\infty}d\tau\bigg). \tag{34}$$

Ceci achève la formulation locale de nos estimations. Occupons-nous dans le paragraphe suivant de leur extension à tout temps arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+$.

5.2.2. *Estimation globale.* Soit T un réel positif. Partageons l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^{N-1}$ telle que

$$T_{i+1} - T_i + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \simeq c = C^{-1}.$$

Soulignons qu'en faisant la somme de ces égalités, on trouve

$$i \simeq C\Big(1 + T_i + \int_0^{T_i} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big). \tag{35}$$

En appliquant l'inégalité (34) dans $[T_i, T_{i+1}]$ et en l'itérant de proche en proche, on parvient à établir l'estimation

$$\Gamma(t) \le C\Gamma(0)\exp\left(Ct\big(1+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)+C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right), \tag{36}$$

Nous allons maintenant voir que l'estimation (36) permet de déduire, par le biais du théorème 5.1, un contrôle sur le gradient de la vitesse.

5.2.3. *Estimation du gradient de la vitesse.* En faisant une estimation rétrograde, on montre facilement que pour tout temps positif t,

$$I(X_t) \ge I(X_0)\exp\Big(-\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\Big).$$

Par suite, l'inégalité $\|\omega(t)\|_{L^\infty} \le \|\omega^0\|_{L^\infty}$ à laquelle on associe l'estimation (36) donne

$$\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)} &\le \frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)}\Gamma(t)\exp\Big(\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big)\\
&\le \frac{C\Gamma(0)\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)}\exp\left(Ct\big(1+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)+C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right)\\
&\le C\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}\exp\left(Ct\big(1+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)+C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Or d'après le théorème 5.1, on sait qu'il existe une constante C telle qu'on a

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \le C\left(a\|\omega(t)\|_{L^a}+\|\omega(t)\|_{L^\infty}\log\Big(e+\frac{\|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)}}{\|\omega(t)\|_{L^\infty}}\Big)\right). \tag{38}$$

En reportant (37) dans (38) et en utilisant la croissance de l'application de $x \to x\log\,(e+\frac{a}{x})$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \le C\Bigg(a\|\omega^0\|_{L^a}+\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\Big(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big) &+ t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\omega^0\|^2_{L^\infty}t+\\
&+ \|\omega^0\|_{L^\infty}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Bigg).
\end{aligned} \tag{39}$$

Posons

$$\alpha_0 \stackrel{déf}{=} \left(a\|\omega^0\|_{L^a\cap L^\infty}+\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\Big(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\right).$$

Alors une simple application du lemme de Gronwall permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty} &\le C\Big(\alpha_0+t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\omega^0\|^2_{L^\infty}t\Big)\exp\Big(C\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big)\\
&\le C\big(1+\alpha_0\big)\exp\Big(C\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent en remplaçant dans (36) le gradient de la vitesse par la majoration (40), on parvient à

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &\leq \Gamma(0)\exp\Big(Ct+Ct\|\omega^0\|_{L^\infty}+C\big(t+\alpha_0 t\big)\exp\big(C\|\omega^0\|_{L^\infty}t\big)\Big)\\ &\leq C\Gamma(0)\exp\Big(C\big(1+\alpha_0\big)t\,e^{C\|\omega^0\|_{L^\infty}t}\Big).\end{aligned}\tag{40}$$

En ce qui concerne l'estimation de $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)$, nous avons par définition

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)=X_{t,\lambda}\circ\psi_\nu(t).$$

En conséquence, il suffit pour conclure d'utiliser le lemme de composition suivant.

5.3. **Une loi de composition.**

Lemme 5.2. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C dépendant de d telle que, si $s\in]-1,1[$ et $p\in[1,+\infty]$, alors pour toute fonction f de B_p^s et pour tout difféomorphisme ψ préservant la mesure , on aura*

$$\|f\circ\psi\|_{B_p^s}\leq C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|f\|_{B_p^s}.$$

De plus, si $s=0$, on a d'une manière plus précise

$$\|f\circ\psi\|_{B_p^0}\leq C\Big(1+\log\big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\big)\Big)\|f\|_{B_p^0}.$$

Démonstration. Le résultat est connu pour $s\in]0,1[$, uniquement sous l'hypothèse d'un difféomorphisme ψ ayant avec son inverse un jacobien borné. Le lemme ci-dessus recouvre le cas de la régularité négative, mais sous une hypothèse plus forte qui est la préservation de la mesure de Lebesgue. L'estimation logarithmique correspondant à $s=0$ a été établie par M. Vishik dans [11]. La preuve que nous allons fournir suit la démarche développée par ce même auteur. Elle utilise d'une manière cruciale le lemme 3.2. Pour ce faire, on écrit

$$f\circ\psi=\sum_{q\geq-1}\Delta_q f\circ\psi.$$

Ainsi en appliquant l'opérateur Δ_j et en se servant de l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\|\Delta_j\big(f\circ\psi\big)\|_{L^p}\leq\sum_{q\geq-1}\|\Delta_j\big(\Delta_q f\circ\psi\big)\|_{L^p}.$$

En conséquence, le lemme 3.2 permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\big(f\circ\psi\big)\|_{L^p} &\leq C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\sum_{q<j-N}2^{q-j}\|\Delta_q f\|_{L^p}+C\sum_{|j-q|\leq N}\|\Delta_q f\|_{L^p}.\\ &+ C\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\sum_{q>j+N}2^{j-q}\|\Delta_q f\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{41}$$

Si l'on multiplie des deux côtés par 2^{js} et l'on utilise l'inégalité de convolution, alors on aura

$$\|f\circ\psi\|_{B_p^s}\leq C\Big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}2^{-N(1-s)}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}2^{-N(1+s)}+2^{Ns}\Big)\|f\|_{B_p^s}.$$

Choisissons $N=\log_2(\|\nabla\psi\|_{L^\infty})$. Alors l'estimation ci-dessus devient

$$\|f\circ\psi\|_{B^s_p}\leq C\Big(\|\nabla\psi\|^s_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|\nabla\psi\|^{-(1+s)}_{L^\infty}\Big)\|f\|_{B^s_p}.$$

En se servant de l'inégalité

$$(d\ !)^{\frac{-1}{d}}\leq\|\nabla\psi^{\mp1}\|_{L^\infty},$$

alors nous obtenons le résultat énoncé. Quant au cas $s=0$, on peut déduire de (41) que

$$\|\Delta_j\big(f\circ\psi\big)\|_{L^p}\leq C\Big(2^{-N}\big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\big)+N\Big)\|f\|_{B^0_p}.$$

Ainsi en prenant $N=1+\log_2\big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\big)$ et en s'appuyant sur la décomposition donnée par (41), alors on parvient au résultat souhaité.

Remarque

Nous avons supposé implicitement dans tout le calcul précédent que les fonctions en jeu sont suffisamment régulières. De façon plus rigoureuse, nous devons régulariser la donnée initiale, en prenant par exemple $v^{0,n}=S_nv^0$, et montrer que les estimations du théorème 5.2 sont stables par passage à la limite en n. Cette étude a été faite dans [6]. De même, les résultats de convergence cités dans le théorème 5.2 s'obtiennent de façon similaire au théorème 1 établi dans [6].

Références

[1] M. Ben-Artzi, Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations, Arch. Anal. Rational Mech. **128**, pages 329-358, 1994.

[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. École Norm. Sup., **14**, pages 209-246, 1981.

[3] J.-Y. Chemin, Perfect incompressible Fluids, Oxford University Press.

[4] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel J. Anal. Math. **77**, pages 27-50, 1999.

[5] J.-Y. Chemin, A Remark on the inviscid limit for two-dimmensionnel incompressible fluid, Communications in Partial Differential Equations, **21**, pages 1771-1779, 1996.

[6] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, **76**, issue 7, pages 609-647, 1997.

[7] R. Danchin, Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière, Communications in Partial Differential Equations, **22**, pages 685-721, 1997.

[8] R. Danchin, Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon, Revista Marematica Iberoamerica,**16**, pages 281-329., 2000.

[9] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow, Communications on Pure and Applied Mathematics, **38**, pages 187-220, 1986.

[10] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches $2D$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **318**, **no. 6,** pages 515–518, 1994.

[11] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov Spaces, Arch. Rational Mech. Anal **145**, pages 197-214, 1998.

[12] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. , 4^e série, **32**, pages 769-812, 1999.

[13] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with unbounded vorticity. Comm. Math. Phys., no. 3, **213**, pages 697–731, 2000.

[14] V.I. Yudovich, Non-stationnary flows of an ideal incompressible fluid, Zhurnal Vych Matematika, **3**, pages 1032-106, 1963.