Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Jean-Marc Delort

Solutions globales pour l'équation de Schrödinger à nonlinéarités quadratiques et à données petites

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XII, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A12_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Solutions globales pour l'équation de Schrödinger à nonlinéarités quadratiques et à données petites

Jean-Marc DELORT

1 Solutions globales de l'équation de Schrödinger

On note (t, x) les coordonnées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t},\ D_{xj} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $j = 1, \cdots, d, D_x^2 = \sum_1^d D_{x_j}^2$, et on considère l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (D_t + D_x^2)u = F(u, D_x u, \bar{u}, \overline{D_x u}) \\ u_{|t=0} = \varepsilon u_0 \end{array} \right.
$$

où F est un polynôme à coefficients complexes nul au moins à l'ordre 2 en 0, u_0 une donnée intiale assez régulière et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre.

Le problème de l'existence *locale* d'une solution, pour des données assez petites dans un espace de Sobolev convenable, a été résolu en 1993 par Kenig, Ponce et Vega dans [11] . L'existence locale pour de grandes données a été prouvée par Hayashi-Ozawa [10] en dimension 1 et par Chihara [2] en dimension $d \geq 2$. Plus récemment, Kenig, Ponce et Vega [12] ont étendu ces résultats à des équations de Schrödinger généralisées.

Le problème auquel nous nous intéressons ici est celui de l'existence globale à données petites. En dimension d'espace $d \geq 3$, Chihara [3] a obtenu l'existence globale à données petites lorsque la nonlinéarité est cubique. Hayashi et Hirata [7] ont traité le cas de certaines nonlinéarités quadratiques, en dimension $d \geq 3$. En dimension 2 d'espace, l'existence globale a été prouvée par Chihara [4] pour des nonlinéarités cubiques.

Dans tous les résultats d'existence globale que nous avons mentionnés jusqu'à présent, la nonlinéarité peut être considérée comme une perturbation à *courte portée* de la partie principale de l'opérateur. En effet, si u est solution de l'équation de Schrödinger linéaire $(D_t + D_x^2)u = 0$ en dimension d d'espace, $\|u(t, .)\|_{L^\infty}$ est $0(t^{-d/2})$ lorsque $t \to +\infty$. Si nous écrivons la nonlinéarité comme somme d'expressions $V_1.u, V_2.(Du), V_3.\bar{u}, V_4\overline{(Du)}$, où $V_j(u, D_x u, \bar{u}, \overline{D_x u})$ sont des potentiels s'annulant à l'ordre $k \geq 1$ en $(u, D_x u, \bar{u}, \overline{D_x u}) = 0$, ces potentiels, calculés sur une solution linéaire, vérifieront donc

(2) $$\|V_j(u, D_x u, \bar{u}, \overline{D_x u})(t, .)\|_{L^\infty} = 0(t^{-kd/2}) \quad t \to +\infty \ .$$

Nous dirons que la perturbation nonlinéaire est à courte portée si ces expressions sont intégrables lorsque $t \to +\infty$ i.e. si $k\frac{d}{2} > 1$, et à longue portée en cas contraire. Notre but est d'étudier les problèmes à longue portée les plus simples i.e. ceux pour lesquels $k\frac{d}{2} = 1$. Dans la mesure où nous nous limitons à des nonlinéarités régulières, les seuls cas possibles sont donc $k = 2$, $d = 1$ (nonlinéarités cubiques en dimension 1) ou $k = 1$, $d = 2$ (nonlinéarités quadratiques en dimension 2). Le premier cas a été traité par Hayashi et Naumkin [8], qui ont prouvé que si la nonlinéarité cubique vérifie une "condition nulle" convenable (i.e. une condition de compatibilité avec l'équation), il y a existence globale.

Dans le cas d'une nonlinéarité quadratique en dimension 2, outre un résultat de Cohn [5] concernant un exemple de nonlinéarité, le seul résultat connu, dû à Hayashi et Naumkin [9], concerne des données initiales analytiques réelles, pour lesquelles une approche de type Cauchy-Kowalevsky est possible.

Notre but ici est d'étudier ce problème, pour des données de Cauchy dans un espace de Sobolev à poids convenable. Nous nous plaçons donc désormais en dimension $d = 2$ et considérons pour $M \in \mathbb{N}$ l'espace

(3) $$\mathcal{H}^M = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^2); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2, |\alpha| + |\beta| \leq M \ , \ x^\alpha \partial_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\} \ .$$

La nonlinéarité quadratique F sera de la forme

(4) $$F(u, D_x u, \bar{u}, \overline{D_x u}) = Q_1(u, D_{x_1} u, D_{x_2} u) + Q_2(\bar{u}, \overline{D_{x_1} u}, \overline{D_{x_2} u})$$

où Q_1 et Q_2 sont quadratiques, et s'annulent respectivement lorsque $D_x u = 0$ et $\overline{D_x u} = 0$. Afin de simplifier certaines notations ultérieures, nous prendrons les données de Cauchy sur $t = 1$ au lieu de $t = 0$. Le théorème principal est alors le suivant :

Théorème 1 *Il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $M \in 2\mathbb{N}$, $M \geq M_0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et tout u_0 dans la boule unité de $\mathcal{H}^{M+4}(\mathbb{R}^2)$, il existe une unique solution $u \in C^0([1, +\infty[, \mathcal{H}^M)$ au problème*

(5) $$\begin{cases} (D_t + D_x^2)u = Q_1(u, D_x u) + Q_2(\bar{u}, \overline{D_x u}) \\ u_{|t=1} = \varepsilon u_0 \ . \end{cases}$$

Remarques :

• La perte de régularité entre la donnée et la solution dans l'énoncé ci-dessus n'est qu'apparente. Elle résulte du fait que nous exprimons la régularité de la solution dans un espace plus grand que celui que nous utiliserons de fait dans la preuve.

• L'hypothèse sur la nonlinéarité exclut des nonlinéarités de la forme u^2 ou $\bar{u}^2$. Une hypothèse analogue est faite par Hayashi et Naumkin pour les nonlinéarités cubiques en dimension 1. Une telle condition est reliée au fait que la solution de l'équation de Schrödinger linéaire oscille selon une phase présentant un point critique à l'origine.

• Le fait que dans (4) il y ait découplage entre les nonlinéarités en $(u, D_x u)$ et celles en $(\bar{u}, \overline{D_x u})$ signifie que l'on interdit des expressions du type $u.\overline{D_{x_j} u}$ ou $(D_{x_j} u).(\overline{D_{x_k} u})$. Une telle condition (qui, pour des raisons d'homogénéité, n'a pas d'analogue en dimension 1 pour des nonlinéarités cubiques, mais qui apparaît déjà dans les travaux d'Hayashi et Naumkin consacrés à la dimension 2) n'est pas purement technique : nous indiquerons ci-dessous les phénomènes particuliers induits par de telles nonlinéarités.

Nous obtiendrons également une description asymptotique de la solution du théorème 1, qui montre que celle-ci à même comportement qu'une solution linéaire lorsque le temps tend vers l'infini.

Théorème 2 *Il existe $v_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $(1+|x|)^M v_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que la solution u du théorème 1 vérifie*

$$\|(1+\frac{|x|}{t})^M \left(u(t,x) - \frac{1}{t}e^{i\frac{x^2}{4t}} v_\infty(\frac{x}{t})\right)\|_{L^\infty(dx)} = 0(t^{-1-\delta}), t \to +\infty \tag{6}$$

pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$.

Indiquons la stratégie générale de la preuve. Nous effectuons le changement de variables

$$T = t,\ X = \frac{x}{t} \tag{7}$$

et recherchons u en fonction d'une nouvelle inconnue w sous la forme

$$u(t,x) = \frac{1}{t}e^{i\frac{x^2}{4t}} w(t, \frac{x}{t})\ . \tag{8}$$

Si on pose $\theta(T,X) = \frac{TX^2}{4}$ et $Z = (Z_1, Z_2), Z_j = \frac{D_{X_j}}{T} + \frac{X_j}{2}$, u est solution de (5) si et seulement si w vérifie

$$(9) \qquad \begin{cases} (D_T + \frac{D_X^2}{T^2})w = \frac{1}{T}e^{i\theta}Q_1(w, Zw) + \frac{1}{T}e^{-3i\theta}Q_2(\bar{w}, \overline{Zw}) \\ w_{|T=1} = \varepsilon w_0 \end{cases}$$

où w_0 est défini à partir de u_0 par (8) à $T = 1$.

Dans les nouvelles coordonnées, D_X est la traduction de l'opérateur $tD_x - \frac{x}{2}$, qui est d'utilisation constante dans les problèmes d'existence globale à données petites pour l'équation de Schrödinger (il s'agit de l'analogue des "champs de Klainerman" dans ce cadre). Expliquons quelles sont les difficultés dans l'obtention de solutions globales pour (9).

Le premier problème qui se présente est lié au fait que le membre de droite de (9) contient des dérivées de la forme $\frac{D_X}{T}w$. Compte-tenu de la forme de l'opérateur, il serait naturel de rechercher la solution dans un espace de la forme

$$(10) \qquad \{w \in L^2(\mathbb{R}^2); D_X^s(\frac{D_X}{T})^{s'}w \in L^2\}$$

pour des indices s et s' fixés assez grands. Le membre de droite de (9) serait alors au mieux dans un espace de la forme (10) avec s' remplacée par $s'-1$. Or la seule utilisation de la conservation de la norme L^2 par résolution linéaire ne permet pas de récupérer une telle perte de dérivée. La manière de contourner cette difficulté est toutefois bien connue : il suffit en effet de faire appel à l'effet régularisant local de l'opérateur de Schrödinger. En l'absence des fonctions oscillantes $e^{i\theta}$, $e^{-3i\theta}$ dans le membre de droite de (9), on pourrait donc espérer résoudre le problème dans une version localisée de l'espace (10).

Ces facteurs oscillants introduisent toutefois une difficulté supplémentaire : en effet $D_Xe^{i\theta} = \frac{TX}{2}e^{i\theta}$ tend vers l'infini si $T \to +\infty$, donc ne peut appartenir à un espace du type (10) avec $s > 0$ et estimations uniformes en temps. La seconde idée que nous utiliserons consistera à éliminer ces facteurs oscillant par l'adjonction à w de termes correcteurs. Cela permettra de remplacer dans le membre de droite de (9) les expressions $e^{i\theta}Q_1$, $e^{-3i\theta}Q_2$ par des termes du même type dans lesquels les exponentielles oscillantes sont remplacées par des quantités de la forme $(1 + \frac{D_X^2}{T})^{-N}e^{i\theta}, (1 + \frac{D_X^2}{T})^{-N}e^{-3i\theta}$, (ou, de manière équivalente, $(1 + TX^2)^{-N}e^{i\theta}, (1 + TX^2)^{-N}e^{-3i\theta}$) avec N assez grand. De telles expressions ne sont pas dans un espace de type (10), mais appartiennent à une version affaiblie de celui-ci, donnée par

$$\{w \in L^2(\mathbb{R}^2)\ ;\ (\frac{D_X}{\sqrt{T}})^s(\frac{D_X}{T})^{s'}w \in L^2\} \tag{11}$$

où s est de l'ordre de N. Il se trouve que cet espace affaibli sera suffisant pour nous permettre de résoudre le problème étudié.

2 Espaces de Sobolev

Nous allons définir précisément l'espace du type (11) que nous utiliserons. Dans la mesure où nous ne reviendrons pas aux anciennes coordonnées, nous notons désormais (t, x) au lieu de (T, X).

Nous fixons une partition dyadique de l'unité $\chi(\xi) + \sum_0^{+\infty} \varphi(2^{-j}\xi) \equiv 1$ avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ et nous définissons les multiplicateurs de Fourier associés pour $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \Delta_j v &= \mathcal{F}^{-1}[\varphi(2^{-j}\xi)\hat{v}(\xi)], j \in \mathbb{N} \\ \Delta_{-1} v &= \mathcal{F}^{-1}[\chi(\xi)\hat{v}(\xi)], \end{aligned} \tag{12}$$

de telle manière que $v = \sum_{-1}^{+\infty} \Delta_j v$. La caractérisation de l'espace H^s par la condition $\|\Delta_j v\|_{L^2} \leq Cc_j 2^{-js}$ pour une constante $C > 0$ et une suite $(c_j)_j$ dans la boule unité de ℓ^2 admet une version localisée : choisissons $\phi \in C_0^\infty(]-1,1[^2)$, $\phi \geq 0$ telle que $\sum_{q\in\mathbb{Z}^2} \phi(x-q) \equiv 1$. Si $\phi_q(x) = \phi(x-q)$, l'espace H^s est caractérisé par l'existence de $C > 0$ et d'une suite $(c_{jq})_{jq}$ dans la boule unité de $\ell_j^2\ell_q^2$ telle que pour tous j, q

$$\|\phi_q(x)\Delta_j v\|_{L^2} \leq Cc_{jq}2^{-js}\ . \tag{13}$$

Si la condition $\ell_j^2\ell_q^2$ est remplacée par $\ell_j^2\ell_q^\infty$, nous obtenons une version uniformément locale de l'espace H^s. Nous allons nous inspirer de cette caractérisation pour définir les espaces dans lesquels nous mesurerons l'effet régularisant local de l'opérateur de Schrödinger.

Définition 3 *Soient s, s', α, α' des réels, $r \in [1, +\infty]$. Une distribution $v(t,x)$ est dans l'espace $F^{s,s'}_{\alpha,\alpha',r}$ si $v \in L^2_{\mathrm{loc}}([1,+\infty[, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ et s'il existe $C > 0$ et des fonctions $(c_{jq}(t))_{j,q}$ vérifiant*

(14)

$$\bullet \|\phi_q(x)\Delta_j v(t,x)\|_{L^2(dx)} \leq C c_{jq}(t) (\tfrac{2^j}{\sqrt{t}})^{\alpha} (\tfrac{2^j}{t})^{\alpha'} (1+\tfrac{2^j}{\sqrt{t}})^{-s-\alpha} (1+\tfrac{2^j}{t})^{-s'-\alpha'}$$
$$\bullet \sup \left(\int_{2^\ell}^{2^{\ell+1}} |c_{jq}(t)|^2 \tfrac{dt}{t} \right) \in \ell^2_j(\ell^r_q).$$

La signification de la condition précédente est la suivante :

• L'indice s (resp. s') indique le nombre de dérivées du type $\frac{D_x}{\sqrt{t}}$ (resp. $\frac{D_x}{t}$) que l'on peut faire agir sur v tout en conservant des estimations uniformes en temps dans la région de l'espace de Fourier $\frac{|\xi|}{\sqrt{t}} \gg 1$ (resp. $\frac{|\xi|}{t} \gg 1$).

• L'indice α (resp. α') mesure le comportement de $\hat{v}(t,\xi)$ dans la zone $\frac{|\xi|}{\sqrt{t}} \ll 1$ (resp. $\frac{|\xi|}{t} \ll 1$).

• La condition sur $c_{jq}(t)$ est une condition localement L^2 par rapport à $\frac{dt}{t}$, l'exposant r mesurant la décroissance de v par rapport à $x \to \infty$.

Nous utiliserons aussi la version suivante de l'espace d'énergie associé à l'équation :

Définition 4 *On note $\underline{H}^{s,s'}_{\alpha,\alpha'}$ l'espace des $v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([1,+\infty[, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ telles qu'il existe $C > 0$ et $(c)_j$ dans la boule unité de ℓ^2 avec*

$$\|\Delta_j v(t,x)\|_{L^2(dx)} \leq C c_j (\frac{2j}{\sqrt{t}})^{\alpha} (\frac{2^j}{t})^{\alpha'} (1+\frac{2^j}{\sqrt{t}})^{-s-\alpha} (1+\frac{2^j}{t})^{-s'-\alpha'} \; . \tag{15}$$

L'inégalité linéaire que nous utiliserons est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 5 *Soient s, s', α, α' des nombres réels vérifiant*

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha' < 0 \; , \; s + \alpha \geq 0 \; , s' + \alpha' \geq 0 \; . \tag{16}$$

Si $v_0 \in H^{s+s'}(\mathbb{R}^2)$ et $f \in F^{s,s'-\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha',1}$, la solution v du problème

$$\begin{array}{rll} (D_t + \frac{Dx^2}{t^2}) & v & = f \\ & v_{|t=1} & = v_0 \end{array} \tag{17}$$

est dans $\underline{H}^{s,s'}_{\alpha,\alpha'} \cap F^{s,s'+\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha',\infty}$ et vérifie

$$\|v\|_{\underline{H}^{s,s'}_{\alpha,\alpha'}} + \|v\|_{F^{s,s'+\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha',\infty}} \leq C\left(\|v_0\|_{H^{s+s'}} + \|f\|_{F^{s,s'-\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha',1}}\right) . \tag{18}$$

La preuve du théorème repose sur les mêmes idées que celles utilisées par [12] dans le cadre local en temps. L'inégalité (18) reflète l'effet régularisant local de Kato : relativement à l'indice s', il y a gain d'une demi-dérivée par rapport à la donnée initiale et d'une dérivée par rapport au second membre.

3 Réductions et preuve du théorème d'existence globale

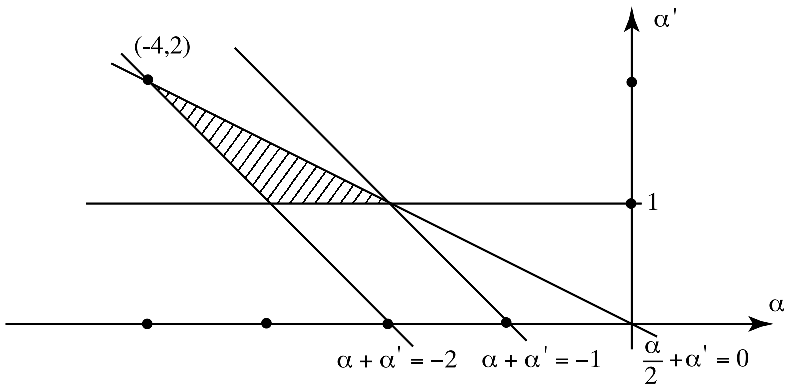
Nous utiliserons pour la recherche de la solution l'espace

$$E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty} = F^{s,s'+\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha',\infty} \cap \underline{H}^{s,s'}_{\alpha,\alpha'} \tag{19}$$

(ainsi que l'espace analogue obtenu en remplaçant ci-dessus ∞ par r) pour des indices α, α', vérifiant

$$-2 < \alpha + \alpha' < -1, \alpha' > 1, \frac{\alpha}{2} + \alpha' < 0 , \tag{20}$$

i.e. lorsque (α, α') reste dans la partie hachurée du dessin ci-dessous :



De plus, (s, s') vérifieront

$$\alpha + 2\alpha' + 4 > s > \alpha' + 2 \ , \ \alpha + 2\alpha' + 4 > s > 2(\alpha + 2\alpha' + 2), s + s' \geq 10 \ . \tag{21}$$

Dans la pratique, (α, α') sera proche du point $(-4, 2)$ dans la zone hachurée, s sera proche de 4, par valeur inférieure, dans les deux intervalles déterminés par les deux premières conditions (21), et s' sera suffisamment grand.

Remarquons que l'inégalité (15) de la définition de $\underline{H}^{s,s'}_{\alpha,\alpha'}$, entraîne que si v est dans cet espace, l'injection de Sobolev fournit la majoration suivante de $\|v(t,.)\|_{L^\infty}$:

$$
\begin{aligned}
(22) \qquad \|v(t,.)\|_{L^\infty} &\leq \sum_{-1}^{+\infty} \|\Delta_j v(t,.)\|_{L^\infty} \leq C \sum_{-1}^{+\infty} 2^j \|\Delta_j v(t,.)\|_{L^2} \\
&\leq C \sum_{j;2^j<\sqrt{t}} 2^j (\frac{2j}{\sqrt{t}})^{\alpha} (\frac{2^j}{t})^{\alpha'} + C \sum_{j;\sqrt{t}<2^j<t} 2^j (\frac{2^j}{\sqrt{t}})^{-s} (\frac{2^j}{t})^{\alpha'} \\
&\qquad + C \sum_{j;t<2^j} 2^j (\frac{2^j}{\sqrt{t}})^{-s} (\frac{2^j}{t})^{-s'} .
\end{aligned}
$$

Les deux dernières sommes se majorent compte-tenu de (20), (21) par $C(\sqrt{t}^{1-\alpha'} + t^{1-\frac{s}{2}})$ qui tend vers 0 si $t \to +\infty$. La première somme est contrôlée par $Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\alpha'}$. Si nous avions $\frac{\alpha}{2} + \alpha' > 0$, les éléments de $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ devraient donc tendre uniformément vers 0 lorsque $t \to +\infty$: cet espace ne pourrait donc pas contenir la solution de l'équation $(D_t + \frac{D_x^2}{t^2})u = 0$. Cela explique l'hypothèse $\frac{\alpha}{2} + \alpha' < 0$ dans (20). Le calcul (22) nous montre alors que nous ne pouvons espérer déduire de l'appartenance à $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ une estimation uniforme en norme L^∞. Dans la mesure où nous aurons besoin d'un espace dont les éléments sont uniformément bornés en temps, nous introduisons

$$
(23) \qquad \widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty} = E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty} \cap L^\infty = E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty} \cap \left\{ v; \chi(\frac{D}{\sqrt{t}})v \in L^\infty \right\}
$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \chi \equiv 1$ près de 0, et où la dernière inégalité provient du fait qu'une estimation L^∞ de $(1 - \chi(\frac{D}{\sqrt{t}}))v$ découle du calcul (22).

Indiquons l'idée de la preuve du théorème sur un exemple dans lequel nous ne retenons que l'une des contributions au membre de droite de (9) :

$$
(24) \qquad (D_t + \frac{D_x^2}{t^2})w = \frac{1}{t} e^{i\theta} w(\frac{D_{x_1}}{t} w) .
$$

Nous souhaitons résoudre ce problème dans un espace du type $\widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$, les indices vérifiant (20) et (21). En particulier s doit être assez grand. Nous ne pouvons toutefois espérer mettre w dans un tel espace puisque dans le membre de droite $e^{i\theta}$ n'admet pas l'action d'une seule dérivée en $\frac{D_x}{\sqrt{t}}$ tout en conservant des estimations uniformes lorsque $t \to +\infty$. Nous allons donc tenter d'éliminer le terme le plus singulier du membre de droite en recherchant w sous la forme

$$w = v + V_1(v)e^{i\theta} \tag{25}$$

où v sera assez régulier et $V_1(v)$ une fonction de v à déterminer. Plus précisément, nous souhaitons trouver

$$v \in \widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}\ ,\ V_1(v) \in E^{s+2,s'-1}_{\beta,\alpha',1} \subset \widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty} \tag{26}$$

où β est donné par $\beta = 2(\alpha + \alpha' + 1)$ et est donc un indice proche de $\alpha + 2$ lorsque (α, α') est voisin du point optimal $(-4, 2)$. De plus nous désirons que $V_1(v)$ ait une certaine décroissance en espace i.e.

$$\langle \sqrt{t}x \rangle^2 V_1(v) \in \widetilde{E}^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}\ . \tag{27}$$

Si nous substituons l'expression (25) dans (24) nous obtenons

$$\begin{aligned}(D_t + \tfrac{D_x^2}{t^2})(v + V_1(v)e^{i\theta}) \quad &= \tfrac{1}{t}e^{i\theta}v\tfrac{D_{x_1}}{t}v \\ &+\tfrac{1}{t}e^{2i\theta}\left[v\tfrac{D_{x_1}}{t}V_1 + V_1\tfrac{D_{x_1}}{t}v\right] \\ &+\tfrac{1}{t}e^{3i\theta}V_1\tfrac{D_{x_1}}{t}V_1 + \text{autres termes.}\end{aligned} \tag{28}$$

Examinons les diverses contributions au membre de droite, en écrivant de manière générale un produit $a.b$ sous forme de paraproduits et restes, suivant Bony [1],

$$ab = T_ab + T_ba + R(a,b), \tag{29}$$

et en nous souvenant que si a et b sont L^∞, le premier terme a la même régularité que b, et le second la même régularité que a. Appliquons cela avec $a = e^{3i\theta}, b = V_1\frac{D_{x_1}}{t}V_1$. Compte-tenu de l'hypothèse (26), et sous réserve d'étudier les produits d'éléments des espaces que nous avons introduits, il est raisonnable de conjecturer que $b \in E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$. Par conséquent, $T_ab + R(a,b)$ sera aussi dans cet espace. Pour prouver que $a.b$ possède cette même régularité, il reste d'après (29) à étudier $T_b a$. Or, modulo des commutateurs que nous n'écrivons pas, cette quantité vaut

$$T_{(\langle\sqrt{t}x\rangle^2 V_1)(\langle\sqrt{t}x\rangle^2 \frac{D x_1}{t} V_1)}(\langle\sqrt{t}x\rangle^{-4} e^{3i\theta}) = T_{\tilde{a}}\tilde{b}\ . \tag{30}$$

L'hypothèse de décroissance (27) permet de montrer que $\tilde{a}$ possède une régularité minimale, qui assure que la régularité de (30) est essentiellement celle de $\tilde{b}$. Or l'action de $\frac{Dx}{\sqrt{t}}$ sur $e^{3i\theta}$ faisant apparaître un facteur croissant comme $\langle\sqrt{t}x\rangle$, la structure de $\tilde{b}$ montre que ce terme peut appartenir à un espace du type $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ pour $s < 4$, ce qui est l'une des conditions imposées à cet indice. Ce raisonnement laisse donc espérer que (30), et par conséquent $e^{3i\theta} V_1 \frac{D x_1}{t} V_1$, sera dans $E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$.

Considérons maintenant le premier terme du membre de droite de (28) : posons $a = e^{i\theta}, b = v\frac{D x_1}{t} v$. Comme ci-dessus, l'hypothèse de régularité (26) sur v entraîne que $T_a b + R(a,b)$ est dans $E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$. Par contre, dans la mesure où v, à la différence de V_1, n'a aucune décroissance, nous ne pouvons espérer mettre $T_b a$ dans un espace du même type. Nous allons donc choisir le correcteur $V_1(v)$ de manière à éliminer cette contribution génante. Remarquons d'abord que

$$(D_t + \frac{D_x^2}{t^2})(e^{i\theta}) = \frac{1}{t}\Lambda(t,D)e^{i\theta} \tag{31}$$

où $\Lambda(t,\xi) = \frac{2\xi^2}{t} + \frac{i}{2}$ est un symbole elliptique d'ordre 2 en $\frac{\xi}{\sqrt{t}}$. Nous posons alors

$$V_1(v) = e^{-i\theta} T_{v\frac{D x_1}{t} v}(\Lambda(t,D)^{-1} e^{i\theta})\ . \tag{32}$$

Remarquons que ce choix de $V_1(v)$ assurera la condition de décroissance (27) : l'action de $\Lambda(t,D)^{-1}$ sur $e^{i\theta}$ fait gagner deux dérivées de la forme $\frac{Dx}{\sqrt{t}}$, ce qui de manière équivalente se traduit par le gain d'un poids $\langle\sqrt{t}x\rangle^{-2}$ devant l'exponentielle. D'autre part, nous aurons d'après (31)

(33)
$$\begin{aligned}\left(D_t + \tfrac{D_x^2}{t^2}\right)(e^{i\theta}V_1(v)) &= T_{v\frac{D x_1}{t} v}\left((D_t + \tfrac{D_x^2}{t^2})\Lambda(t,D)^{-1}e^{i\theta}\right) + \text{commutateurs}\\ &= \tfrac{1}{t} T_{v\frac{D x_1}{t} v} e^{i\theta} + \text{commutateurs.}\end{aligned}$$

Par conséquent, (28) entraîne

$$\left(D_t + \frac{D_x^2}{t^2}\right) v = \frac{1}{t} e^{2i\theta}\left[v\frac{D_{x_1}}{t}V_1 + V_1\frac{D_{x_1}}{t}v\right] + \frac{1}{t}R(v) \tag{34}$$

où $R(v) \in E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$. Les termes entre crochet dans le membre de droite de (34) on une décroissance en $\langle\sqrt{t}x\rangle^{-2}$. Par conséquent, ils ne peuvent appartenir à un espace de la forme précédente avec $s > 2$, alors que les conditions (21) imposent que s soit proche de 4. On est donc conduit à éliminer la contribution peu régulière du terme entre crochets en itérant la méthode de correcteurs que nous venons d'appliquer. Sans entrer dans les détails, indiquons simplement qu'en répétant celle-ci, on réduit en fait (34) à une équation de la forme

$$\left(D_t + \frac{D_x^2}{t^2}\right) v = \frac{1}{t} R(v) \tag{35}$$

avec $R(v) \in E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$.

L'étape suivante consiste à résoudre (35) par une méthode de point fixe, lorsque les données sont assez petites. Pour trouver une solution $v \in \widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$, il nous faut d'une part vérifier que le terme quadratique $R(v)$ envoie cet espace dans $E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$. Comme indiqué ci-dessus, cela résulte de la construction de $R(v)$ et de la preuve de théorèmes de produit adaptés. Il faut d'autre part vérifier que si f est donné dans $E^{s,s'-1}_{\alpha,\alpha',1}$, la solution du problème linéaire $\left(D_t + \frac{D_x^2}{t^2}\right) v = \frac{1}{t} f$ avec donnée initiale $H^{s+s'}$ est dans $\widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$. L'appartenance à $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ découle de l'estimation linéaire du théorème 5. Il reste donc à obtenir, compte tenu de (23), une majoration L^∞ de v. Celle-ci va découler de l'utilisation de l'équation. En fait, la construction de $R(v)$ entraîne

$$R(v) \in E^{s,s'-1}_{\beta,\alpha',1} \text{ avec } \beta = 2(\alpha + \alpha' + 2). \tag{36}$$

Comme $\frac{\beta}{2} + \alpha' > 0$, la majoration (22) implique que $\|R(v)(t,.)\|_{L^\infty} = 0(t^{-\delta}) \quad t \to +\infty$ pour un réel $\delta > 0$. Un raisonnement d'injections de Sobolev du même type permet de déduire de l'appartenance de v à $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ une estimation du même type pour $\|\frac{D_x^2}{t} v(t,.)\|_{L^\infty} = 0(t^{-1-\delta}) \quad t \to +\infty$ pour un $\delta > 0$. L'estimation L^∞ cherchée en découle par intégration en temps. La résolution de (35) résulte alors d'un point fixe standard.

Indiquons pour terminer quelques difficultés supplémentaires que nous avons occultées jusqu'à présent, et la manière d'y faire face :

• Afin de résoudre (35), nous avons besoin d'obtenir (36) i.e. $R(v) \in E^{s,s'-1}_{\beta,\alpha',1}$. Le dernier indice inférieur dans cet espace indique que $R(v)$ doit avoir une certaine décroissance en x lorsque $x \to \infty$. Or v est dans un espace uniformément local de type $E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ et $R(v)$ est essentiellement quadratique en v. On ne peut donc espérer déduire de la seule hypothèse $v \in E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ une condition de décroissance sur $R(v)$. Pour contourner cette difficulté, nous sommes amenés à introduire des versions à poids des espaces précédents. Cette complication supplémentaire est également imposée par la structure du terme nonlinéaire comme indiquée ci-après.

• Le membre de droite du modèle (24) que nous avons étudié ne reflète pas parfaitement la structure du membre de droite de (9). Un choix plus judicieux serait de prendre comme nonlinéarité

$$\frac{1}{t}e^{i\theta}w(Z_1 w) = \frac{1}{t}e^{i\theta}w\left(\frac{D_{x_1}}{t} + \frac{x_1}{2}\right)w \tag{37}$$

qui fait apparaître le poids x_1. Afin de compenser celui-ci au voisinage de l'infini, on est donc amené à introduire des espaces à poids de la forme suivante

$$\mathcal{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}(M) = \left\{v \in E^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}; \forall\gamma \in \mathbb{N}^2, |\gamma| \le M, x^\gamma v \in E^{s,s'-|\gamma|}_{\alpha,\alpha',\infty}\right\} \tag{38}$$

pour M entier assez grand. On définit de même $\widetilde{\mathcal{E}}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}(M)$ en remplaçant dans (38) E par $\widetilde{E}$, et on recherche la solution de (35) dans ce dernier espace, après avoir réduit (9) à une équation de ce type, en écrivant w sous la forme

$$w = v + V_1(v)e^{i\theta} + V_{-3}(v)e^{-3i\theta} \tag{39}$$

pour des correcteurs convenables $V_1(v), V_{-3}(v)$. Nous renvoyons à [6] pour des énoncés plus complets (et plus techniques) concernant les conditions vérifiées par ces correcteurs.

Indiquons enfin où dans les raisonnements précédents intervient l'hypothèse de structure (4).

• La condition (4) interdit des nonlinéarités du type $u\overline{D_{x_j}u}$ ou $(D_{x_j}u)(\overline{D_{x_k}u})$. La raison pour laquelle nous ne savons pas traiter de telles expressions est liée au fait qu'après une réduction du type (8), on obtient une équation (9) avec dans le membre de droite un terme oscillant en $e^{-i\theta}$. Or la phase $-\theta$ est "presque caractéristique" pour l'opérateur $D_t + \frac{D_x^2}{t^2}$. Plus précisément, on a

$$(D_t + \frac{D_x^2}{t^2})(e^{-i\theta}) = \frac{\lambda}{t}e^{-i\theta} \tag{40}$$

pour une constante non nulle λ. Ceci est à comparer à (31), dans lequel λ est remplacé par un opérateur *elliptique d'ordre 2* Λ. Par conséquent, si l'on essaie d'éliminer le terme oscillant du membre de droite de l'équation par un correcteur du type (32), le gain de deux crans fourni par $\Lambda(t,D)^{-1}$ est remplacé par λ^{-1}, qui ne donne aucun gain de régularité (ni de décroissance). Le correcteur n'a donc plus de décroissance en une puissance négative de $\langle\sqrt{t}x\rangle$, ce qui entraîne que le reste qu'il induit dans le membre de droite de l'équation n'est pas meilleur que la quantité que l'on cherchait à éliminer ! La méthode de correcteurs devient donc inopérante. Il s'agit certainement là d'une difficulté intrinsèque au problème, car le même phénomène de "calcul asymptotique sans gain" apparaît si l'on tente de construire des solutions formelles pour ce type de nonlinéarités.

• Les autres nonlinéarités exclues par (4) sont les expressions en $u^2, \bar{u}^2$. La raison qui nous interdit de traiter celles-ci est liée au fait que pour contrôler la solution v dans L^∞, nous avons besoin de la propriété (36) avec un indice β tel que $\frac{\beta}{2}+\alpha'>0$. Dans le cas de l'exemple que nous avons traité, le fait que $R(v)$ envoie $\widetilde{E}^{s,s'}_{\alpha,\alpha',\infty}$ dans $E^{s,s'-1}_{\beta,\alpha',1}$ résulte de la structure en $w\frac{Dx_1}{t}w$ du membre de droite de (24) : pour les petites fréquences, $\frac{Dx_1}{t}$ fournit un gain qui est la clef de la preuve de (36). Rien de tel ne se produit pour des nonlinéarités en u^2 ou $\bar{u}^2$, et nous ignorons si on peut espérer l'existence globale dans ce cadre.

Références

[1] J.-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlinéaires, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 14, (1981) 209-256.

[2] H. Chihara : Local existence for semi-linear Schrödinger equation, Math. Japonica 42, (1995), 35-52.

[3] H. Chihara : Global existence of small solutions to semi-linear Schrödinger equations, Comm. Partial Differential Equations 21, (1996), 63-78.

[4] H. Chihara : The initial value problem for cubic semi-linear Schrödinger equations, Bull. RIMS, Kyoto Univ. 32, (1996), 445-471.

[5] S. Cohn : Global existence for the nonresonant Schrödinger equation in two space dimensions, Canad. Applied Math. Quart.2, (1994), 247-282.

[6] J.-M. Delort : Global solutions for small nonlinear long range perturbations of two dimensional Schrödinger equations, prépublication, (2001), 103 p.

[7] N. Hayashi et H. Hirata : Global existence of solutions to nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 31, (1988), 671-685.

[8] N. Hayashi et P.I. Naumkin : Asymptotics of small solutions to nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearities, prépublication, (2001), 12 p.

[9] N. Hayashi et P.I. Naumkin : Global existence of small solutions to the quadratic nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions, prépublication, (2001), 15 p.

[10] N. Hayashi et T. Ozawa : Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension : Diff. Integral Eqs 7, (1994), 453-461.

[11] C. Kenig, G. Ponce et L. Vega : Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré 10, (1993), 255-288.

[12] C. Kenig, G. Ponce et L. Vega : Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations, Invent. Math. 134 (1998), n°3, 489-545.

J.-M. DELORT
Département de Mathématiques
Institut Galilée
Université Paris-Nord
99, avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse