Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Didier Smets

Problèmes d'évolution liés à l'énergie de Ginzburg-Landau

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A12_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Problèmes d'évolution liés à l'énergie de Ginzburg-Landau

Didier Smets

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie
175 rue du Chevaleret
75013 Paris FRANCE

A propos de travaux en collaboration avec

Fabrice Bethuel et Giandomenico Orlandi

1 Introduction

Nous présenterons ici quelques résultats récents ainsi que des problématiques ouvertes concernant deux équations d'évolution, à savoir l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon(1-|u_\varepsilon|^2) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{NLS}$$

et l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \Delta u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon(1-|u_\varepsilon|^2) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \tag{PGL}$$

Quelques remarques et précisions s'imposent d'emblée. Premièrement, nous considérerons essentiellement le cas $N \geq 3$, le cas de la dimension deux d'espace donnant lieu à des résultats sensiblement différents pour ce qui sera notre propos. Deuxièmement, les fonctions u_ε envisagées seront à valeurs complexes $u_\varepsilon\ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, il s'agit donc en réalité de deux systèmes, chacun étant couplé par le biais du terme $|u_\varepsilon|$. On pourra noter que l'équation (PGL) garde tout son sens pour des fonctions à valeurs vectorielles

$u_\varepsilon : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ où k est un entier quelconque. Cette possibilité ne sera pas envisagée ici. L'équation de Gross-Pitaevskii (NLS) en revanche est particulière au cas complexe. Enfin et troisièmement, on pourra se demander la raison de la présence du paramètre réel ε apparaissant comme un facteur de pénalisation dans (PGL) et (NLS). Remarquons à ce sujet que si u_ε vérifie une des deux équations (PGL) ou (NLS), alors la fonction remise à échelle définie par $v(x,t) = u_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)$ vérifie l'équation correspondante où le facteur $\frac{1}{\varepsilon^2}$ a été remplacé par 1. Dans ce sens, le choix du paramètre ε correspond donc à un choix d'échelle. La raison pour laquelle nous choisissons de le garder dans les équations est dû au fait qu'une bonne part de notre analyse se concentrera sur l'asymptotique $\varepsilon \to 0$.

La version stationnaire de (PGL) et (NLS) est souvent appelée l'équation de Ginzburg-Landau, et son analyse asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$ a été largement considérée ces dernières années, notamment depuis les travaux de Bethuel, Brezis et Hélein [4]. Nous renvoyons à [4, 5] pour une bibliographie et un historique détaillés concernant le sujet.

L'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1-|u|^2)^2}{4\varepsilon^2}$$

joue un rôle fondamental pour chacune des ces équations. Sa particularité la plus marquante est la non-convexité du terme potentiel de pénalisation $V_\varepsilon(z) = \frac{(1-|z|^2)^2}{4\varepsilon^2}$, qui atteint son minimum non pas en un point isolé de $\mathbb{C}$ mais sur la variété non simplement connexe $S^1 \subset \mathbb{C}$. Les physiciens parleront ici de dégénérescence de la variété du vide. Nous nous intéresserons uniquement aux solutions qui, pour ε fixé, sont d'énergie finie, et par conséquent nous restreindrons notre analyse au cas des conditions aux limites

$$|u_\varepsilon(x,t)| \to 1 \qquad \text{quand} \qquad |x| \to +\infty. \tag{CL}$$

2 Concernant l'équation de Gross-Pitaevskii

D'un point de vue mathématique, (NLS) est une équation de Schrödinger non linéaire. En raison des conditions limites (CL) que nous adoptons ici, le problème de Cauchy lui correspondant n'est pas standard. En particulier, à notre connaissance aucun résultat ne traite le caractère bien posé de (NLS) dans l'espace d'énergie naturel

$$X := \left\{ u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } E_\varepsilon(u) < +\infty \right\}.$$

Toutefois, il est plus standard de montrer que (NLS) est bien posé dans l'espace affine $(1 + H^1(\mathbb{R}^N)) \cap X$ (la constante 1 pouvant bien sûr être remplacée par n'importe quel nombre complexe de module égal à un).

D'un point de vue formel, (NLS) est un système Hamiltonien qui possède, outre l'énergie $E_\varepsilon(u)$, une deuxième quantité conservée par le flot, à savoir le moment vectoriel

$$p(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (iu,\nabla u).$$

Ici et dans la suite, la notation $(.,.)$ se réfère au produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. Notons que a priori la quantité $p(.)$ est mal définie dans X.

Nos résultats pour (NLS) concernent l'existence de solutions particulières ayant la forme d'ondes progressives. Il est plus ou moins attendu que celles-ci jouent un rôle important dans la dynamique globale de (NLS), mais cette dernière problématique semble beaucoup plus difficile à traiter.

Pour préciser les choses, nous dirons qu'une onde progressive est une solution de (NLS) de la forme

$$u_\varepsilon(x,t) = U_\varepsilon(x_1 - Ct,x_2,\cdots,x_N), \tag{1}$$

où $C > 0$ est la vitesse de l'onde et $U_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ son profil. Le choix de la direction de propagation a été arbitrairement fixé suivant la première coordonnée, mais l'équation est invariante par rotation. On vérifie aisément que u_ε est solution de (NLS) si et seulement si le profil d'onde U_ε est une solution de l'équation

$$iC\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_1} = \Delta U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}U_\varepsilon(1 - |U_\varepsilon|^2). \tag{2}$$

Afin de décrire notre résultat principal, il est utile de considérer, dans les coordonnées cylindriques (x_1,r,θ), où $r := \sqrt{x_2^2+\cdots+x_N^2}$, la sphère unitaire $S := \{(0,1,\theta)\}$, et dans le demi-plan supérieur $H_+ := \{(x_1,r),\ r > 0\}$, l'opérateur

$$L\Psi = r^{N-2}\partial_r\left(r^{2-N}\partial_r\Psi\right) + \partial^2_{x_1}\Psi.$$

Le problème linéaire

$$\begin{cases} L\Psi = 2\pi\delta_q & q = (0,1) \\ \Psi(x_1,0) = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique Ψ_* qui soit bornée à l'infini. Moyennant un éventuel changement de phase, il existe également (voir [4]) une unique fonction $\omega_* \in \mathcal{C}^\infty(H_+ \setminus \{q\})$, telle que $|\omega_*| = 1$ et

$$\left(\omega_* \times \frac{\partial\omega_*}{\partial x_1},\omega_* \times \frac{\partial\omega_*}{\partial r}\right) = \left(-\frac{\partial\Psi_*}{\partial r},\frac{\partial\Psi_*}{\partial x_1}\right).$$

Ici et par la suite, $a \times b := a_1 b_2 - a_2 b_1$ représente le produit extérieur de deux vecteurs $a,b \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Enfin, nous définissons la fonction U_* par

$$U_*(x_1,r,\theta) := \omega_*(x_1,r).$$

Celle-ci est régulière en dehors de S, à symétrie cylindrique, et prend ses valeurs dans le cercle S^1. En particulier, en dimension d'espace $N = 3$, U_* est singulière le long d'un cercle. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 1 ([6]). *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ une solution U_ε de (2) existe pour un certain $C = C(\varepsilon)$ vérifiant*

$$\frac{C(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|} \to N - 2 \qquad \textit{quand } \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

et, notant $E(\varepsilon) := E(U_\varepsilon)$, $P(\varepsilon) := p(U_\varepsilon)$, nous avons

$$\frac{P(\varepsilon)}{2\pi} = |B^{N-1}|, \qquad \frac{E(\varepsilon)}{\pi |\log \varepsilon|} \to |S^{N-2}|, \tag{4}$$

et

$$|U_\varepsilon(x)| \to 1 \quad \textit{quand} \quad |x| \to +\infty. \tag{5}$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$U_\varepsilon \to U_* \quad \textit{dans} \quad \mathcal{C}^k_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus S). \tag{6}$$

Un moyen simple et intéressant de "visualiser" ces ondes progressives consiste à utiliser le parallèle suivant avec la mécanique des fluides. Il consiste à réécrire l'équation au moyen des variables polaires (processus fréquemment référencé comme transformation de Madelung dans le contexte),

$$U_\varepsilon(\varepsilon x,\varepsilon^2 t) = \sqrt{\rho}\exp(i\varphi),$$

qui fait sens tant que le module de U_ε ne s'annule pas. Dans ces nouvelles variables ρ et $v := \nabla\varphi$, l'équation (NLS) se transforme en

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) + \nabla\left(\frac{\rho^2}{4}\right) = -\rho\nabla\left(\frac{|\nabla\rho|^2}{8\rho^2} - \frac{\Delta\rho}{4\rho}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Hormis le dernier terme, on reconnaît là l'équation d'Euler pour un fluide compressible avec loi de pression $p = \rho^2/4$.

Revenant à l'énoncé du Théorème 1, on peut dès lors affirmer que le champ de vitesse correspondant aux ondes progressives que nous obtenons se concentre (après dilatation d'un facteur $1/\varepsilon$) sur un cercle de rayon unité perpendiculaire à la vitesse de propagation, et reste uniformément borné localement en dehors de ce cercle. On peut également montrer que la circulation de la vitesse le long d'une courbe dépend uniquement de son nombre d'enlacements avec ce cercle limite. De manière imagée, le profil de vitesse est donc très similaire à ce que l'on entend habituellement par un "anneau de fumée".

Le terme additionnel apparaissant dans le membre de droite de (7) est souvent mis en correspondance avec la "pression quantique" dans la littérature physique. Il semble qu'il soit aussi sensé représenter des effets de capillarité dans certains modèles de mécanique des fluides.

Notons également que les solutions de (7) qui proviennent de (NLS) sont, en raison de la définition même de la vitesse comme gradient de la phase, des écoulements potentiels, au moins localement autour d'un point où U_ε ne s'annule pas. Dans le cas incompressible, de tels écoulements seraient par conséquent sans vorticité (la vorticité ω étant définie comme le rotationnel de la vitesse v); la "vorticité" des écoulements correspondants aux solutions du Théorème 1 prend son origine dans le caractère compressible, et se concentre précisément aux endroits où la densité tombe à zéro.

Une autre conséquence du fait que la vitesse soit le gradient d'une phase est la quantification déjà mentionnée de la circulation de la vitesse v le long de n'importe quelle courbe γ où U_ε ne s'annule pas :

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{\tau}\, dl = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cette propriété est caractéristique de la plus large famille des fluides quantiques.

Concernant l'équation d'Euler incompressible, l'existence d'ondes progressives ayant la forme d'anneaux de vorticité (comme des anneaux de fumée) avait déjà été remarquée par Helmholtz en 1858 [10]. Plus tard, Lord Kelvin put calculer de manière asymptotique les relations entre le rayon, la section et la vitesse de propagation de ces anneaux de vorticité. Ce n'est qu'en 1974 que Fraenkel et Berger [9] ont établi ces résultats de manière rigoureuse, ensuite complétés par Ambrosetti et Struwe [2]. Il serait intéressant de considérer le cas compressible sans terme de pression quantique, à notre connaissance il n'existe que des études numériques (voir par exemple [19]).

Nous reviendrons plus tard sur la possibilité de dire davantage de choses sur le système complet (NLS) et pas seulement sur ses ondes progressives. Avant cela, voyons d'abord ce qu'il en est pour le cas parabolique de (PGL).

3 Concernant l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

En raison de son caractère régularisant bien meilleur en comparaison à (NLS), l'équation (PGL) est bien posée dans l'espace d'énergie X. En revanche, contrairement au cas Hamiltonien de (NLS), l'énergie le long du flot de (PGL) n'est plus constante mais décroît suivant la loi

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot,T_2)) + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 (x,t) dx\, dt = E_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot,T_1)) \quad \forall\, 0 \leq T_1 \leq T_2. \tag{8}$$

Nous nous plaçons dans la situation où la condition initiale u_ε^0 vérifie la borne uniforme

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \leq M_0 |\log \varepsilon|. \tag{H$_0$}$$

Notons que les anneaux de vorticité obtenus pour l'équation de Gross-Pitaevskii (NLS) dans le Théorème 1 vérifiaient une telle borne d'énergie. D'un point de vue heuristique, on peut dire sans trop se tromper que ce régime est celui pour lequel la vorticité peut apparaître sous forme de filaments isolés (dans le cas de la dimension 3). En dessous de se régime on ne voit pas la vorticité (au moins à l'échelle 1), et au dessus la situation est plus compliquée, les vortex pouvant s'agglutiner entre eux pour donner des structures de plus grande dimension. Une analyse rigoureuse de ce dernier régime des hautes énergies reste à accomplir pour le cas $N = 3$, le cas de la dimension 2 ayant été abordé dans les nombreux travaux de Sandier et Serfaty (on pourra consulter en particulier [22] et [23]).

Dans cette étude, nous placerons notre attention sur la limite asymptotique, lorsque $\varepsilon \to 0$, des mesures de Radon μ_ε définies sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ par

$$\mu_\varepsilon(x,t) = \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))}{|\log \varepsilon|}\, dx\, dt,$$

et de leurs sections à temps fixé μ_ε^t définies sur $\mathbb{R}^N \times \{t\}$ par

$$\mu_\varepsilon^t(x) = \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t))}{|\log \varepsilon|}\, dx,$$

de telle sorte que $\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^t\, dt$. En raison de l'hypothèse (H_0) et de la décroissance de l'énergie exprimée par (8), nous pouvons supposer qu'après passage éventuel à une sous-suite $\varepsilon_n \to 0$, il existe une mesure de Radon μ_* définie sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ et telle que

$$\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu_* \qquad \text{faiblement au sens des mesures.}$$

De plus, utilisant un argument dû à Brakke [8] et lié au contrôle des dérivées en temps, nous pouvons supposer sans perte de généralité que pour une même sous-suite $\varepsilon_n \to 0$ et pour chaque $t \geq 0$,

$$\mu_\varepsilon^t \rightharpoonup \mu_*^t \qquad \text{faiblement au sens des mesures sur } \mathbb{R}^N \times \{t\}.$$

Nos résultats principaux décrivent dans un premier temps des propriétés de régularité de μ_*, et ensuite l'évolution des mesures μ_*^t. Tout d'abord, nous avons le théorème de structure :

Théorème 2 ([7]). *Il existe un sous-ensemble* Σ_μ *de* $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ *et une fonction à valeurs réelles régulière* Φ_* *définie sur* $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ *tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

i) Σ_μ *est fermé dans* $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ *et pour tout compact* $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \setminus \Sigma_\mu$

$$|u_\varepsilon(x,t)| \to 1 \qquad \textit{uniformément sur } \mathcal{K} \textit{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

ii) Pour chaque $t > 0$, $\Sigma_\mu^t \equiv \Sigma_\mu \cap \mathbb{R}^N \times \{t\}$ *vérifie la borne*

$$\mathcal{H}^{N-2}(\Sigma_\mu^t) \leq KM_0.$$

iii) La fonction Φ_* *vérifie l'équation de la chaleur sur* $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$.

iv) Pour chaque $t > 0$, *la mesure* μ_*^t *se décompose de manière exacte comme*

$$\mu_*^t = |\nabla \Phi_*|^2 \mathcal{H}^N + \Theta_*(x,t) \mathcal{H}^{N-2} \llcorner \Sigma_\mu^t, \tag{9}$$

où $\Theta_*(\cdot,t)$ *est bornée.*

v) Il existe une fonction positive η *définie sur* $\mathbb{R}_*^+$ *et telle que, pour presque tout* $t > 0$, *l'ensemble* Σ_μ^t *est (N-2)-rectifiable et l'on a*

$$\Theta_*(x,t) = \Theta_{N-2}(\mu_*^t, x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu_*^t(B(x,r))}{\omega_{N-2} r^{N-2}} \geq \eta(t),$$

pour $\mathcal{H}^{N-2}$ *p.p.* $x \in \Sigma_\mu^t$.

L'ensemble Σ_μ correspond au lieu de la concentration d'énergie, et est donc de dimension $N-2$. Nous parlons de concentration d'énergie ici, et pas de concentration de vorticité. En réalité, il n'est pas clair que nous puissions intervertir ces deux termes sans ambiguïté, la vorticité étant généralement associée uniquement à la partie "topologique" (c'est à dire non effaçable) de l'énergie totale. Néanmoins, nous suspectons que seule cette partie topologique puisse se concentrer durablement en vortex, mais une preuve mathématiquement rigoureuse de ce fait est toujours manquante et constituerait un réel avancement.

Une autre problématique ouverte et qui nous semble d'un intérêt tout particulier concerne la fonction Θ_* intervenant dans la décomposition (9), qui représente la "densité de masse" des filaments. Alors qu'il est connu que la densité de la vorticité est quantifiée (en l'occurrence π fois un entier, on pourra pour cela se référer à [1] où le lien entre l'énergie de Ginzburg-Landau et le Jacobien des applications correspondantes est étudié dans les détails), pour la densité d'énergie nous n'avons obtenu que la borne inférieure $\Theta_*(x,t) \geq \eta(t)$ du point v). Ici aussi néanmoins, nous suspectons que même s'il y avait un écart de densité entre la vorticité et l'énergie, cette dernière devrait également être quantifiée. Nous n'avons pas de preuve de cette affirmation.

Passons maintenant à quelques éléments qui constituent d'une certaine manière les points de passage obligés de la preuve du Théorème 1.

Pour commencer, l'impossibilité pour l'énergie de se concentrer sur des objets de dimension inférieure à N-2 (par exemple des points en dimension 3) est une conséquence assez directe de la **formule de monotonie** exposée dans le lemme suivant, que nous énonçons ici pour les fonctions u_ε, mais qui s'étend de manière immédiate aux mesures limites μ_ε. A cet effet, pour $(x_*,t_*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ nous posons $z_* = (x_*,t_*)$ et pour $0 < R \leq \sqrt{t_*}$ nous définissons la quantité

$$\tilde{E}_{w,\varepsilon}(u_\varepsilon; z_*,R) = \frac{1}{R^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t_* - R^2)) \exp(-\frac{|x-x_*|^2}{4R^2}) dx. \qquad (10)$$

Le lemme qui suit est dû à Struwe [24] dans le contexte du flot de la chaleur pour les applications harmoniques.

Proposition 1. *Nous avons*

$$\frac{d\tilde{E}_{w,\varepsilon}}{dR}(z_*,R)\Big|_{R=r} = r \int_{\mathbb{R}^N \times \{t_*-r^2\}} 2V_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)) G(x-x_*,t-t_*) dx$$
$$+ \frac{1}{2r} \int_{\mathbb{R}^N \times \{t_*-r^2\}} [(x-x_*) \cdot \nabla u_\varepsilon + 2(t-t_*)\partial_t u_\varepsilon]^2 G(x-x_*,t-t_*) dx, \quad (11)$$

où $G(x,t)$ représente, modulo un facteur multiplicatif $\pi^{-N/2}$, le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G(x,t) = \frac{1}{t^{N/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) & \textit{pour } t > 0 \\ G(x,t) = 0 & \textit{pour } t \leq 0 \ . \end{cases}$$

En particulier,

$$\frac{d\tilde{E}_{w,\varepsilon}}{dR}(z_*,R) \geq 0\,, \tag{12}$$

et $\tilde{E}_w(z_*,R)$ est une fonction croissante de R.

Remarquons que le poids en Gaussienne intervenant dans la définition de $\tilde{E}_{w,\varepsilon}$ est essentiellement non négligeable sur la boule centrée en x_* et de rayon R. Par conséquent, la quantité $\tilde{E}_{w,\varepsilon}$ est à peu de choses près équivalente au quotient

$$\frac{1}{R^{N-2}}\int_{B(x_*,R)} \mu_\varepsilon^t(x)\,dx$$

(modulo un facteur $|\log\varepsilon|$, et en négligeant aussi le décalage en temps $t_* \to t_* - R^2$). Il n'est alors pas bien difficile d'obtenir la conséquence suivante :

Corollaire 1. *Pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$, nous avons*

$$\limsup_{R\to 0} \frac{\mu_*^t(B(x,R))}{R^{N-2}} < +\infty.$$

Autrement dit, la densité (N-2)-dimensionnelle de chaque mesure μ_*^t ($t > 0$) est bornée supérieurement en chaque point, et Σ_μ ne peut pas contenir de partie de plus petite dimension que N-2.

A l'inverse, montrer que Σ_μ ne contient aucune partie dont la dimension se situe strictement entre N-2 et N nécessite un argument de type assez différent, la formule de monotonie jouant dans le mauvais sens à certains égards. L'un des ingrédients essentiels à cet effet est la proposition suivante, qui est de type "**singularité effaçable**", et qui est à rapprocher de plusieurs résultats antérieurs dans des contextes pas très éloignés : le *clearing-out* de Brakke [8] et Ilmanen [13] respectivement pour le mouvement par courbure moyenne et pour l'équation d'Allen-Cahn, l'*ε-régularité* de Schoen et Uhlenbeck [21] pour les applications harmoniques, et l'*eta-compacité* ou *eta-ellipticité* pour l'équation de Ginzburg-Landau dans le cas stationnaire [4, 20, 15, 5]. Dans le cas de (PGL), un tel résultat a aussi été obtenu en dimension 3 par Lin et Rivière [17] et en dimension 4 par Wang [25].

Proposition 2. *Soit $z_* = (x_*,t_*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon < 1$, $R > \sqrt{\varepsilon}$, u_ε une solution de (*PGL*) vérifiant $E_\varepsilon(u_\varepsilon^0) < +\infty$, et $\sigma > 0$ donné. Il existe une constante $\eta_1 = \eta_1(\sigma) > 0$ dépendant seulement de la dimension N et du choix de σ, et telle que si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t_*))\exp(-\frac{|x-x_*|^2}{4R^2})\,dx \leq \eta_1|\log\varepsilon|\,, \tag{13}$$

alors

$$|u_\varepsilon(x_*,t_*+R^2)| \geq 1-\sigma. \tag{14}$$

Le point essentiel à retenir de la proposition précédente est que si l'énergie sur une boule de de rayon R est petite (en comparaison à $|\log\varepsilon|$), alors au bout d'un temps de l'ordre de R^2 le module de u_ε est "loin" de zéro. Il est à noter néanmoins que cela ne signifie pas que le module de u_ε ne puisse pas se réapprocher de zéro au même endroit mais à un temps ultérieur !

Cela dit, l'importance d'une estimation telle que (14) réside dans le fait suivant, lié au contrôle des phases, et qui constituera le second élément essentiel vers la preuve du Théorème 2. Si $|u_\varepsilon| > 0$, nous pouvons localement écrire sans ambiguïté $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon)$ où le module ρ_ε et la phase φ_ε sont à valeurs réelles (la phase étant définie à un multiple de 2π près). En termes de ρ_ε et φ_ε, l'équation (PGL) se réécrit

$$\rho_\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2\nabla\varphi_\varepsilon) = 0 \tag{15}$$

pour ce qui est de la phase, et

$$\frac{\partial(1-\rho_\varepsilon)}{\partial t} - \Delta(1-\rho_\varepsilon) + \frac{(1-\rho_\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \rho_\varepsilon|\nabla\varphi_\varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}(1-\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon^2 \tag{16}$$

pour le module.

Imaginons pour un instant que non seulement $\rho_\varepsilon > 0$ mais même que $\rho_\varepsilon \equiv 1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ en temps-espace. Alors l'équation (15) n'est rien d'autre que l'équation de la chaleur linéaire, et par des estimations standard la concernant il suit que pour chaque compact $K \subset \mathcal{U}$

$$|\nabla\varphi_\varepsilon|^2_{L^\infty(K)} \leq C(K)\int_{\mathcal{U}} \frac{|\nabla\varphi_\varepsilon|^2}{2} \leq C(K)E_\varepsilon(u_\varepsilon^0), \tag{17}$$

de telle sorte que pour $(x,t) \in K$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^N}\int_{B(x,r)\times\{t\}} \frac{|\nabla\varphi_\varepsilon|^2}{|\log\varepsilon|} < +\infty.$$

Comme d'autre part on a $e_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{|\nabla\varphi_\varepsilon|^2}{2}$ lorsque $\rho_\varepsilon = 1$, le calcul précédent montrerait que la mesure μ_* évoquée dans le Théorème 2 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur K.

Dans le cas général, on ne peut évidemment pas s'attendre à ce que $\rho_\varepsilon \equiv 1$ sur un ouvert. Néanmoins, dès lors que $\rho_\epsilon > 0$, l'équation (16) force

ρ_ε à se rapprocher de 1, d'autant plus que ε est petit, et nous pouvons prouver le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit $B(x_0,R)$ un boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ et $T > 0$, $\Delta T > 0$ deux quantités fixées. Considérons le cylindre*

$$\Lambda = B(x_0,R) \times [T,T + \Delta T].$$

Il existe des constantes $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, et $\beta > 0$ dépendant seulement de la dimension N et telles que si

$$|u_\varepsilon| \geq 1 - \sigma \qquad \textit{sur } \Lambda, \tag{18}$$

alors

$$e_\varepsilon(u_\varepsilon)(x,t) \leq C(\Lambda) \left[\int_\Lambda e_\varepsilon(u_\varepsilon) + M_0 \varepsilon^\beta \right], \tag{19}$$

pour chaque $(x,t) \in \Lambda_{\frac{1}{2}} = B(x_0,\frac{R}{2}) \times [T + \frac{3\Delta T}{4},T + \Delta T]$. De plus,

$$e_\varepsilon(u_\varepsilon) = |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 + \kappa_\varepsilon \qquad \textit{dans } \Lambda_{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

où les fonctions Φ_ε et κ_ε sont définies sur $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ et vérifient

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \Phi_\varepsilon = 0 \qquad \textit{dans } \Lambda_{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

$$\|\kappa_\varepsilon\|_{L^\infty(\Lambda_{\frac{1}{2}})} \leq C(\Lambda)\varepsilon^\beta, \qquad \|\nabla \Phi_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\Lambda_{\frac{1}{2}})} \leq C(\Lambda) M_0 |\log \varepsilon|. \tag{22}$$

Il est important de noter que la proposition précédente ne fournit pas de borne ponctuelle uniforme pour $|\nabla u_\varepsilon|$ mais seulement une majoration ponctuelle en terme d'une majoration intégrale (c'est précisément la signification de (19)). En général, cette borne est divergente en ε, et nous avons seulement l'estimation $|\nabla u_\varepsilon| \leq C\sqrt{|\log \varepsilon|}$ en dehors du lieu de vorticité. Néanmoins, (19) est du même acabit que (17) et permet de déduire le caractère diffus de μ_* (dans le sens de absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue) en dehors de Σ_μ.

Après avoir brièvement exposé les étapes principales qui structurent le Théorème 2, revenons maintenant à ses conséquences et à l'évolution proprement dite des mesures μ_*^t.

Au vu de la décomposition (9), μ_*^t peut être scindée en deux parties. Une partie diffuse $|\nabla \Phi_*|^2$, et une partie concentrée

$$\nu_*^t = \Theta_*(x,t)\mathcal{H}^{N-2} \llcorner \Sigma_\mu^t.$$

De par l'affirmation iii) du Théorème 2, nous savons déjà que la partie diffuse est gouvernée par l'équation de la chaleur. Le théorème suivant éclaire le sort de ν_*^t.

Théorème 3 ([7]). *La famille $(\nu_*^t)_{t>0}$ évolue suivant un flot par courbure moyenne, dans un sens assez faible introduit par Brakke [8].*

Nous ne préciserons pas ici cette notion faible de flot par courbure moyenne, mais renvoyons à [7] pour les détails. Rappelons toutefois qu'il existe bien sûr une notion classique de flot par courbure moyenne pour des sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^N$. De manière heuristique, ce flot correspond au flot gradient inverse pour la fonctionnelle d'aire, c'est-à-dire au moyen le plus efficace de décroître celle-ci. Il est connu qu'un tel flot existe pour de petits temps lorsque la donnée initiale est suffisamment lisse, mais il est aussi connu qu'en général il génère des singularités en temps fini (sauf pour des courbes dans le plan). Le comportement asymptotique ainsi que la formation de singularités sont des sujets qui ont été étudiés depuis plusieurs années, notamment dans les travaux de Huisken ([11, 12] et la bibliographie s'y trouvant). Brakke [8] a introduit dans sa thèse de 1978 une notion faible qui permet de continuer le mouvement après l'apparition de singularités; elle fait appel aux objets de la théorie géométrique de la mesure. En contrepartie de cette plus grande généralité, la notion de Brakke souffre d'un défaut assez gênant lié à la forte non unicité des ses solutions. Alors que le flot classique possède une solution unique tant qu'il est défini, aucune solution du flot de Brakke n'est unique! Bien que le flot par courbure moyenne possède probablement de manière "intrinsèque" une part de non unicité lors de l'apparition des singularités, la définition de Brakke est en un sens trop faible et laisse la place à des solutions très (trop) peu "physiques". Il est possible de renforcer cette définition tout en englobant toujours les variétés singulières, c'est ce qu'a fait Ilmanen [14]. Dans [7], nous étendons le Théorème 3 dans cette direction. Enfin, il est important de mentionner qu'une version un peu moins précise du Théorème 3 avait déjà été prouvée par Ambrosio et Soner [3] modulo la vérification de l'hypothèse cruciale qui est le point v) de notre Théorème 2.

4 Retour à l'équation de Schrödinger

On l'a vu, les résultats concernant l'équation (PGL) sont bien plus aboutis que ceux concernant l'équation (NLS), pour laquelle nous n'avons fait que montrer l'existence d'ondes progressives d'un type particulier. On peut se demander si cette restriction est purement de caractère technique, liée au côté plus faible des estimations de Strichartz valables pour (NLS) en comparaison aux estimations paraboliques. Cela est certainement vrai pour une part, et on s'attend à ce que l'équivalent du flot par courbure moyenne pour (PGL) soit un flot par courbure binormale pour (NLS), un travail de Jerrard [18] est d'ailleurs un premier résultat rigoureux dans ce sens. Dans le cas de la dimension 3, où rappelons le les vortex sont essentiellement des courbes, la binormale est obtenue comme le produit vectoriel du vecteur tangent au vortex avec le vecteur courbure. Pour se mouvement, un cercle se déplace donc le long de l'axe perpendiculaire au plan dans lequel il se trouve, ce qui est parfaitement cohérent avec les anneaux de vorticité obtenus dans le Théorème 1.

La petite observation suivante clôt néanmoins l'espoir de suivre un cheminement similaire à celui suivi pour (PGL).

Lemme. *L'équivalent de la proposition 2 n'est pas valable dans le cas de l'équation (*NLS*).*

La preuve très simple de ce résultat est basée sur l'existence même des ondes progressives du Théorème 1. Il suffit en effet de placer au temps $t = t_*$ un tout petit anneau de vorticité loin du point x_*, et dont la vitesse pointe en direction de x_*. Comme les petits anneaux sont aussi très rapides (rappelons que leur vitesse est de l'ordre de $|\log \varepsilon|$ en vertu du Théorème 1), on pourra toujours s'arranger pour que cet anneau arrive en x_* précisément au temps $t = t_* + R^2$.

Ainsi, un résultat d'effacement de singularité paraît bien plus ardu à obtenir pour (NLS), au mieux son énoncé devrait être pensé de manière différente. Cela ne signifie évidemment pas que tout espoir soit vain, mais devrait au contraire susciter de nouvelles recherches!

Références

[1] G. Alberti, S. Baldo et G. Orlandi, *Variational convergence for functionals of Ginzburg-Landau type*, préprint 2002.

[2] A. Ambrosetti et M. Struwe, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid,* Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989), 97-109.

[3] L. Ambrosio and M. Soner, *A measure theoretic approach to higher codimension mean curvature flow*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. **25** (1997), 27-49.

[4] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[5] F. Bethuel, H. Brezis et G. Orlandi, *Asymptotics for the Ginzburg-Landau equation in arbitrary dimensions*, J. Funct. Anal. **186** (2001), 432-520. Erratum **188** (2002), 548-549.

[6] F. Bethuel, G. Orlandi et D. Smets, *Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation*, Jour. Eur. Math. Soc., à paraître.

[7] F. Bethuel, G. Orlandi et D. Smets, *Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature,* préprint.

[8] K. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, 1978.

[9] L. E. Fraenkel et M. S. Berger, *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid,* Acta Math. **132** (1974), 13-51.

[10] H. Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelwegungen entsprechen,* J. Reine Angew. Math **55** (1858), 25-55.

[11] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres,* J. Differential Geom. **20** (1984), 237-266.

[12] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow,* J. Differential Geom. **31** (1990), 285-299.

[13] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature,* J. Differential Geom. **38** (1993), 417-461.

[14] T. Ilmanen, *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature,* Mem. Amer. Math. Soc. **108** (1994), no. 520.

[15] F.H. Lin et T. Rivière, *Complex Ginzburg-Landau equation in high dimension and codimension 2 area minimizing currents,* J. Eur. Math. Soc. **1** (1999), 237-311. Erratum, Ibid.

[16] F.H. Lin et T. Rivière, *A quantization property for static Ginzburg-Landau vortices,* Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 206-228.

[17] F.H. Lin et T. Rivière, *A quantization property for moving line vortices,* Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 826-850.

[18] R.L. Jerrard, *Vortex filament dynamics for Gross-Pitaevsky like equations, I*, prépublication.

[19] D.W. Moore et D.I. Pullin, *On steady compressible flows with compact vorticity; the compressible Hill's spherical vortex*, J. Fluid Mech. **374** (1998), 285-303.

[20] T. Rivière, *Line vortices in the $U(1)$ Higgs model,* ESAIM, C.O.C.V. **1** (1996), 77-167.

[21] R. Schoen et K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps,* J. Differential Geom. **17** (1982), 307-335.

[22] E. Sandier et Sylvia Serfaty, *High Kappa Limit of the Ginzburg-Landau Equations of Superconductivity,* Duke Math. Journal, à paraître.

[23] E. Sandier et Sylvia Serfaty, *The decrease of bulk superconductivity near the second critical field in the Ginzburg-Landau model,* prépublication.

[24] M. Struwe, *On the evolution of harmonic maps in higher dimensions,* J. Diff. Geom. **28** (1988), 485-502.

[25] C. Wang, *On moving Ginzburg-Landau filament vortices*, Max-Planck-Institut Leipzig, préprint.