Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Alexis Vasseur

Interface cinétique / fluide: Un modèle simplifié

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° III, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Interface cinétique / fluide: Un modèle simplifié

Alexis Vasseur *

1 Introduction

On s'intéresse dans cet article au couplage entre un modèle cinétique simplifié et sa limite hydrodynamique. Le modèle, introduit par B.Perthame et E.Tadmor [21] est une caricature d'équation de Boltzmann, en une dimension d'espace:

$$\partial_t f + \xi \partial_x f = \mathcal{M}f - f, \tag{1}$$

où la "fonction d'équilibre" $\mathcal{M}f$ est définie par:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}f(t,x,\xi) = \mathbf{1}_{\{0 \le \xi \le u(t,x)\}} - \mathbf{1}_{\{-u(t,x) \le \xi \le 0\}} \\ &\text{avec : } \ u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{2}$$

L'opérateur de collision de Boltzmann est remplacé par le terme de relaxation $\mathcal{M}f - f$. Cette équation est la version "BGK" de la méthode de transport-écroulement introduite indépendamment par Y.Brenier [6, 7] et Y.Giga et Y.Miyakawa [12] pour résoudre numériquement les lois de conservation scalaires.

Considérons une fonction $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On peut définir la fonction d'équilibre associée $f^0 = M(u^0(x);\xi) \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ telle que:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}f^0 = f^0 \\ &\int_{\mathbb{R}} f^0(x,\xi)\, d\xi = u^0(x) \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans [17], P.L. Lions, B.Perthame et E.Tadmor ont montré que les solutions $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ de l'équation (1) redimensionnée

$$\partial_t f_\varepsilon + \xi \partial_x f_\varepsilon = \frac{\mathcal{M}f_\varepsilon - f_\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{3}$$

* Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2.

munies de la donnée initiale $M(u^0;\cdot)$ convergent, quand ε tend vers 0, vers $M(u(t,x);\xi)$, où $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est solution de l'équation de Burgers (à viscosité nulle):

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0, \\ &u(t=0) = u^0, \end{aligned} \tag{4}$$

et vérifie les "conditions d'entropie":

$$\partial_t \phi(u) + \partial_x H(u) \leq 0, \tag{5}$$

pour toute fonction convexe ϕ avec le flux d'entropie associé H vérifiant $H'(y) = y\phi'(y)$. Cette équation peut être vue comme une caricature des équations d'Euler des gaz compressibles. Dans cet article nous cherchons à définir une condition "naturelle" de couplage entre les équations (1) et (4). Nous choisissons de l'obtenir comme limite asymptotique du problème suivant lorsque ε tend vers 0:

$$\begin{aligned} &\partial_t f_\varepsilon + \xi \partial_x f_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(x)(\mathcal{M} f_\varepsilon - f_\varepsilon), \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, \\ &f_\varepsilon(t=0) = f^0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6}$$

où la fonction $\alpha_\varepsilon(x)$ vaut 1 pour $x \leq 0$ et $1/\varepsilon$ pour $x > 0$. Cela consiste à résoudre le problème (1) dans le domaine $x < 0$ et le problème (3) dans le domaine $x > 0$ avec une condition de transmission complète à la frontière $x = 0$.

Les conditions de couplage cinétique / fluide ont été très étudiées d'un point de vue numérique pour les problèmes d'ingénierie aérospatiale. C'est le cas, en particulier, pour le couplage entre l'équation de Boltzmann et le système de Navier Stokes (voir par exemple les travaux de J.-F.Bourgat, P.Le Tallec, B.Perthame et Y.Qiu [5], ou de P.Le Tallec et F.Mallinger [16]). Les méthodes consistent, pour la plupart, à approcher la partie fluide par un schéma cinétique (cf l'ouvrage de B.Perthame [20]). Ceci permet de définir le flux entrant dans la partie fluide à partir des demi-flux sortant de la partie cinétique. Enfin les demi-flux entrant dans la partie cinétique sont définis à partir de la maxwellienne associée à la trace des grandeurs fluide à l'interface. Pour le modèle simplifié cela correspond à prendre à l'interface $x = 0$ (Voir les travaux de S.Dellacherie [10]):

$$\begin{aligned} &F^+(u(t,0+)) = \textstyle\int_0^\infty \xi f(t,0-,\xi)\, d\xi \\ &f(t,0-,\xi) = M(u(t,0+);\xi) \text{ pour } \xi \leq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

où F^+ est le demi-flux positif du schéma d'Engquist-Osher [11]. L'expression (7) fournit un couplage plausible pour le modèle limite de (6). Pourtant ce n'est pas le bon. La raison est que le problème (6) produit à la limite une couche limite de taille ε qui n'est pas décrite par (7) (voir A.Klar [15]). Nous montrons dans cet article que le bon candidat pour la limite du problème (6) est le suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \dfrac{u^2}{2} = 0, \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+, \\ u(t=0,x) = u^0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(x,\xi)\, d\xi, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+, \\ u(t,x=0+) \overset{BLN}{:=} \sqrt{2\displaystyle\int_0^{\infty} \xi f(t,0-,\xi)\, d\xi}, \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \partial_x f = \mathcal{M}f - f, \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^-, \xi \in \mathbb{R}, \\ f(t=0,x,\xi) = f^0(x,\xi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^-, \xi \in \mathbb{R}, \\ f(t,x=0-,\xi \leq 0) = F(t,y=0+,\xi \leq 0) \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, \xi \in \mathbb{R}^-, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \xi \partial_y F = \mathcal{M}F - F, \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in \mathbb{R}, \\ F(t,y=0+,\xi \geq 0) = f(t,x=0-,\xi \geq 0), \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, \xi \in \mathbb{R}^+, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(t,y,\xi)\, d\xi = \frac{u(t,0+)^2}{2} \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{10}$$

Le système limite vérifie forcément la conservation des flux à l'interface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(t,x=0-,\xi)\, d\xi = \frac{u(t,0+)^2}{2}.$$

Or la condition de couplage dans (8) montre qu'il est possible, comme le suggère (7), de définir la condition au bord pour l'équation fluide uniquement à partir du flux sortant de la partie cinétique. Il est remarquable que cette condition corresponde exactement à la condition de Bardos-Leroux-Nedelec [1] qui est la condition naturelle pour l'équation de Burgers. Elle est définie de la manière suivante. On dit que $u \overset{BLN}{:=} v$ si et seulement si: $[u^2/2 - k^2/2]\mathrm{Sign}(u-v) \leq 0$ pour tout k entre u et v.

L'apparition de problème de couche limite pour ce genre de problème est naturel. L'équivalent du problème (10) pour l'opérateur de collision de Boltzmann est connu sous le nom de problème de Milne ou évaporation /

condensation. Il a été étudié de manière intensive par l'équipe de Y.Sone et K.Aoki (voir par exemple [23]). A.V. Bobylev, R. Grzhibovskis, and A. Heintz en ont proposé une approximation dans [3]. Les solutions de ce problème changent de type en fonction des données initiales. La classification des solutions a été accomplie par F.Golse F.Coron et C.Sulem dans [8]. Enfin, l'étude de couches limite de ce genre apparait dans l'étude asymptotique de problèmes liés aux semi-conducteurs (voir par exemple les travaux de F.Poupaud [22], de P.Degond et C.Schmeiser [9], ou de N.Ben Abdallah, P.Degond et I.M.Gamba [2]).

En ce qui concerne le modèle simplifié, des premiers pas ont été faits par A.Nouri, A.Omrane et J.P.Villa [18], C.Bourdarias, M.Gisclon et A.Omrane [4] et M.Tidriri [24]. Toutefois la présence de couches limite n'est prise en compte dans aucun de ces travaux. Enfin, F.Golse a étudié de manière détaillée dans [13] les profils de chocs associés à (1).

Nous donnons dans la section suivante les énoncés précis des résultats obtenus. Précisons tout de suite que l'analyse asymptotique du problème (6) n'est pas complète. La caractérisation de la condition de couplage dans (8) repose sur le résultat de trace forte de [27]. Le couplage lié à la couche limite est obtenu grâce à une méthode de "blow up" récemment développée pour le cadre hyperbolique dans [25, 26] (Ces méthodes étant classiques dans le cadre elliptique). Nous la présenterons dans la section 3. Elle repose sur un lemme de type Liouville présenté dans la section 4.

Fixons $L > 0$. On considèrera dans toute la suite des conditions initiales à support en ξ dans $[-L,L]$. Un principe du maximum implique que pour tout $\varepsilon > 0$ la solution du problème (6) ainsi que des problèmes (9) et (10) conservent cette propriété de support. Cette condition est cohérente avec le fait de considérer des solutions u de (8) bornées par L.

2 Présentation des résultats

Nous étudions dans un premier temps le problème de couches limite (10) (Théorème 1). Deux classes différentes de couches limite sont mises en évidence en fonction des paramètres les caractérisant. L'une sera appelée "couche limite de relaxation" et l'autre "couche limite de choc". Nous montrons ensuite l'existence et l'unicité de la solution du problème limite (9) (10) (8) (Théorème 2). Un résultat général montre que le problème (6) pour $x \geq 0$ converge vers le problème (8) avec les bonnes conditions au bord (Théorème 4). La condition de couplage pour la partie cinétique est beaucoup plus délicate. Nous montrons que lorsque les conditions initiales permettent d'assurer qu'il n'y aura que des couches limite de relaxation, la solution de (6) converge bien vers la solution du problème limite (Théorème 6). Nous montrons enfin un résultat plus restrictif dans le cas des couches limite de choc (Théorème 7). Nous expliquerons pourquoi ce cas est beaucoup plus difficile.

Présentons dès à présent un calcul heuristique justifiant l'apparition de couches limite. Définissons la fonction F_ε sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [-L,L]$ par:

$$F_\varepsilon(t,y,\xi) = f_\varepsilon(t,\varepsilon y,\xi), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L]. \tag{11}$$

La fonction F_ε vérifie:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \partial_t F_\varepsilon + \xi \partial_y F_\varepsilon = \mathcal{M} F_\varepsilon - F_\varepsilon, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L],\\
&F_\varepsilon(t,y=0,\xi) = f_\varepsilon(t,x=0,\xi), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L].
\end{aligned}$$

Formellement on obtient donc à la limite:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xi \partial_y F = \mathcal{M} F - F, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L],\\
F(t,y=0,\xi) = f(t,x=0-,\xi), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L],\\
F(t,y=+\infty,\xi) = M(u(t,0+);\xi), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L].
\end{array}\right. \tag{12}$$

La dernière équation est obtenue formellement par continuité avec la partie fluide. Nous verrons dans la suite que, bien que le problème limite puisse se formuler en terme de couche limite, cette limite asymptotique peut dans certains cas s'avérer fausse. En effet, on peut avoir, dans une situation critique entre les deux types de couches limite, un phénomène de "décollement" de cette dernière de la paroi. Enfin, dans le cas où cette asymptotique est valide, l'étude mathématique pose deux problèmes majeurs: La première consiste à recoller la valeur en $+\infty$ avec la partie fluide. Ceci ne peut se faire que si la formation de la couche limite est bien "confinée" près de la paroi, pour éviter, en particulier les phénomènes de décollement. Enfin, se pose le problème de convergence dans le terme non linéaire $\mathcal{M}F_\varepsilon$, les oscillations en temps pouvant être très importantes (ces deux points seront discutés en détail après l'énoncé du Théorème 7).

2.1 Existence et unicité des couches limite

Considérons l'ensemble:

$$\mathcal{C} = \left\{ (V,g) \in \mathbb{R}^+ \times L^1(\mathbb{R}^+); 0 \le g(\xi) \le 1; V \ge \int_0^\infty \xi g(\xi)\, d\xi \right\}.$$

Pour toute donnée $(V,g) \in \mathcal{C}$, nous dirons que $F \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ avec $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi)F(y,\xi) \leq 1$ est une solution de couche limite associée à (V,g) si F verifie:

$$\begin{cases} \xi \partial_y F = \mathcal{M}F - F \quad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R}+, \xi \in \mathbb{R}, \\ F(y=0,\xi \geq 0) = g \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathbb{R}^+, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi F(y,\xi)\, d\xi = V \quad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R}+. \end{cases} \tag{13}$$

Notons que le fait d'appartenir à $\mathcal{C}$ est une condition nécessaire pour être une solution de (13). En effet, si $V < \int_0^\infty \xi g(\xi)\, d\xi$ la troisième condition de (13) en $y = 0$ donne

$$\int_{-\infty}^{0} \xi F(0,\xi)\, d\xi < 0,$$

ce qui n'est pas possible puisque $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi)F$. Nous avons le résultat suivant:

Théorème 1 *Considérons $(V,g) \in \mathcal{C}$. Il existe alors une unique solution du problème 13. Définissons $u_\infty \in \mathbb{R}^+$ de telle manière que:*

$$V = \frac{u_\infty^2}{2}.$$

Nous avons alors deux cas:
(a) si $V = \int_0^\infty \xi g(\xi)\, d\xi$ nous dirons que nous avons affaire à une "couche limite de relaxation". Dans ce cas, $F(y,\xi) = 0$ pour tout $\xi \leq 0$ et:

$$\lim_{y \to \infty} F(y,\cdot) = M(u_\infty,\cdot) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}).$$

(b) si $V > \int_0^\infty \xi g(\xi)\, d\xi$, nous dirons être en présence d'une "couche limite de choc". On a alors:

$$\lim_{y \to \infty} F(y,\cdot) = M(-u_\infty,\cdot) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}).$$

Ce résultat appelle quelques commentaires.

Remarque 1: Les deux types de couches limite *(a)* et *(b)* ont des caractéristiques bien différentes. La première associe en $y = +\infty$ la fonction d'équilibre ayant le même premier moment que la donnée en $y = 0$ et $\xi \geq 0$. Le phénomène pris en compte par cette couche limite est donc simplement la relaxation de la donnée à gauche sur les fonctions d'équilibre.

Le deuxième type admet en $+\infty$ une fonction d'équilibre à valeurs pour les ξ négatifs, ayant un premier moment plus grand que celui de la donnée en $y = 0$ et $\xi \geq 0$. Cet état correspond à un déplacement vers la gauche avec un fort flux. On peut donc l'interpréter comme un profil de choc "collé" à la paroi $y = 0$.

Remarque 2: Le résultat *(a)* implique en particulier qu'il n'existe pas de couche limite reliant en $y = 0$ la fonction $M(u_\infty,\xi)$ à la fonction $M(-u_\infty,\xi)$ en $y = +\infty$. Cela décrit l'impossibilité d'avoir un profil de choc dans un demi-espace. Ce fait a déjà été mentioné dans [13]. Cette situation correspond au cas critique entre *(a)* et *(b)*. En effet, comme le premier cas on a:

$$V = \int_0^\infty \xi g(\xi)\, d\xi,$$

et comme dans le deuxième cas on a $M(-u_\infty,\xi)$ en $y = +\infty$. Ceci montre que l'on ne peut pas passer de manière continue d'une couche limite de relaxation à une couche limite de choc. Ce point est d'une grande importance pour la suite.

2.2 Existence et unicité du problème limite

Nous montrons dans un deuxième temps que le problème couplé (9)(10)(8) est bien posé et stable par rapport aux données initiales.

Théorème 2 *Pour toute donnée initiale* $(f^0,u^0) \in L^\infty(\mathbb{R}^- \times [-L,L]) \times L^\infty(\mathbb{R}^+)$ *vérifiant* $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) f^0 \leq 1$ *et* $|u^0| \leq L$, *il existe une unique solution* $(f,u,F) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \times [-L,L]) \times L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \times L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [-L,L])$ *au problème (9)(10)(8) vérifiant* $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) f \leq 1$ *et* $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) F \leq 1$. *De plus, deux telles solutions* (f_1,u_1,F_1), (f_2,u_2,F_2) *vérifient pour tout* $t \in \mathbb{R}+$*:*

$$\begin{aligned} &\|f_1(t) - f_2(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^- \times [-L,L])} + \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq \|f_1^0 - f_2^0\|_{L^1(\mathbb{R}^- \times [-L,L])} + \|u_1^0 - u_2^0\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Formulons quelques remarques.

Remarque 1: Il peut paraître surprenant d'obtenir la stabilité du problème limite alors que le problème de couche limite n'est pas continu par rapport aux données. En particulier, $F_1 - F_2$ ne peut pas être contrôlé par les données initiales. Remarquons que le couplage du problème limite dépend uniquement de la valeur en $y = 0$ de la couche limite. Or cette valeur, elle, est continue par rapport aux données du problème. Plus précisément, on peut montrer le lemme suivant:

Lemme 3 *Pour tout* $(g,V) \in \mathcal{C}$, *considérons la solution* F *du Problème (13). Nous définissons "l'opérateur de couplage",* G *à valeurs dans* $L^\infty(\mathbb{R}^-)$

de la manière suivante:

$$G((g,V),\xi) = F(0,\xi \leq 0).$$

L'opérateur G est alors continu de $L^1(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{R}^-)$.

Remarque 2: Pour obtenir l'existence du problème limite la méthode utilise le théorème de point fixe sur les traces des différentes fonctions à l'interface $x = 0$. Le résultat repose sur un passage à la limite sur les traces fortes des solutions de Burgers.

2.3 Passage à la limite dans la partie fluide

Le théorème suivant justifie la condition de couplage dans (8) dans le cas général.

Théorème 4 *Soit $f_\varepsilon^0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times [-L,L])$ verifiant $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) f_\varepsilon^0 \leq 1$. Nous notons $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [-L,L])$ la solution de (6) ayant ${f_\varepsilon}^0$ pour donnée initiale. Il existe alors une suite $\varepsilon_n \to 0$, deux fonctions $f^0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times [-L,L])$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [-L,L])$ telles que ${f_\varepsilon}^0, f_\varepsilon$ convergent faiblement vers f^0, f. De plus la fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ définie par*

$$u(t,x) = \int_{-L}^{L} f(t,x,\xi)\, d\xi \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+,$$

est solution de (8).

Ce résultat montre que la condition au bord est très stable puisqu'elle supporte les oscillations sur les données initiales. Il est une conséquence du résultat de trace forte pour les solutions de lois de conservation scalaires démontré dans [27]. Nous en donnons une version dans le cadre de la situation présente:

Théorème 5 *Pour toute solution $u \in L^\infty(]0,+\infty[^2)$ de (4) (5), il existe deux fonctions $u(0+,\cdot)$ et $u(\cdot,0+)$ dans $L^\infty(]0,+\infty[)$ telles que pour tout $R > 0$, $T > 0$:*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{x\to 0,\ x>0} \int_0^T |u(t,x) - u(t,0+)|\, dt = 0,$$

$$\operatorname*{esslim}_{t\to 0} \int_0^R |u(t,x) - u(0+,x)|\, dx = 0.$$

2.4 Limite asymptotique en présence de couche limite de relaxation

Soit $0 < u^+ < L$, considérons des solutions ${f_\varepsilon}^0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times [-L,L])$ avec $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi){f_\varepsilon}^0 \leq 1$ vérifiant

$$\begin{aligned} {f_\varepsilon}^0(x,\xi) &\geq M(u^+;\xi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^-,\xi \in [-L,L], \\ {f_\varepsilon}^0(x,\xi) &\geq M(-u^+;\xi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+,\xi \in [-L,L]. \end{aligned} \tag{14}$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Théorème 6 *Soit une suite* ${f_\varepsilon}^0$ *vérifiant (14) et convergeant faiblement dans* $L^\infty*$ *vers une fonction* $f^0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times [-L,L])$. *Considérons* f_ε *solution de (6) avec pour donnée initiale* ${f_\varepsilon}^0$. *La famille* $(f_\varepsilon|_{\{x\leq 0\}}, u_\varepsilon = \int f_\varepsilon \, d\xi|_{\{x \geq 0\}})$ *converge faiblement vers l'unique solution* (f,u) *du problème (9) (8) (10), avec comme donnée initiale* $(f^0|_{\{x\leq 0\}}, u^0 = \int f^0 \, d\xi|_{\{x\geq 0\}})$.

Les conditions initiales (14) permettent de s'assurer qu'il n'y aura que des couches de type relaxation à la limite. Remarquons que dans ce cas, d'après le théorème 1, la fonction de couche limite est nulle pour les $\xi \leq 0$. La condition de couplage pour la partie cinétique se réduit donc à:

$$f(t,0-,\xi \leq 0) = 0 \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+,\xi \leq 0.$$

Dans ce cas, la condition de couplage correspond donc à la condition (7). La structure fine de la couche limite n'intervient pas. (Ce n'est pas le cas pour une couche limite de choc et c'est pourquoi ce dernier est plus difficile à traiter). Cela explique que le résultat soit stable par convergence faible des données initiales, ce qui ne permet pas d'avoir de la convergence forte sur les fonctions de couches limite F_ε qui, elles, ne convergent certainement pas vers F.

Plus étonnant, considérons la condition initiale (ne dépendant pas de ε):

$$\begin{aligned} f^0(x,\xi) &= M(u^+;\xi) \text{ pour } x \leq 0,\xi \in [-L,L], \\ f^0(x,\xi) &= M(-u^+;\xi) \text{ pour } x \geq 0,\xi \in [-L,L]. \end{aligned}$$

Le théorème 6 montre que $(f_\varepsilon|_{\{x\leq 0\}}, u_\varepsilon = \int f_\varepsilon \, d\xi|_{\{x\geq 0\}})$ converge vers la fonction (ne dépendant pas du temps):

$$\begin{aligned} &f(t,x,\xi) = M(u^+;\xi) \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+,x \leq 0,\xi \in [-L,L], \\ &u(t,x) = -u^+ \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+,x \geq 0,\xi \in [-L,L]. \end{aligned}$$

Cela correspond à un choc stationnaire localisé sur l'interface $x = 0$. Or, d'après le théorème 1 (voir la remarque 2) , il n'existe pas de solution de couche limite reliant $M(u^+;\cdot)$ à $-u^+$. La fonction F_ε ne peut donc pas converger vers (12). Le choc (faisant passer de u^+ à $-u^+$) est donc pris en compte à une échelle plus grande que ε: Il est "décollé" de la paroi $x = 0$.

2.5 Limite asymptotique en présence de couche limite de choc

Dans cette section, nous présentons un résultat de convergence du problème (6) vers le problème limite dans le cas de la formation d'une couche de choc. Contrairement au cas précédent, la structure fine de la couche limite est nécessaire pour définir le couplage. Il est donc crucial de montrer la convergence de la fonction F_ε vers la solution de couche limite associée. Il faut donc s'assurer que le phénomène de "décollement" décrit plus haut ne peut pas se produire dans ce cas. Soit $u^+ \in \mathbb{R}^+$ et $\eta > 0$, nous considérons une donnée initiale f^0 vérifiant:

$$\begin{array}{l} \mathrm{Supp} f^0(x,\cdot) \subset]-L,u^+-\eta] \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^-, \\ f^0(x,\xi) = M(-u^+;\xi) \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L]. \end{array} \tag{15}$$

nous avons alors le résultat suivant:

Théorème 7 *Soit f_ε la solution du problème (6) associée à la donnée initiale (15). Soit F_ε définie par (11). La quantité suivante: $(f_\varepsilon|_{\{x\leq 0\}}, F_\varepsilon, u_\varepsilon = \int f_\varepsilon \, d\xi|_{\{x\geq 0\}})$, converge alors vers (f,F,u) solution de (9) (14) (8) avec comme donnée initiale:*

$$\begin{array}{l} f^0(x,\xi) \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^-, \xi \in [-L,L], \\ u^0(x) = \displaystyle\int_{-L}^{L} f^0(x,\xi)\, d\xi, \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{array}$$

La difficulté principale de ce résultat est le passage à la limite dans le terme F_ε. Pour éviter les phénomènes de décollement il faut s'assurer que le choc reste "bien confiné" près de la paroi $x = 0$. La condition sur les données initiales (15) et un argument de type principe du maximum permet de montrer que uniformément en ε:

$$|F_\varepsilon(t,y,\xi) - M(-u^+;\xi)| \leq |F_g(y,\xi) - M(-u^+;\xi)| \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in \mathbb{R},$$

où F_g est la solution de couche limite de (13) associée à (g,V) avec $g(\xi) = M(u^+ - \eta;\xi)$ et $V = (u^+)^2/2$. La propriété de "bon confinement" est alors assurée par le lemme suivant:

Lemme 8 *Posons $g(\xi) = M(u^+ - \eta;\xi)$ et $V = (u^+)^2/2$. La fonction de couche limite F_g associée à (g,V) vérifie:*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-L}^{L} |F_g(y,\xi) - M(-u^+;\xi)|\, d\xi\, dy \leq C < +\infty.$$

Il faut maintenant trouver de la compacité forte pour passer à la limite dans la couche limite. Pour cela on utilise une méthode de blow-up décrite dans la section suivante.

3 Méthode de "blow up"

Dans cette section nous nous mettons dans les hypothèses du théorème 7. La fonction f_ε vérifiant $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) f_\varepsilon \leq 1$, il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que f_{ε_n} converge faiblement vers une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [-L,L])$ verifiant $0 \leq \mathrm{Sign}(\xi) f \leq 1$. Des méthodes classiques (voir [17]) permettent alors de montrer que f vérifie l'équation (1) pour $x < 0$ et que $u = \int f\, d\xi$ vérifie (4) pour $x > 0$. Rappelons en particulier que la structure de l'équation (1) permet d'utiliser les lemmes de moyenne introduits par F.Golse, B.Perthame et R.Sentis dans [14]. Nous utilisons ici la version de B.Perthame et P.E.Souganidis [19]. Ils impliquent que $\int f_{\varepsilon_n}\, d\xi$ converge fortement dans L^1_{loc}. On en déduit alors que $\mathcal{M} f_{\varepsilon_n}$ converge fortement vers $\mathcal{M} f$. La condition de couplage dans (8) s'obtient grâce au théorème 5. Nous nous focalisons dans cette section sur l'obtention de la condition de couplage dans (9).

Comme indiqué dans l'introduction, l'équation vérifiée par F_ε ne contrôle plus les oscillations temporelles lorsque ε tend vers 0. L'idée consiste à rétablir la structure de (1) en faisant un zoom en temps sur l'équation. On introduit alors une nouvelle variable locale de temps $s \in \mathbb{R}$ et une nouvelle fonction redimensionée définie par:

$$\overline{F}_\varepsilon(t,s,y,\xi) = F_\varepsilon(t + \varepsilon s, y, \xi). \tag{16}$$

Pour presque tout $t > 0$ fixé, la fonction $\overline{F}_\varepsilon$ vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &\partial_s \overline{F}_\varepsilon + \xi \partial_y \overline{F}_\varepsilon = \mathcal{M}\overline{F}_\varepsilon - \overline{F}_\varepsilon, \ \text{ pour } \ s \in]-t/\varepsilon, +\infty[, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L], \\ &\overline{F}_\varepsilon(t,s,0,\xi) = f_\varepsilon(t + \varepsilon s, 0, \xi) \ \text{ pour } \ s \in]-t/\varepsilon, +\infty[, \xi \in [-L,L], \\ &|\overline{F}_\varepsilon(t,s,y,\xi) - M(-u^+;\xi)| \leq |F_g(y,\xi) - M(-u^+;\xi)| \\ &\qquad\qquad \text{pour } \ s \in]-t/\varepsilon, +\infty[, y \in \mathbb{R}^+, \xi \in [-L,L]. \end{aligned} \tag{17}$$

On fixe maintenant la date $t > 0$, et on passe à la limite lorsque ε_n tend vers 0. La fonction $\overline{F}_{\varepsilon_n}(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ est bornée par un, donc à une sous-suite près elle converge faiblement vers une fonction que l'on notera $\overline{F}_\infty(t,\cdot,\cdot,\cdot)$. Comme mentionné ci-dessus, la structure de l'équation (1), permet d'utiliser les lemmes de moyenne. On en déduit que $\mathcal{M}\overline{F}_{\varepsilon_n}$ converge vers $\mathcal{M}\overline{F}_\infty(t,\cdot,\cdot,\cdot)$. La structure de (1) permet de montrer que $f_{\varepsilon_n}(\cdot,0,\cdot)$ converge fortement vers $f(\cdot,0-,\cdot)$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, puis que $\overline{F}_{\varepsilon_n}$ converge vers $\overline{F}_\infty$ dans L^1_{loc} aussi. Pour presque tout $t > 0$ on peut alors passer à la limite dans (17) pour trouver:

$$\begin{aligned}
&\partial_s\overline{F}_\infty + \xi\partial_y\overline{F}_\infty = \mathcal{M}\overline{F}_\infty - \overline{F}_\infty, \text{ pour } s\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^+,\xi\in[-L,L],\\
&\overline{F}_\infty(t,s,0,\xi) = f(t,0,\xi) \text{ pour } s\in\mathbb{R},\xi\in[0,L],\\
&|\overline{F}_\infty(t,s,y,\xi) - M(-u^+;\xi)| \le |F_g(y,\xi) - M(-u^+;\xi)|,\\
&\qquad\qquad \text{pour } s\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^+,\xi\in[-L,L].
\end{aligned} \tag{18}$$

Le lemme suivant de type Liouville permet de définir complètement cette limite:

Lemme 9 *Il existe une unique solution $F(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ au problème (18). Cette solution ne dépend pas de s.*

On en déduit donc que $\overline{F}_\infty$ est l'unique solution F du problème de couche limite (10) associée à $(f(t,0+,\xi\ge 0),V=(u^+)^2/2)$. En particulier toute la suite $\overline{F}_{\varepsilon_n}$ est convergente.

La convergence de la fonction F_{ε_n} vers la fonction F est alors une conséquence du lemme suivant:

Lemme 10 *(Du local au global) Soit F_{ε_n}, $F\in L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$. Alors F_{ε_n} converge fortement vers F dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout $R>0$, $T>0$:*

$$\int_0^T\int_0^R\int_{-L}^L\int_0^1 |F_{\varepsilon_n}(t+\varepsilon_n s,y,\xi) - F(t,y,\xi)|\,ds\,dy\,d\xi\,dt \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{19}$$

Ce lemme permet de conclure sur la convergence de la fonction globale F_{ε_n} à partir de la connaissance de la convergence sur les fonctions locales $\overline{F}_{\varepsilon_n}$.

4 Lemme de Liouville

Nous avons vu dans la section précédente que le lemme 9 de type Liouville est crucial dans la preuve de la convergence de la couche limite. En effet il caractérise de manière unique les limites des fonctions localisées $\overline{F}_{\varepsilon_n}$, ce qui permet, grâce au lemme 10 de remonter l'information au niveau de la suite non localisée F_{ε_n}.

Nous donnons dans cette section une idée de la preuve de ce lemme. Remarquons que le résultat dépend fondamentalement de la propriété de "bon confinement près de la paroi" (17) et du fait que la solution existe pour tout $s\in\mathbb{R}$. Comme la solution de couche limite est solution du problème, la preuve se résume à montrer l'unicité de la solution du problème (18). Considérons donc deux solutions F_1,F_2. On peut montrer qu'elles vérifient:

$$
\begin{array}{l}
\partial_s|F_1-F_2|+\xi\partial_y|F_1-F_2|=-\mathcal{D}(F_1,F_2),\ \text{pour } s\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^+,\xi\in\mathbb{R},\\
|F_1-F_2|(s,0+,\xi)=0\ \ \text{pour}\ \ s\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R}^+,\\
|F_1-F_2|(s,y,\xi)\le 2|F_g(y,\xi)-M(-u^+,\xi)|\ \ \text{pour}\ \ s\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^+,\xi\in\mathbb{R},
\end{array}
\tag{20}
$$

où $\int\mathcal{D}(F_1,F_2)\,d\xi\ge 0$. D'après le Lemme 8, $F_g-M(-u^+;\cdot)$ est intégrable, donc $|F_1-F_2|(s,\cdot,\cdot)$ est intégrable pour tout s fixé. En intégrant la première équation de (20) par rapport à y et ξ, on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\int_{-L}^{L}\int_0^{\infty}|F_1-F_2|(s,y,\xi)\,d\xi\,dy\\
&=-\int_{-L}^{L}\int_0^{\infty}\mathcal{D}(F_1,F_2)(s,y,\xi)\,d\xi\,dy+\int_{-\infty}^{0}\xi|F_1-F_2|(s,0+,\xi)\,d\xi\le 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

On en déduit que $\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}|F_1-F_2|(s,y,\xi)\,d\xi\,dy$ est une fonction décroissante bornée. Notons δ sa limite en $-\infty$. Considérons maintenant les fonctions translatées en temps: $F_i^n(s,\cdot,\cdot)=F_i(s-n,\cdot,\cdot)$ pour $i=1,2$. A une sous suite près ces fonctions convergent dans L^1_{loc} vers F_1^∞,F_2^∞ solutions du problème (18). La fonction $|F_1^\infty-F_2^\infty|$ vérifie donc (20). De plus, grâce au théorème de convergence dominé, $\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}|F_1^\infty-F_2^\infty|(s,y,\xi)\,d\xi\,dy=\delta$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. On a donc $\mathcal{D}(F_1^\infty,F_2^\infty)=0$ et $|F_1^\infty-F_2^\infty|(s,0,\xi)=0$ d'après (21). On peut en déduire que $|F_1^\infty-F_2^\infty|(s,y,\xi)=0$ partout, et donc que $\delta=0$. Finallement on a bien $F_1=F_2$.

Références

[1] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9):1017–1034, 1979.

[2] N. Ben Abdallah, P. Degond, and I. M. Gamba. Coupling one-dimensional time-dependent classical and quantum transport models. *J. Math. Phys.*, 43(1):1–24, 2002.

[3] A. V. Bobylev, R. Grzhibovskis, and A. Heintz. Entropy inequalities for evaporation/condensation problem in rarefied gas dynamics. *J. Statist. Phys.*, 102(5-6):1151–1176, 2001.

[4] C. Bourdarias, M. Gisclon, and A. Omrane. Transmission boundary conditions in a model-kinetic decomposition domain. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2(1):69–94, 2002.

[5] J.-F. Bourgat, P. Le Tallec, B. Perthame, and Y. Qiu. Coupling Boltzmann and Euler equations without overlapping. In *Domain decomposition methods in science and engineering (Como, 1992)*, volume 157 of *Contemp. Math.*, pages 377–398. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[6] Yann Brenier. Une application de la symétrisation de Steiner aux équations hyperboliques: la méthode de transport et écroulement. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(11):563–566, 1981.

[7] Yann Brenier. Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension $N+1$. *J. Differential Equations*, 50(3):375–390, 1983.

[8] François Coron, François Golse, and Catherine Sulem. A classification of well-posed kinetic layer problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(4):409–435, 1988.

[9] Pierre Degond and Christian Schmeiser. Kinetic boundary layers and fluid-kinetic coupling in semiconductors. *Transport Theory Statist. Phys.*, 28(1):31–55, 1999.

[10] Stéphane Dellacherie. Personal communication.

[11] Björn Engquist and Stanley Osher. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Math. Comp.*, 36(154):321–351, 1981.

[12] Yoshikazu Giga and Tetsuro Miyakawa. A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations. *Duke Math. J.*, 50(2):505–515, 1983.

[13] François Golse. Shock profiles for the Perthame-Tadmor kinetic model. *Comm. Partial Differential Equations*, 23(11-12):1857–1874, 1998.

[14] François Golse, Benoît Perthame, and Rémi Sentis. Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(7):341–344, 1985.

[15] Axel Klar. Domain decomposition for kinetic problems with nonequilibrium states. *European J. Mech. B Fluids*, 15(2):203–216, 1996.

[16] Patrick Le Tallec and François Mallinger. Coupling Boltzmann and Navier-Stokes equations by half fluxes. *J. Comput. Phys.*, 136(1):51–67, 1997.

[17] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor. A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(1):169–191, 1994.

[18] A. Nouri, A. Omrane, and J. P. Vila. Boundary conditions for scalar conservation laws from a kinetic point of view. *J. Statist. Phys.*, 94(5-6):779–804, 1999.

[19] B. Perthame and P. E. Souganidis. A limiting case for velocity averaging. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(4):591–598, 1998.

[20] Benoit Perthame. An introduction to kinetic schemes for gas dynamics. In *An introduction to recent developments in theory and numerics for conservation laws (Freiburg/Littenweiler, 1997)*, volume 5 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 1–27. Springer, Berlin, 1999.

[21] Benoît Perthame and Eitan Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136(3):501–517, 1991.

[22] F. Poupaud. Diffusion approximation of the linear semiconductor Boltzmann equation: analysis of boundary layers. *Asymptotic Anal.*, 4(4):293–317, 1991.

[23] Yoshio Sone, Hiroshi Sugimoto, and Kazuo Aoki. Cylindrical Couette flows of a rarefied gas with evaporation and condensation: reversal and bifurcation of flows. *Phys. Fluids*, 11(2):476–490, 1999.

[24] M. Tidriri. Oral communication.

[25] A. Vasseur. Time regularity for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$. *Commun. Partial Differ. Equations*, 24(11-12):1987–1997, 1999.

[26] Alexis Vasseur. Convergence of a semi-discrete kinetic scheme for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$. *Indiana Univ. Math. J.*, 48(1):347–364, 1999.

[27] Alexis Vasseur. Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 160(3):181–193, 2001.