SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Serge Alinhac

La condition nulle pour les équations hyperboliques en dimension deux d'espace

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° V, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A5_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

La condition nulle pour les équations hyperboliques en dimension deux d'espace

par S. Alinhac

Introduction

Nous nous intéressons ici aux petites solutions de taille ϵ d'équations d'ondes en dimension d'espace deux ou trois. Dans le cas général, le temps de vie T_ϵ de la solution régulière est approximativement connu. Si l'équation a une structure particulière additionnelle dite "condition nulle", qui la fait ressembler davantage à l'équation des ondes linéaire, ce temps de vie est notablement augmenté ; en fait, il est $+\infty$ en dimension trois, tandis que la situation en dimension deux était jusqu'à présent peu claire. Dans ce texte, nous donnons d'abord un panorama général des résultats et des principaux concepts qui permettent de les énoncer (section 1). Nous abordons ensuite plus spécifiquement la question de la condition nulle en dimension deux (section 2) et donnons les résultats. Enfin, nous discutons brièvement les méthodes de preuve connues (inopérantes en dimension deux), et expliquons le moyen que nous utilisons pour obtenir de bonnes inégalités d'énergie pour l'opérateur linéarisé.

I. Le problème et les principaux résultats

On considère une équation d'onde quasilinéaire dans $\mathbf{R_t} \times \mathbf{R}^n$

(1.1) $$(\partial_t^2 - \Delta_x)u + \Sigma_{0\leq i,j\leq n} g_{ij}(\partial u)\partial_{ij}^2 u = 0.$$

Ici

$$x_0 = t, x = (x_1, \dots, x_n), \partial u = (\partial_t u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u).$$

Les fonctions $g_{ij}(\xi)$ sont réelles et régulières, et l'on note

$$g_{ij}(\xi) = \Sigma g_{ij}^k \xi_k + \Sigma h_{ij}^{kl}\xi_k\xi_l + r_{ij}(\xi), r_{ij}(\xi) = O(|\xi|^3).$$

Les conditions initiales sont

(1.2) $$u(x,0) = \epsilon u_1^0(x) + \epsilon^2 u_2^0(x) + \dots, \partial_t u(x,0) = \epsilon u_1^1(x) + \epsilon^2 u_2^1(x) \dots,$$

où les fonctions u_i^j sont réelles, C^∞ et supportées dans $|x| \leq M$. Notre but est d'évaluer le temps de vie T_ϵ de la solution C^∞ de (1.1), (1.2).

Ce problème a été très étudié, d'abord par F. John [9], [10], puis par Klainerman [11], [12], [13], Christodoulou [6], Hörmander [7] et beaucoup d'autres. Dans un premier temps, on a pu établir des *bornes inférieures* (asymptotiques) de T_ϵ

$$n = 2, \liminf \epsilon T_\epsilon^{1/2} \geq C_2 > 0, \qquad (1.3)_a$$

$$n = 3, \liminf \epsilon \log T_\epsilon \geq C_3 > 0. \qquad (1.3)_b$$

Hörmander a ensuite démontré (1.3) pour certaines constantes *explicites* C_n, dont il a conjecturé qu'elles étaient "les bonnes", c'est à dire qu'on peut remplacer dans (1.3) $\liminf$ par $\lim$.

Pour décrire ces constantes, nous devons introduire deux objets :

i) L'approximation linéaire de la solution u est ϵu_1, où u_1 est définie par

$$(\partial_t^2 - \Delta)u_1 = 0, u_1(x,0) = u_1^0(x), \partial_t u_1(x,0) = u_1^1(x).$$

Il est connu (cf. [7] p. 92) que

$$u_1(x,t) \sim r^{-\frac{n-1}{2}} R_1(r-t,\omega), t \to +\infty, C \leq r-t \leq M.$$

Ici, nous utilisons les coordonnées polaires habituelles

$$r = |x|, x = r\omega, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n), \sigma = r - t.$$

Le "premier profil" R_1 est une fonction régulière qui peut être explicitement calculée à partir des données.

ii) La fonction $g(\omega)$, définie sur la sphère unité $|\omega| = 1$ par

$$g(\omega) = \Sigma g_{ij}^k \omega_i \omega_j \omega_k, \omega_0 = -1.$$

Cette fonction mesure la réponse des termes non linéaires quadratiques de (1.1) (les plus importants) testés sur l'approximation ϵu_1 ; en effet, pour $u = \epsilon u_1$,

$$\Sigma g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = \epsilon^2 \frac{g(\omega)}{r^{n-1}} (\partial_\sigma R_1)(\partial_\sigma^2 R_1) + O(\epsilon^2 r^{-n}).$$

Les constantes conjecturées par Hörmander sont

$$C_2 = (\max g(\omega)\partial_\sigma^2 R_1)^{-1}, C_3 = (\max \frac{1}{2} g(\omega)\partial_\sigma^2 R_1)^{-1}.$$

Il n'est pas inutile d'expliquer d'un mot d'où viennent ces constantes. En utilisant des techniques d'optique géométrique non linéaire (cf. [3]), on peut construire une meilleure approximation de u sous la forme

$$u(x,t) \sim \epsilon r^{-\frac{n-1}{2}} S(r-t,\omega,\tau),$$

pour une fonction S régulière et une variable additionnelle τ, le *temps lent*, qui vaut $\tau = \epsilon t^{1/2}$ pour $n=2$ et $\tau = \epsilon \log t$ pour $n=3$ (comparer avec (1.3)). L'effet de temps lent est comme un effet de couche limite à l'infini. La fonction S est la solution du problème de Cauchy

$$-\alpha_n \partial^2_{\sigma\tau} S + g(\omega)(\partial_\sigma S)(\partial^2_\sigma S) = 0, S(\sigma,\omega,0) = R_1(\sigma,\omega), \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2. \tag{1.4}$$

Il est facile de voir que la constante C_n est tout simplement le temps de vie de S.

Pour obtenir des *bornes supérieures* de T_ϵ, il faut prouver que u explose effectivement (c'est à dire ici que $|\partial^2 u|$ devient infini), et pour que ces bornes soient pertinentes, il faut savoir comment cela se produit. Nous avons pu démontrer, à l'aide du concept "d'explosion géométrique"(cf. [1], [2] pour le cas $n=2$, [5] pour $n=3$), que, sous une condition générique sur les données de Cauchy, on avait bien

$$\lim \tau_\epsilon = C_n, n = 2, 3.$$

Ici, τ_ϵ est simplement le temps de vie T_ϵ exprimé en variable τ. La condition de généricité est

(ND) La fonction $g\partial^2_\sigma R_1$ a un unique maximum, qui est positif et non-dégénéré.

Dans le cas où $g(\omega) \equiv 0$, on dit que l'équation (1.1) satisfait la condition nulle. Christodoulou [6] et Klainerman [13] ont montré que dans ce cas, en dimension trois, la solution u existait globalement. Nous discutons maintenant le cas de la dimension deux.

II. La condition nulle en dimension deux

2.1 Nous considérons donc ici, pour $n=2$, une équation de la forme (1.1) pour laquelle $g(\omega) \equiv 0$. Des exemples typiques sont

$$(\partial_t^2 - \Delta)u + \alpha_1(\partial_1 u \partial^2_{01} u - \partial_t u \partial^2_1 u) + \alpha_2(\partial_2 u \partial^2_{02} u - \partial_t u \partial^2_2 u) + \ldots, \tag{2.1}$$

ou encore

$$\partial_t(\partial_t u/A) - \Sigma_{i=1,2}\partial_i(\partial_i u/A) = 0, A = [1 + |\nabla_x u|^2 - (\partial_t u)^2]^{1/2}. \tag{2.2}$$

Dans ce cas, l'équation (1.4) qui gouverne l'approximation S est linéaire, ce qui indique que le temps lent $\tau = \epsilon t^{1/2}$ n'est plus pertinent. On constate que les termes de perturbation cubique de l'équation, évalués sur l'approximation linéaire ϵu_1, valent

$$\Sigma h^{kl}_{ij} \partial_k u \partial_l u \partial^2_{ij} u = \epsilon^3 \frac{h(\omega)}{r^{3/2}} (\partial_\sigma R_1)^2 (\partial^2_\sigma R_1) + O(\epsilon^3 r^{-\frac{5}{2}}),$$

où la fonction h est définie de façon analogue à g par

$$h(\omega) = \Sigma h_{ij}^{kl} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l.$$

Ces termes sont donc maintenant plus grands que les termes quadratiques, "décimés" par la condition nulle (mais qui ne disparaissent pas pour autant de l'équation !). Les mêmes techniques d'optique géométrique que précédemment (cf. [14] pour tous les détails techniques) font apparaitre alors un second temps lent $\theta = \epsilon^2 \log t$, et une bonne approximation de la solution u est donnée par

$$u(x,t) = \epsilon r^{-1/2} S(r-t, \omega, \theta), \tag{2.3}$$

où la fonction S est solution du problème de Cauchy

$$-2\partial^2_{\sigma\theta} S + h(\omega)(\partial_\sigma S)^2(\partial^2_\sigma S) = 0, S(\sigma, \omega, 0) = R_1(\sigma, \omega).$$

Le temps de vie $\bar{\theta}$ de la solution S est ici

$$\bar{\theta} = (\max h(\omega)(\partial_\sigma R_1)(\partial^2_\sigma R_1))^{-1}.$$

Il est donc naturel de conjecturer, comme dans la section 1, que

$$\lim \epsilon^2 \log T_\epsilon = \bar{\theta}. \tag{C}$$

Cette conjecture se scinde en fait en deux :

$$\liminf \epsilon^2 \log T_\epsilon \geq \bar{\theta}, \tag{$\underline{C}$}$$

$$\limsup \epsilon^2 \log T_\epsilon \leq \bar{\theta}. \tag{$\bar{C}$}$$

De plus, si $h \equiv 0$, on dit que l'équation satisfait la *seconde* condition nulle, et on peut penser qu'alors la solution régulière u existe globalement (conjecture notée (C_∞)). Cette seconde condition nulle est trivialement vraie si tous les h_{ij}^{kl} sont nuls, mais elle est vraie aussi par exemple pour l'équation (2.2) des surfaces minimales (cf. Lindblad [16]).

A notre connaissance, ces conjectures n'ont été prouvées que dans deux cas :

i) Le cas "cubique", c'est à dire lorsque tous les g_{ij}^k sont nuls (la condition nulle est alors trivialement vérifiée). Les conjectures $(\underline{C})$ et (C_∞) ont été alors prouvées, mais pas $(\bar{C})$ (cf. Hoshiga [8], Li Ta-tsien [15]).

ii) Le cas invariant par rotation, où les trois conjectures ont été démontrées par Ladhari [14] (sans l'hypothèse (ND), qui n'a pas sa raison d'être en dimension un).

Nous avons obtenu le résultat général.

Théorème. *Dans le cas général,* ($\underline{C}$) *et* (C_∞) *sont vraies. De plus, si l'on fait sur les données de Cauchy l'hypothèse (***ND***), alors* (C) *est vraie.*

Comme plus haut, l'hypothèse (**ND**) signifie que la fonction $h(\partial_\sigma R_1)(\partial_\sigma^2 R_1)$ a un maximum unique, qui est positif et non dégénéré.

2.2 Disons ici un mot en général des méthodes utilisées pou traiter les équations vérifiant la condition nulle. Tout d'abord, rappelons ce que sont les champs Z utilisés par Klainerman (cf. [7] p. 93). Ce sont les champs

$$x_1\partial_2 - x_2\partial_1, t\partial_j + x_j\partial_t, x\partial_x + t\partial_t, \partial_k, j = 1, 2, k = 0, 1, 2.$$

Donc, outre les dérivations usuelles, les rotations, les rotations "hyperboliques", et l'opérateur d'homogénéité. Un lemme (cf. [7], Lemma 6.6.4) montre bien le rôle joué par ces champs eu égard à la condition nulle : si $g(\omega) \equiv 0$, on a pour toutes fonctions u, v

$$|\Sigma g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 v| \leq C(1+t)^{-1}\Sigma(|Zu||\partial^2 v| + |\partial u||Z\partial v|).$$

Autrement dit, l'usage des champs Z, qui sont à coefficients linéaires, permet de gagner le facteur $(1+t)^{-1}$. Pour utiliser ce fait, on peut rêver d'une inégalité d'énergie qui, au lieu de contrôler la norme L^2 de ∂u comme l'inégalité usuelle, contrôlerait directement celle de Zu. On obtient une telle inégalité en multipliant l'équation des ondes par $(r^2+t^2)\partial_t u + 2rt\partial_r u$, et en intégrant par parties. Malheureusement, cette procédure, qui fournit d'excellentes inégalités pour $n \geq 3$, ne fonctionne pas pour $n = 2$ (cf. [7], 6.3), car l'énergie obtenue ne contrôle pas les normes L^2 des Zu.

Une autre approche consiste à utiliser une compactification qui respecte l'équation des ondes. La plus simple est l'inversion conforme

$$X = \frac{x}{t^2 - |x|^2}, T = -\frac{t}{t^2 - |x|^2}.$$

Une transformation plus subtile mais qui conduit à des calculs pénibles est la transformation de Penrose (cf. [7], p. 270). Si l'on transforme l'équation complète (1.1) par une telle transformation, on obtient une nouvelle équation non linéaire, contenant le facteur singulier $(t^2 - |x|^2)^{-1}$. La condition nulle implique la disparition des termes les plus singuliers. Dans le cas $n = 3$, Christodoulou [6] (cf. aussi [7] p. 141) a montré que la nouvelle équation est une perturbation *régulière* de l'équation des ondes : la question de l'existence locale d'une petite solution est alors triviale. Malheureusement, pour $n = 2$, les termes singuliers ne disparaissent pas tous , et il ne semble pas que l'étude du problème transformé puisse éclairer le problème de départ (cf. cependant [16] pour un cas spécial où tout cela réussit).

Enfin, on peut essayer un changement d'inconnue u, dans l'esprit de la méthode de Shatah (cf. [7] p. 176). Là encore, la méthode ne semble fonctionner que dans des cas particuliers très symétriques.

III. La méthode des poids fantômes

3.1 La stratégie que nous utilisons est celle définie par Klainerman [12] :

i) Supposer un minimum de décroissance sur la solution u.

ii) Commuter les champs Z à l'équation, et utiliser l'inégalité d'énergie usuelle pour contrôler les $|Z^\alpha \partial u|_{L^2}$.

iii) A l'aide de l'inégalité

$$|v(x,t)| \le C(1+t+r)^{-1/2}(1+|r-t|)^{-1/2}\Sigma_{|\alpha|\le 2}|Z^\alpha v(.,t)|_{L^2},$$

justifier a posteriori l'hypothèse de décroissance sur u.

Dans l'étape ii), la partie principale de l'équation sur $Z^\alpha u$ est l'opérateur linéarisé

$$P = \partial_t^2 - \Delta + \Sigma g_{ij}(\partial u)\partial_{ij}^2 + \Sigma(\partial_{ij}^2 u)g'_{ij}(\partial u)\partial.$$

Rappelons que pour un opérateur

$$P = \partial_t^2 - \Delta + \Sigma\gamma^{jk}(x,t)\partial_{jk}^2,$$

l'inégalité d'énergie usuelle s'écrit (cf. [7] prop. 6.3.2)

$$|v'(.,t)|_{L^2} \le 2(|v'(.,0)|_{L^2} + \int_0^t |(Pv)(.,s)|_{L^2}ds)\exp\int_0^t 2|\partial\gamma(.,s)|_{L^\infty}ds.$$

Dans l'application de la stratégie décrite plus haut, il importe de neutraliser le *facteur d'amplification* $\exp\int_0^t |\partial\gamma|ds$ en contrôlant l'intégrale. Comme, dans le cadre de 1., la solution et ses dérivées décroissent à peu près comme $\epsilon(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}$, on a pour l'opérateur linéarisé sur u

$$\int_0^t |\partial\gamma|ds \le C\epsilon\int_0^t (1+s)^{-\frac{n-1}{2}}ds,$$

et le membre de droite de l'inégalité donne précisément le temps lent ($\epsilon t^{1/2}$ pour $n=2$, $\epsilon\log t$ pour $n=3$).

Dans le cas présent d'une équation (1.1) en dimension deux vérifiant ou non la condition nulle, le facteur d'amplification est en $\exp C\epsilon t^{1/2}$. Dans le cas cubique naturellement, ce facteur est en $\exp\epsilon^2\log t$, et il est négligeable tant que $\epsilon^2\log T_\epsilon \le C$, ce qui est précisément recherché. Le problème est donc d'obtenir pour l'opérateur linéarisé, et pas seulement dans le cas cubique, une inégalité d'énergie sans facteur d'amplification (au moins pour $\epsilon^2\log t \le C$).

3.2 Nous nous proposons d'établir une inégalité d'énergie *à poids* e^a. Bien entendu, a devra être borné, sans quoi il ne sera plus possible d'utiliser l'inégalité iii) pour prouver la décroissance de u. Pourquoi mettre un poids s'il ne compte pas ? Expliquons nous. Lorsque l'on calcule

$$\int (\exp a) P v v_t dx dt$$

dans une bande $[0,T] \times \mathbf{R}^2$, en faisant les intégrations par parties usuelles, on obtient, outre les termes aux temps $t = 0$ et $t = T$ qui donnent l'énergie, une forme quadratique Q_1 en ∂v. Les coefficients de Q_1 sont des sommes de termes

a) soit linéaires en ∂a,
b) soit linéaires en $\partial^2 u$,
c) soit contenant $\partial u \partial^2 u$, ou des termes encore plus petits que l'on peut négliger ici.

Les termes de type c) donnent naissance à un facteur d'amplification de l'énergie, borné tant que $\epsilon^2 \log t \leq C$, ce que nous supposons ici.

Une hypothèse a priori sur la taille des $|Z^\alpha \partial u(.,t)|_{L^\infty}$ dans l'intervalle considéré $[0,T]$ permet d'exprimer tous les termes $\partial^2 u$ en fonction de $\partial_t^2 u$, modulo des termes intégrables en t, car tous les blocs

$$X_j u \equiv \partial_j u + \omega_j \partial_t u$$

s'expriment à l'aide des champs Z et sont nettement plus petits que ∂u (comparer avec l'approximation (2.3)). Comme d'autre part on attend

$$|\partial_t^2 u| \leq C\epsilon(1+t)^{-1/2}(1+|\sigma|)^{-3/2},$$

cela donne l'idée de choisir

$$a = b(\sigma) - \theta(t), b' > 0, \theta' > 0.$$

Finalement, l'introduction d'un poids e^b fait apparaitre dans Q_1 les termes

$$b'(\sigma)[(\partial_1 v + \omega_1 \partial_t v)^2 + (\partial_2 v + \omega_2 \partial_t v)^2].$$

Il s'agit là d'un phénomène de *polarisation.* En effet, la condition nulle signifie que $r - t$ est une phase pour P (à une très bonne approximation). Si l'on pense à P comme à un système du premier ordre L en $V = \partial v$, et que l'on cherche à rendre petit

$$L(\exp b(r-t)W),$$

dans l'esprit de l'optique géométrique linéaire, on voit que W doit appartenir au noyau du symbole de L pris en $(\omega, -1)$.

Pour exploiter cette polarisation, on écrit ∂v à l'aide des $X_j v = \partial_j v + \omega_j \partial_t v$ et de $\partial_t v$. On obtient ainsi à partir de Q_1 une forme quadratique Q_2 en $X_j v, \partial_t v$

$$Q_2 = *X_1^2 + *X_2^2 + \ldots + K(\partial_t v)^2.$$

Le coefficient K nous intéresse particulièrement. Il vaut à peu près

$$K = 2\theta' + K_1 b' + K_2 \partial_t^2 u.$$

Il apparait que, à des termes négligeables près, K_1 et K_2 sont des multiples de $g(\omega)$, c'est à dire *nuls*. Le point de ce calcul est qu'on voit apparaitre, *au niveau de l'inégalité d'énergie*, la condition nulle. On voit alors sans trop de mal qu'il suffit de choisir

$$\theta' = 0, b' = 2(1 + |\sigma|)^{-3}$$

pour montrer que Q_2 est, modulo des termes négligeables, non négative. L'inégalité est prouvée, et le reste des preuves de $(\underline{C})$ et (C_∞) est standard.

Pour indiquer de façon un peu académique le genre d'inégalités qu'on peut obtenir par cette méthode de "poids fantômes", citons le théorème suivant.

Théorème. *Soit w une fonction définie pour $t \geq 0$, régulière, réelle, supportée dans $|x| \leq t + M$. Soit l'opérateur*

$$P \equiv \partial_t^2 - \Delta + \Sigma g_{ij}(\partial w)\partial_{ij}^2,$$

où l'on suppose que les g_{ij} vérifient les deux conditions nulles. Supposons de plus

$$|\partial w(.,t)|_{L^\infty} + \Sigma |Z\partial w(.,t)|_{L^\infty} \leq C_1(1+t)^{-\eta}$$

pour un $\eta > 1/3$. Alors, pour C_1 assez petit, l'inégalité d'énergie standard

$$|\partial v(.,t)|_{L^2} \leq C_0(|\partial v(.,0)|_{L^2} + \int_0^t |Pv(.,s)|_{L^2} ds)$$

est vraie globalement.

En réalité, pour des raisons techniques, on doit d'abord construire une certaine approximation u_a de la solution, puis scinder

$$u = u_a + \dot{u}.$$

On vérifie directement que u_a a les bonnes propriétés requises pour utiliser la méthode décrite, l'hypothèse d'induction portant alors sur $\dot{u}$. Dans [4], la construction de u_a que nous utilisons est dûe à Ladhari [14].

3.3 La conjecture $(\bar{C})$

La preuve de cette conjecture, sous l'hypothèse (ND), suit les mêmes idées que dans les cas, rappelés en 1. où la condition nulle n'est pas vérifiée :

i) Utilisation des variables "locales" $\sigma = r - t, \omega, \tau = \epsilon^2 \log t$ pour se ramener à un problème sur un domaine fixe.

ii) Introduction d'un changement de variables inconnu

$$\sigma = \phi(s, \omega, \tau), \omega = \omega, \tau = \tau,$$

et construction d'une solution singulière u sous la forme

$$u(\phi, \omega, \tau) = w,$$

où ϕ et w sont des fonctions régulières obtenues comme solutions d'un certain système dit "système éclaté". Ce procédé, dit de "l'explosion géométrique", est expliqué en détail dans [1], [2], [3]. Sa mise en oeuvre dans le cas présent en contenue dans [5].

Bibliographie

[1] Alinhac S., *"Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions"*, Ann. Maths 149, (1999), 97-127.
[2] Alinhac S., *"Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II"*, Acta Math. 182, (1999), 1-23.
[3] Alinhac S., *"Blowup for nonlinear hyperbolic equations"*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser (1995).
[4] Alinhac S., *"The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions I"*, Preprint, Université Paris-Sud, Orsay, (2000).
[5] Alinhac S., *"The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions II"*, Preprint, Université Paris-Sud, Orsay, (2000).
[6] Christodoulou D., *"Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data"*, Comm. Pure Appl. Math. 39, (1986), 267-282.
[7] Hörmander L., *"Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations"*, Math. Appl. 26, Springer Verlag, (1997).
[8] Hoshiga A., *"The initial value problems for quasilinear wave equations in two space dimensions with small data"*, Adv. Math. Sci. Appl. 5, (1995), 67-89.
[9] John F., *"Nonlinear wave equations. Formation of singularities"*, Leghigh University, University Lectures Series, AMS, Providence, (1990).
[10] John F., *"Solutions of quasilinear wave equations with small initial data. The third phase."*, Lecture Notes in Math. 1402, Springer Verlag, (1989), 155-173.
[11] Klainerman S., *"Long time behavior of solutions to nonlinear wave equations"*, Proc. Int. Congr. Math., Warszawa, (1983), 1209-1215.
[12] Klainerman S., *"Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation"*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985), 321-332.
[13] Klainerman S., *"The null condition and global existence to nonlinear wave equations"*, Lect. Appl. Math. 23, (1986), 293-326.
[14] Ladhari R., *"Petites solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux d'espace"*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, (1999).
[15] Li Ta-tsien, *"Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions"*, Publ. RIMS 231, (1995), 645-665.
[16] Lindblad H., *"A remark on global existence for small initial data of the minimal surface equation in minkowskian space-time"*, Preprint, (1997).

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
Serge.Alinhac@math.u-psud.fr