Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Raphaël Danchin

Fluides légèrement compressibles et limite incompressible

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° III, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

FLUIDES LEGEREMENT COMPRESSIBLES ET LIMITE INCOMPRESSIBLE

Raphaël Danchin

Laboratoire d'Analyse Numérique,

175 rue Chevaleret

Université Pierre et Marie Curie,

75252 Paris, France

E-mail: danchin@ann.jussieu.fr

Introduction

Dans la vie quotidienne, on fait rarement la distinction entre fluides faiblement compressibles et fluides incompressibles, et on se contente presque toujours du modèle incompressible pour rendre compte du comportement d'un fluide légèrement compressible tel que l'eau. Cette tendance se retrouve dans les travaux mathématiques consacrés aux équations de la mécanique des fluides: les équations de Navier-Stokes incompressibles sont bien plus étudiées que leur pendant compressible ou légèrement compressible.

Dans cet exposé, nous testons la robustesse d'une approche classique pour résoudre le modèle incompressible: la méthode de Kato, et justifions rigoureusement l'utilisation du modèle incompressible comme bonne approximation du comportement des fluides légèrement compressibles.

Pour tout fluide compressible, on peut calculer le rapport entre la vitesse caractéristique et la vitesse du son. La quantité obtenue ϵ est sans dimension et s'appelle nombre de Mach. Un fluide est qualifié de légèrement compressible si son nombre de Mach est petit. Pour simplifier, on se limitera désormais à des fluides barotropiques (i.e. la loi de pression P ne dépend que de la densité) qui ne conduisent pas la chaleur et on étudiera la convergence (lorsque ϵ tend vers 0) vers les équations de Navier-Stokes incompressibles *homogènes* qui modèlisent les fluides incompressibles visqueux à densité constante. On pourra se reporter à [Da2] pour l'étude de fluides plus généraux.

Après adimensionnalisation des différentes quantités physiques qui entrent en jeu, on montre que l'évolution du fluide est régie par le système suivant (voir par exemple l'introduction de [Li1] ou l'appendice de [HL]):

$$(NSC^\epsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho^\epsilon + \mathrm{div}(\rho^\epsilon u^\epsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho^\epsilon u^\epsilon) + \mathrm{div}(\rho^\epsilon u^\epsilon \otimes u^\epsilon) - \mu\Delta u^\epsilon - (\lambda+\mu)\nabla\,\mathrm{div}\, u^\epsilon + \dfrac{\nabla P^\epsilon}{\epsilon^2} = \rho^\epsilon f^\epsilon, \\ (\rho^\epsilon, u^\epsilon)_{|t=0} = (\rho_0^\epsilon, u_0^\epsilon). \end{cases}$$

Le scalaire $\rho^\epsilon = \rho^\epsilon(t,x)$ est la densité adimensionnalisée et est destinée à tendre vers 1 lorsque ϵ tend vers 0. Le champ de vecteurs $u^\epsilon = u^\epsilon(t,x) \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ désigne la vitesse et $f^\epsilon = f^\epsilon(t,x) \in \mathbb{R}^N$, le champ de forces extérieures. On suppose que les coefficients de Lamé du fluide λ et μ vérifient $\lambda + 2\mu > 0$ et $\mu > 0$ (hypothèse satisfaite par les fluides “physiques”). Enfin $P^\epsilon = P(\rho^\epsilon)$ avec P fonction régulière de ρ^ϵ telle que $P'(1) = 1$. Dans tout l'exposé, on s'intéresse à l'évolution du fluide pour les temps t positifs, et on suppose que la variable d'espace x décrit $\mathbb{R}^N$ tout entier. Le cas des conditions aux limites périodiques est étudié dans [Da4].

Si l'on suppose que $\rho_0^\epsilon \to 1$, $u_0^\epsilon \to u_0$ et $f^\epsilon \to f$ lorsque ϵ tend vers 0, on s'attend à ce que $(\rho^\epsilon, u^\epsilon)$ tende (en un sens à préciser) vers $(1, v)$ avec v solution du système de Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla \Pi = f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer la valeur de v au temps $t = 0$, introduisons le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle: $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} I - \nabla \operatorname{div} \Delta^{-1}$, et $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$. Comme le champ limite v est à divergence nulle, on doit avoir $\mathcal{Q}u^\epsilon \to 0$ et $\mathcal{P}u^\epsilon \to v$ si bien que $v_0 \stackrel{\text{déf}}{=} v_{|t=0} = \mathcal{P}u_0$.

En conséquence, le système limite s'écrit

$$(NSI) \qquad \begin{cases} \partial_t v + \mathcal{P}(v \cdot \nabla v) - \mu \Delta v = \mathcal{P} f, \\ v_{|t=0} = \mathcal{P}u_0. \end{cases}$$

Le résultat de convergence décrit ci-dessus a été justifié mathématiquement dans divers contextes.

Dans les premiers travaux consacrés à ce sujet, les auteurs se sont restreints à des données initiales “bien préparées” afin que les dérivées temporelles de la solution restent uniformément bornées en ϵ sur un intervalle de temps fixe. On peut par exemple supposer que $\rho_0^\epsilon = 1 + O(\epsilon^2)$ et que $\operatorname{div} u_0^\epsilon = 0(\epsilon)$. Ce type d'approche remonte (au moins) à un article de S. Klainerman et A. Majda consacré au cas non visqueux (voir [KM]). Depuis, H.-O. Kreiss, J. Lorenz et M. Naughton ont traité le cas visqueux dans [KLN]. Une approche similaire a été utilisée récemment par D. Hoff dans [Ho] pour des données initiales peu régulières.

Dans cet exposé, nous considérons des données plus générales dites “mal préparées”. Plus concrètement, on suppose que $\rho_0^\epsilon = 1 + \epsilon b_0^\epsilon$ avec b_0^ϵ uniformément borné en ϵ (pour une norme adéquate qui sera précisée ultérieurement). La preuve de la convergence est alors nettement plus délicate comme on peut s'en convaincre aisément en faisant le changement de fonction $\rho^\epsilon = 1 + \epsilon b^\epsilon$ dans (NSC^ϵ). En effet, (b^ϵ, u^ϵ) vérifie

$$(\widetilde{NSC}^\epsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t b^\epsilon + \left[\dfrac{\operatorname{div} u^\epsilon}{\epsilon}\right] = -\operatorname{div}(b^\epsilon u^\epsilon), \\ \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon - \dfrac{\mu \Delta u^\epsilon + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u^\epsilon}{1 + \epsilon b^\epsilon} + \dfrac{P'(1 + \epsilon b^\epsilon)}{1 + \epsilon b^\epsilon} \left[\dfrac{\nabla b^\epsilon}{\epsilon}\right] = f^\epsilon, \\ (b^\epsilon, u^\epsilon)_{|t=0} = (b_0^\epsilon, u_0^\epsilon), \end{cases}$$

et les dérivées temporelles peuvent croître comme $1/\epsilon$. Plus précisément, les termes entre crochets sont susceptibles de générer des ondes très oscillantes. Leur interaction pourrait entraîner un défaut de convergence vers (NSI).

Sous l'impulsion de P.-L. Lions au début des années 90, des résultats d'existence et de convergence très complets ont été obtenus pour les solutions faibles globales de (NSC^ϵ) d'énergie finie. Décrivons-les de façon très simplifiée.

À ϵ fixé et pour des lois de pression du type $P(\rho) = \rho^\gamma$ avec $\gamma > 3/2$ si $N = 2$, et $\gamma > 9/5$ si $N = 3$, P.-L. Lions a établi en 1993 l'existence de solutions faibles globales d'énergie finie pour le système (NSC^ϵ) avec données $u_0^\epsilon \in L^2$ et $\rho_0^\epsilon \in L^\gamma$[1]. Si les données initiales $(u_0^\epsilon, b_0^\epsilon)$ sont uniformément bornés dans $L^2 \times L^\gamma$ pour ϵ tendant vers 0, les solutions faibles correspondantes sont uniformément bornées dans l'espace d'énergie. Quitte à extraire, on a $\rho^\epsilon \to 1$ et $u^\epsilon \rightharpoonup v$ au sens des distributions. Toute la difficulté consiste à prouver que v vérifie bien (NSI).

Récemment, B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi ont montré que v est bien une solution faible au sens de Leray de (NSI) (voir [Le] pour la définition de telles solutions). La

[1] Le résultat rigoureux est un peu plus compliqué à énoncer, et dépend du domaine dans lequel vit le fluide (voir [Li2]).

“qualité” de la convergence peut être précisée dans certains cas, et dépend du domaine dans lequel le fluide évolue et des conditions aux limites prescrites.

Lorsque le domaine est un ouvert borné, et sous une certaine condition géométrique (que l'on sait être générique si $N = 2$), les oscillations redoutées sont noyées dans la couche limite visqueuse, et la convergence est forte (voir [DGLM]).

Pour des conditions aux limites périodiques, les oscillations persistent pour tout temps, mais on peut prouver la convergence de la solution filtrée par le semi-groupe des ondes acoustiques, et écrire le système limite pour les oscillations (voir [LM1]).

Enfin, dans le cas de l'espace entier, les ondes acoustiques s'échappent à l'infini en un temps de l'ordre de $1/\epsilon$ et n'ont pas d'effet fâcheux. Les estimations de Strichartz pour l'équation des ondes permettent d'exploiter cette propriété de dispersion et d'établir un résultat de convergence forte (voir [DG]).

Enfin, signalons que l'on dispose dans tous les cas décrits ci-dessus, et dans des contextes bien plus généraux, de résultats de convergence locaux (voir [LM2]).

Bien sûr, des questions telles que l'unicité ou la convergence de la suite entière paraissent inabordables dans le cadre des solutions faibles.

Aucune étude systématique ne semble avoir été consacrée à la convergence des solutions fortes de (NSC^ϵ) pour des données initiales “mal préparées”. Dans [HL], T. Hagstrom et J. Lorenz traitent le cas de données initiales mal préparées très régulières, périodiques et bidimensionnelles. En l'absence de force extérieure, ils montrent que les solutions de (NSC^ϵ) sont globales si ϵ est assez petit. Les méthodes de [HL] reposent en grande partie sur les propriétés de décroissance exponentielle des solutions de (NSI), spécifiques à la dimension 2 périodique sans force extérieure, et sont donc difficiles à adapter à des situations plus générales. Dans le cas périodique également et pour $N \geq 2$ quelconque, I. Gallagher montre dans [G] que le temps d'existence de (NSC^ϵ) tend vers l'infini lorsque ϵ tend vers 0 pourvu que la vitesse initiale u_0^ϵ soit petite dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$, la partie incompressible de la force extérieure $\mathcal{P}f^\epsilon$, petite dans $L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{N}{2}-2})$, et que les données $(\rho_0^\epsilon, u_0^\epsilon, f^\epsilon)$ appartiennent en outre à un espace de Sobolev d'ordre suffisamment élevé. En prime, I. Gallagher obtient une décomposition en profils pour $(\rho^\epsilon, u^\epsilon)$.

1 Résultats

Nous voulons adopter un cadre de travail aussi proche que possible de celui habituellement utilisé pour les fluides incompressibles.

En simplifiant à l'extrême, il existe deux approches classiques pour résoudre (NSI). La première consiste à prouver l'existence globale de solutions faibles d'énergie finie. Cette approche remonte à J. Leray en 1934 (voir [Le]). Comme nous l'avons déjà mentionné, son adaptation au cas compressible a été menée de façon très systématique par P.-L. Lions *et al.*

La deuxième approche classique – celle que nous voulons adapter à (NSC^ϵ) – consiste à résoudre (NSI) dans des espaces invariants par le *scaling* du système, c'est-à-dire par la transformation

$$(1) \qquad v_0(x) \to \ell v_0(\ell x), \qquad v^\nu(t,x) \to \ell v^\nu(\ell^2 t, \ell x).$$

Ce point de vue remonte à un article de H. Fujita et T. Kato datant de 1964 et permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité locales pour (NSI) avec données initiales dans des espaces à norme invariante par la transformation $v_0(x) \to \ell v_0(\ell x)$, résultats qui deviennent globaux si ces données sont petites. Dans l'article fondateur [FK], H. Fujita et T. Kato ont utilisé l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$ qui a le *scaling* décrit ci-dessus, mais de nombreux autres espaces font aussi bien l'affaire (voir [AT] ou [M] pour un point récent sur la question).

Dans notre cas, il s'agit donc en premier lieu de déterminer si (NSC^ϵ) possède comme (NSI) des propriétés d'invariance par changement d'échelle. On constate que la transformation

$$(\rho_0(x), u_0(x)) \to (\rho_0(\ell x), \ell u_0(\ell x)),$$
$$(\rho(t,x), u(t,x)) \to (\rho(\ell^2 t, \ell x), \ell u(\ell^2 t, \ell x))$$

laisse (NSC^ϵ) invariant à un changement près de la loi de pression en $\ell^2 P$. Oublions un instant ce terme déplaisant et adoptons le cadre des espaces de Sobolev. L'invariance ci-dessus nous suggère de choisir des données $(\rho_0^\epsilon = 1 + \epsilon b_0^\epsilon, u_0^\epsilon)$ telles que b_0^ϵ soit dans $\dot H^{\frac N2}$ et u_0^ϵ, dans $(\dot H^{\frac N2 -1})^N$. Il paraît cependant difficile de se passer d'un contrôle L^∞ sur la densité. Pour y remédier, on remplace $\dot H^{\frac N2} \times (\dot H^{\frac N2 -1})^N$ par l'espace de Besov homogène $\dot B^{\frac N2}_{2,1} \times (\dot B^{\frac N2 -1}_{2,1})^N$ qui est un peu plus petit mais a le même *scaling*. Le fait que $\dot B^{\frac N2}_{2,1}$ soit une sous-algèbre de L^∞ motive ce choix.

Rappelons que pour $|s| \le N/2$, l'espace $\dot B^s_{2,1}$ (que l'on notera désormais B^s) peut se définir comme suit:

$$B^s \overset{\text{déf}}{=} \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \ \big| \ \|u\|_{B^s} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left(\int_{2^q \le |\xi| \le 2^{q+1}} |\xi|^{2s} |\widehat u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac12} < +\infty \right\}.$$

Pour mémoire, la norme dans $\dot H^s$ est définie par

$$\|u\|_{\dot H^s} \overset{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\widehat u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac12} = \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2^q \le |\xi| \le 2^{q+1}} |\xi|^{2s} |\widehat u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac12}$$

si bien que $B^s \hookrightarrow \dot H^s$ mais que B^s et $\dot H^s$ sont tout de même très proches. Nous invitons le lecteur à consulter la deuxième section de ce document pour plus de détails sur ces espaces de Besov.

Dans [Da1] et [Da2], on montre que $(NSC) \overset{\text{déf}}{=} (NSC^1)$ est effectivement bien posé si les données initiales $(\rho_0 = 1 + b_0, u_0)$ vérifient $(b_0, u_0) \in \dot B^{\frac N2}_{2,1} \times (\dot B^{\frac N2 -1}_{2,1})^N$.

Avant d'énoncer le résultat obtenu, définissons quelques notations. Pour $s \in \mathbb{R}$, $T \in]0, +\infty[$ et $\eta > 0$, on pose

$$F^s_T \overset{\text{déf}}{=} \left(L^1(0,T; B^{s+1}) \cap C([0,T]; B^{s-1}) \right)^N,$$
$$E^s_{\eta,T} \overset{\text{déf}}{=} \left(L^1(0,T; \widetilde B^{s,1}_\eta) \cap C([0,T]; \widetilde B^{s,\infty}_\eta) \right) \times \left(L^1(0,T; B^{s+1}) \cap C([0,T]; B^{s-1}) \right)^N$$

où les espaces $\widetilde B^{s,r}_\eta$ sont des espaces de Besov "hybrides" inclus dans B^s_{loc} (voir la section 3). On a en particulier $\widetilde B^{s,2}_\eta = B^s$ et $\widetilde B^{s,\infty}_\eta = B^{s-1} \cap B^s$.

Enfin, si $T = +\infty$, on note simplement F^s et E^s_η les espaces définis ci-dessus.

Théorème 1.— *Soit* $\rho_0 = 1 + b_0$ *avec* $b_0 \in B^{\frac N2}$ *et* $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho_0(x) > 0$.

1) *Existence locale critique: Si de plus* $\|b_0\|_{B^{\frac N2}} \ll 1$, $u_0 \in B^{\frac N2 -1}$ *et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; B^{\frac N2 -1})$, *alors* (NSC) *a une solution locale* $(\rho = 1 + b, u)$, *unique si* $N \ge 3$, *vérifiant* $b \in C([0,T]; B^{\frac N2})$ *et* $u \in F_T^{\frac N2}$.
2) *Existence locale loin du vide: Sans condition de petitesse, mais si en outre* $b_0 \in B^s$, $u_0 \in B^{s-1}$ *et* $f \in L^1_{loc}(0, +\infty; B^{s-1})$ *pour un* $s \in]N/2, N/2+1[$, *alors* (NSC) *a une unique solution locale* $(\rho = 1 + b, u)$ *vérifiant* $\rho > 0$, $b \in C([0,T]; B^{\frac N2} \cap B^s)$ *et* $u \in F^s_T$.
3) *Existence globale: Il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que pour tout triplet* (b_0, u_0, f) *vérifiant* $b_0 \in B^{\frac N2} \cap B^{\frac N2 -1}$, $u_0 \in B^{\frac N2 -1}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^+; B^{\frac N2 -1})$ *et*

$$\|b_0\|_{B^{\frac N2}} + \|b_0\|_{B^{\frac N2 -1}} + \|u_0\|_{B^{\frac N2 -1}} + \|f\|_{L^1(B^{\frac N2 -1})} \le \alpha,$$

le système (NSC) *admette une solution* $(\rho = 1 + b, u)$ *(unique si* $N \ge 3$*) telle que* $(b,u) \in E_\nu^{\frac N2}$ *avec* $\nu = \lambda + 2\mu$.

Un changement de variables évident permet de généraliser le résultat ci-dessus à (NSC^ϵ) pour $\epsilon \neq 1$. Ainsi, on a par exemple existence globale dans $E^{\frac{N}{2}}_{\epsilon\nu}$ uniformément en ϵ pour

$$(1) \qquad \|\rho_0^\epsilon - 1\|_{B^{\frac{N}{2}}} + \epsilon^{-1}\|\rho_0^\epsilon - 1\|_{B^{\frac{N}{2}-1}} + \|u_0^\epsilon\|_{B^{\frac{N}{2}-1}} + \|f\|_{L^1(B^{\frac{N}{2}-1})} \leq \alpha.$$

Pour simplifier l'exposition des résultats de convergence, nous supposerons désormais (mais ce n'est pas essentiel) que $(b_0^\epsilon, u_0^\epsilon) = (b_0, u_0)$ ne dépend pas de ϵ.

En nous donnant un peu plus de régularité que ne le demande le cadre critique, nous allons montrer que le temps de vie T^ϵ des solutions de (NSC^ϵ) est au moins égal à celui de la solution limite pour ϵ assez petit, et que $(b^\epsilon, u^\epsilon) \to (0, v)$ comme prévu.

Notons $D^s \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{-\Delta}^{\,\frac{s}{2}}$. Nous avons alors le résultat suivant:

Théorème 2.—*Soit $\alpha > 0$, $b_0 \in B^{\frac{N}{2}} \cap B^{\frac{N}{2}+\alpha}$, $u_0 \in B^{\frac{N}{2}-1} \cap B^{\frac{N}{2}-1+\alpha}$ et $f \in L^1(I\!R^+; B^{\frac{N}{2}-1} \cap B^{\frac{N}{2}-1+\alpha})$. Supposons que (NSI) avec donnée initiale $\mathcal{P}u_0$ ait une solution $v \in F^{\frac{N}{2}}_{T_0} \cap F^{\frac{N}{2}+\alpha}_{T_0}$ pour un $T_0 > 0$ éventuellement infini.*

Alors il existe un $\epsilon_0 > 0$ ne dépendant que des données initiales et de v, et tel que pour $\epsilon \leq \epsilon_0$, $(\widetilde{NSC}^\epsilon)$ ait une unique solution (b^ϵ, u^ϵ) appartenant à $E^{\frac{N}{2}}_{\epsilon\mu,T_0} \cap E^{\frac{N}{2}+\alpha}_{\epsilon\mu,T_0}$ uniformément en ϵ. De plus $\mathcal{P}u^\epsilon$ tend vers v dans $F^{\frac{N}{2}}_{T_0} \cap F^{\frac{N}{2}+\alpha}_{T_0}$ comme une puissance de ϵ, et $D^{\alpha-1+\frac{1}{p}}(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)$ tend vers 0 dans $L^p(0, T_0; L^\infty)$ comme $\epsilon^{\frac{1}{p}}$, avec $p \in [2, +\infty[$ si $N \geq 4$, $p \in]2, +\infty[$ si $N = 3$, et $p \in [4, +\infty[$ si $N = 2$.

Remarque 1.— Lorsque $N = 2$, (NSI) a toujours une solution globale unique dans l'espace $F^1 \cap F^{1+\alpha}$ et l'on peut choisir $T_0 = +\infty$ dans l'énoncé ci-dessus. Il y a donc existence globale pour (NSC^ϵ) lorsque ϵ est assez petit.

On peut également prouver un résultat de convergence dans le cas critique $\alpha = 0$ pourvu que les données initiales vérifient la condition de petitesse (1). Énonçons le résultat obtenu lorsque $N = 3$ (consulter [Da3] pour le cas général $N \geq 2$):

Théorème 3.—*Soit $\epsilon \in]0, 1]$. Il existe une constante positive $\alpha = \alpha(\lambda, \mu, P)$ telle que si $\rho_0^\epsilon = 1 + \epsilon b_0$ avec $b_0 \in B^{\frac{1}{2}} \cap B^{\frac{3}{2}}$, $u_0 \in B^{\frac{1}{2}}$, $f \in L^1(I\!R^+; B^{\frac{1}{2}})$ et*

$$\|b_0\|_{B^{\frac{1}{2}}} + \epsilon\|b_0\|_{B^{\frac{3}{2}}} + \|u_0\|_{B^{\frac{1}{2}}} + \|f\|_{L^1(B^{\frac{1}{2}})} \leq \alpha$$

alors $(\widetilde{NSC}^\epsilon)$ (resp. (NSI)) a une unique solution globale $(\rho^\epsilon, u^\epsilon)$ (resp. v) dans $E^{\frac{3}{2}}_{\epsilon\nu}$ (resp. $F^{\frac{3}{2}}$). De plus, il existe une constante $M = M(\lambda, \mu, P)$ telle que

$$\|b^\epsilon\|_{L^2(B^{\frac{3}{2}})} + \|b^\epsilon\|_{L^\infty(B^{\frac{1}{2}})} + \epsilon\|b^\epsilon\|_{L^\infty(B^{\frac{3}{2}})} + \|u^\epsilon\|_{L^1(B^{\frac{5}{2}})} + \|u^\epsilon\|_{L^\infty(B^{\frac{1}{2}})}$$
$$\leq M\big(\|b_0\|_{B^{\frac{1}{2}}} + \epsilon\|b_0\|_{B^{\frac{3}{2}}} + \|u_0\|_{B^{\frac{1}{2}}} + \|f\|_{L^1(B^{\frac{1}{2}})}\big),$$
$$\|v\|_{L^1(B^{\frac{5}{2}})} + \|v\|_{L^\infty(B^{\frac{1}{2}})} \leq M\big(\|\mathcal{P}u_0\|_{B^{\frac{1}{2}}} + \|\mathcal{P}f\|_{L^1(B^{\frac{1}{2}})}\big).$$

Enfin, $D^{-\frac{1}{4}}\mathcal{Q}u^\epsilon$ tend vers 0 dans $L^2(I\!R^+; L^\infty)$, $D^{-\frac{3}{4}}b^\epsilon$ tend vers 0 dans $L^4(I\!R^+; L^\infty)$ et, pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$, $D^{-1-\alpha}(\mathcal{P}u^\epsilon - v)$ tend vers 0 dans l'ensemble $C_b(I\!R^+ \times I\!R^3)$ des fonctions continues et bornées sur $I\!R^+ \times I\!R^3$.

2 Quelques rappels sur les espaces de Besov et le paraproduit

2.1 La décomposition de Littlewood-Paley

La *décomposition de Littlewood-Paley* est notre outil de base. Elle donne un cadre rigoureux au découpage en tranches dyadiques des fonctions ou distributions tempérées. Nous indiquons brièvement comment construire une décomposition de Littlewood-Paley homogène et renvoyons au livre de T. Runst et W. Sickel (voir [RS]) pour un exposé plus détaillé.

Nous avons vu dans la partie précédente une version simplifiée de ce découpage dyadique qui consistait à décomposer une distribution tempérée u en

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}\big(1_{2^q\leq|\xi|\leq 2^{q+1}}\widehat{u}\big).$$

Une décomposition aussi sommaire ne suffit pas toujours dans les applications: en effet, la continuité de l'opérateur $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\big(1_{2^q\leq|\xi|\leq 2^{q+1}}\big)\widehat{u}$ sur L^p n'est pas assurée si $p \neq 2$. La décomposition de Littlewood-Paley consiste à remplacer les fonctions caractéristiques des couronnes dyadiques par des fonctions régulières supportées au voisinage des couronnes.

On peut par exemple considérer une fonction φ positive de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ supportée dans la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^N,\, 3/4 \leq |\xi| \leq 8/3\}$ et telle que

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{pour} \quad \xi \neq 0.$$

On pose alors $\varphi_q(\xi) = \varphi(2^{-q}\xi),\ h_q = \mathcal{F}^{-1}\varphi_q$ et on définit les blocs dyadiques comme suit:

$$\Delta_q u \overset{\text{déf}}{=} \varphi_q(D)u = \int_{\mathbb{R}^N} h_q(y)u(x-y)\,dy \quad \text{pour} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Il est commode de définir une localisation en fréquences plus petites que 2^q:

$$S_q u \overset{\text{déf}}{=} \sum_{p\leq q-1} \Delta_p u.$$

Remarquons que la décomposition de Littlewood-Paley homogène obtenue

$$u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u$$

ne “voit pas” les polynômes. De ce fait, la décomposition ne converge et l'égalité n'a lieu qu'à un polynôme près.

La décomposition de Littlewood-Paley u possède des propriétés de quasi-orthogonalité fort utiles dans les applications. On a par exemple

$$\Delta_k\Delta_q u \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 2 \ \text{ et } \ \Delta_k(S_{q-1}u\Delta_q u) \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 5. \tag{2}$$

Les valeurs 2 et 5 ci-dessus dépendent de l'épaisseur des couronnes dans la définition de φ, et n'ont pas d'importance en pratique.

Outre la localisation en fréquences, la décomposition de Littlewood-Paley a de nombreuses applications: elle permet de caractériser certains espaces fonctionnels (notamment les espaces de Sobolev et de Besov) et de définir un avatar de produit entre deux distributions tempérées: le paraproduit.

2.2 Espaces de Besov

Donnons une caractérisation des espaces de Besov $B^s \stackrel{\text{déf}}{=} \dot{B}^2_{2,1}$ à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley:

Définition 1.—*Pour $s \in I\!R$, posons $m = -[N/2 + 1 - s]$ et*

$$\|u\|_{B^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} 2^{sq} \|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Si $m < 0$, on définit

$$B^s \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ u \in \mathcal{S}'(I\!R^N) \, \big| \, \|u\|_{B^s} < \infty \quad et \quad u = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \Delta_q u \ dans\ \mathcal{S}'(I\!R^N) \Big\}.$$

Si $m \geq 0$, on note $\mathcal{P}_m[I\!R^N]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus m et on pose

$$B^s \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ u \in \mathcal{S}'(I\!R^N)/\mathcal{P}_m[I\!R^N] \, \big| \, \|u\|_{\dot{B}^s} < \infty \quad et \quad u = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \Delta_q u \ dans\ \mathcal{S}'(I\!R^N)/\mathcal{P}_m[I\!R^N] \Big\}.$$

La définition ci-dessus ne dépend pas de la décomposition de Littlewood-Paley choisie et coïncide avec celle donnée dans la section précédente lorsque $|s| \leq N/2$. Dans certains ouvrages, on donne une définition des espaces de Besov homogènes sans quotienter par une classe de polynômes. On obtient alors un espace de distributions modulo les polynômes, objet qui n'est pas très maniable du point de vue d'un EDPiste. On renvoie à [Bou] pour les détails.

Les espaces de Besov B^s s'injectent dans les espaces de Hölder de la façon suivante:

$$B^s \hookrightarrow \dot{C}^{s - \frac{N}{2}}$$

où la notation $\hookrightarrow$ signifie injection continue et où l'espace de Hölder considéré à droite est homogène. En particulier, $B^{\frac{N}{2}}$ s'injecte dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Par ailleurs, on a l'inégalité d'interpolation suivante pour $s_1, s_2 \in I\!R$, et $\theta \in [0, 1]$:

$$\|u\|_{B^{\theta s_1 + (1-\theta) s_2}} \leq \|u\|^{\theta}_{B^{s_1}} \|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}}.$$

Notations: Soit X un espace de Banach, $T \in]0, +\infty]$ et $r \in [1, +\infty]$. On note $L^r(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions du temps à valeurs dans X mesurables sur $]0, T[$ et telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ soit dans l'espace de Lebesgue $L^r(0, T)$. L'espace $C([0, T]; X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0, T]$ à valeurs dans X.

Désormais C désigne une constante sans importance. On utilisera parfois la notation $A \lesssim B$ au lieu de $A \leq CB$, et $A \approx B$ signifie que $C^{-1} A \leq B \leq CA$.

2.3 Paraproduit

Pour prouver les théorèmes 1, 2 et 3, il est commode d'utiliser quelques rudiments de calcul paradifférentiel. Nous faisons usage du paraproduit et de la décomposition de Bony (introduite dans [Bon]) qui permet de décomposer le produit de deux fonctions tempérées u et v en trois termes:

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v)$$

avec

$$T_u v \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} S_{q-1} u \Delta_q v, \quad T_v u \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} S_{q-1} v \Delta_q u$$

et

$$R(u,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\geq -1} \Delta_q u \left(\Delta_{q-1}+\Delta_q v+\Delta_{q+1}\right) v.$$

Les paraproduits $T_u v$ et $T_v u$ sont toujours définis lorsque u et v sont des distributions tempérées. Bien sûr, le terme de reste $R(u,v)$ n'est défini que lorsque le produit uv l'est, mais il hérite alors à la fois des propriétés de régularité de u et de v. En pratique, l'un des deux termes $T_u v$ ou $T_v u$ peut être considéré comme la partie principale du produit uv.

Donnons à titre d'exemple un résultat de continuité pour le paraproduit et le reste. Nous renvoyons à [RS] pour d'autres résultats du même type.

Proposition 1.— *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\|T_u v\|_{B^s} \lesssim \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^s}.$$

Si $t<0$, on a également

$$\|T_u v\|_{B^{s+t}} \leq \|u\|_{C^t} \|v\|_{B^s}.$$

Enfin si $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $s_1+s_2>0$, alors on a

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2-\frac{N}{2}}} \lesssim \|u\|_{B^{s_1}} \|v\|_{B^{s_2}}.$$

3 Étude du linéarisé

Notons $\nu = \lambda + 2\mu$ et appliquons les projecteurs $\mathcal{P}$, et $\mathcal{Q}$ à la deuxième équation de $(\widetilde{NSC}^\epsilon)$. On obtient

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t b^\epsilon + \frac{\operatorname{div} \mathcal{Q}u^\epsilon}{\epsilon} = F^\epsilon,\\ &\partial_t \mathcal{Q}u^\epsilon - \nu\Delta\mathcal{Q}u^\epsilon + \frac{\nabla b^\epsilon}{\epsilon} = G^\epsilon,\\ &\partial_t \mathcal{P}u^\epsilon - \mu\Delta\mathcal{P}u^\epsilon = H^\epsilon,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned} F^\epsilon &= -\operatorname{div}(b^\epsilon u^\epsilon),\\ G^\epsilon &= -\mathcal{Q}\left(\frac{\epsilon b^\epsilon}{1+\epsilon b^\epsilon}\left(\mu\Delta u^\epsilon + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u^\epsilon\right) - \frac{K(\epsilon b^\epsilon)\nabla b^\epsilon}{\epsilon} - u^\epsilon\cdot\nabla u^\epsilon\right),\\ H^\epsilon &= -\mathcal{P}\left(\frac{\epsilon b^\epsilon}{1+\epsilon b^\epsilon}\left(\mu\Delta u^\epsilon + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u^\epsilon\right) - u^\epsilon\cdot\nabla u^\epsilon\right)\end{aligned}$$

et K fonction régulière s'annulant en 0.

À des termes quadratiques près, la dernière équation se découple des deux autres, et se réduit à une équation de la chaleur à diffusion constante. En revanche, les deux premières équations sont couplées par des termes d'ordre 1 qui deviennent très grands lorsque ϵ tend vers 0. Comme dans le cadre des espaces fonctionnels homogènes, estimer $\mathcal{Q}u^\epsilon$ ou $D^{-1} \operatorname{div} \mathcal{Q}u^\epsilon$ est équivalent, connaître l'évolution de $(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)$ à ϵ petit passe par une étude approfondie du système scalaire suivant:

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t b + \frac{Dd}{\epsilon} = F,\\ &\partial_t d - \nu\Delta d - \frac{Db}{\epsilon} = G.\end{aligned}\right. \tag{LPH^ϵ}$$

Côté Fourier, les valeurs propres de l'opérateur matriciel associé sont

$$\lambda^{\pm}(\xi) = -\frac{\nu|\xi|^2}{2}\left(1 \pm i\sqrt{\frac{4}{\epsilon^2\nu^2|\xi|^2} - 1}\right) \quad \text{si} \quad \nu|\xi|\epsilon < 2,$$
$$\lambda^{\pm}(\xi) = -\frac{\nu|\xi|^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\epsilon^2\nu^2|\xi|^2}}\right) \quad \text{si} \quad \nu|\xi|\epsilon > 2.$$

Dans le régime de basses fréquences, on a pour $\nu\epsilon|\xi| \ll 1$,

$$\lambda^{\pm}(\xi) \sim -\frac{\nu|\xi|^2}{2} \mp \frac{i|\xi|}{\epsilon}.$$

Pour $\nu\epsilon|\xi| \ll 1$, on s'attend donc à un comportement de (LPH^ϵ) très similaire à celui de

$$\frac{d}{dt} - \frac{\nu}{2}\Delta \mp i\frac{D}{\epsilon}.$$

Autrement dit, on hérite à la fois des propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur, et dispersives de l'équation des ondes.

En hautes fréquences, on a pour $\nu\epsilon|\xi| \gg 1$,

$$\lambda^{+}(\xi) \sim -\nu|\xi|^2 \quad \text{et} \quad \lambda^{-}(\xi) \sim -1/(\epsilon^2\nu),$$

et les vecteurs propres correspondants tendent à être très proches de d et de $\epsilon\nu Db$ respectivement.

Un calcul explicite du semi-groupe ou une méthode d'énergie appliquée bloc à bloc après localisation à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley permettent de rendre compte de la plupart des propriétés mises en évidence ci-dessus. Il faut néanmoins prendre garde de travailler au même niveau de régularité pour d et $\epsilon\mu Db$ en hautes fréquences, ce qui nous amène à introduire des normes de Besov "hybrides" où la condition de croissance sur les blocs dyadiques s'exprime différemment en basses et hautes fréquences. On pose

$$\|Z\|_{\widetilde{B}^{s,r}_\eta} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs}\max(\eta, 2^{-q})^{1-\frac{2}{r}}\,\|\Delta_q Z\|_{L^2}.$$

Remarquons que

$$\|Z\|_{\widetilde{B}^{s,2}_\eta} = \|Z\|_{B^s} \quad \text{et} \quad \|Z\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\eta} \approx \|Z\|_{B^{s-1}} + \eta\|Z\|_{B^s}.$$

Dans [Da1], on prouve l'estimation ci-dessous:

Proposition 2.—*Pour tout $T \in [0, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, on a*

$$\|b\|_{L^r_T(\widetilde{B}^{s,r}_{\epsilon\mu})} + \|d\|_{L^r_T(B^{s-1+\frac{2}{r}})} \lesssim \|b_0\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_{\epsilon\mu}} + \|d_0\|_{B^{s-1}} + \|F\|_{L^1_T(\widetilde{B}^{s,\infty}_{\epsilon\mu})} + \|G\|_{L^1_T(B^{s-1})}.$$

De la proposition 2, on tire en particulier l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\|b\|_{L^2_T(B^s)} + \|d\|_{L^1_T(B^{s+1})} + \epsilon\|b\|_{L^\infty_T(B^s)} + \|b\|_{L^\infty_T(B^{s-1})} + \|d\|_{L^\infty_T(B^{s-1})}&\\ \lesssim \|b_0\|_{B^{s-1}} + \epsilon\|b_0\|_{B^s} + \|d_0\|_{B^{s-1}} + \|F\|_{L^1_T(B^{s-1})} + \epsilon\|F\|_{L^1_T(B^s)} + \|G\|_{L^1_T(B^{s-1})}.&\end{aligned}$$

Il ne paraît pas utopique d'obtenir un contrôle uniforme sur la solution (b^ϵ, u^ϵ) à l'aide des estimations ci-dessus et des propriétés de l'équation de la chaleur. En revanche, on ne peut clairement pas obtenir ainsi la convergence forte vers 0 de $(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)$. Cette convergence découle en fait des propriétés dispersives en basses fréquences de (LPH^ϵ), propriétés qui sont invisibles dans les estimations de la proposition 2 qui sont construites sur L^2. Pour les exploiter, nous allons "oublier" le terme visqueux du système (LPH^ϵ) et utiliser (comme l'ont déjà fait B. Desjardins et E. Grenier dans [DG]) les inégalités de Strichartz pour le système des ondes acoustiques:

$$(W^\epsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t b + \dfrac{Dd}{\epsilon} = F, \\ \partial_t d - \dfrac{Db}{\epsilon} = G. \end{cases}$$

En effet, on a pour $N \geq 4$:

$$(4) \qquad \|(b,d)\|_{L^2_T(L^\infty)} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} \Big(\|(b_0, d_0)\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}} + \|(F,G)\|_{L^1(B^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}})} \Big).$$

Plus généralement, en n'importe quelle dimension $N \geq 2$, on dispose de toute une panoplie d'inégalités du type (4) (voir [S], [GV], et [Da3, prop. 7.1] pour l'adaptation au système des ondes acoustiques). Insistons sur le fait que ces inégalités sont bien spécifiques au cas de l'espace entier.

À quelques détails techniques près, les théorèmes 1, 2 et 3 reposent uniquement sur la proposition 2 et l'inégalité (4).

4 Preuve sommaire

Dans cette partie, nous donnons les idées principales conduisant au théorème 2. On renvoie à [Da3] pour la preuve du théorème 3 (qui est en fait plus simple, une fois admis le point 3) du théorème 1).

Partons de données initiales vérifiant les hypothèses du théorème 2, et supposons que le système limite a une solution $v \in F^{\frac{N}{2}}_{T_0} \cap F^{\frac{N}{2}+\alpha}_{T_0}$ pour un T_0 éventuellement infini[1].
La preuve du théorème 2 se fait en cinq temps:

1) Existence locale d'une solution dans l'espace $E^{\frac{N}{2}}_{T^\epsilon,\epsilon\nu} \cap E^{\frac{N}{2}+\alpha}_{T^\epsilon,\epsilon\nu}$ pour un $T^\epsilon > 0$.
2) Estimations *a priori* (uniformes pour ϵ petit) dans l'espace ci-dessus.
3) Convergence vers 0 de la partie compressible $(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)$ dans un espace de type $L^2(0, T^\epsilon; L^\infty)$.
4) Convergence de $\mathcal{P}u^\epsilon$ vers v dans $F^{\frac{N}{2}}_{T^\epsilon} \cap F^{\frac{N}{2}+\alpha}_{T^\epsilon}$
5) Bootstrap et argument de continuité.

Pour éviter au maximum les détails techniques fastidieux, nous supposerons désormais que $N \geq 4$ et $\alpha = 1/2$. Nous pourrons ainsi appliquer l'inégalité de Strichartz (4). Le cas général $N \geq 2$ et $\alpha > 0$ est traité dans [Da3].

Première étape: Existence locale dans $E^{\frac{N}{2}}_{T^\epsilon,\epsilon\nu} \cap E^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}_{T^\epsilon,\epsilon\nu}$.

Elle est assurée par le théorème 1. Si ϵ est suffisamment petit, on a de plus (par injection de Sobolev) $\epsilon \|b_0\|_{L^\infty} \leq 1/4$, et on peut donc supposer, quitte à diminuer T^ϵ, que $\epsilon|b(t,x)| \leq 1/2$ pour $t \in [0, T^\epsilon]$. Bien sûr, rien n'empêche a priori T^ϵ de tendre vers 0 avec ϵ. Il faudra donc prouver à la fois que $T^\epsilon \geq T_0$ pour ϵ assez petit, et que la solution (b^ϵ, u^ϵ) vérifie certaines estimations uniformes en ϵ et converge vers $(0, v)$. Toutes ces propriétés sont étroitement liées.

[1] L'existence d'un tel T_0 est assurée par les résultats d'existence standards pour (NSI).

Deuxième étape: Estimations uniformes.

Il s'agit de prouver la proposition suivante (voir [Da4] pour un énoncé un peu plus général dans les espaces de Sobolev):

Proposition 3.— *Soit $\epsilon > 0$ et $(b^\epsilon, u^\epsilon) \in E^{\frac{N}{2}}_{\epsilon\nu,T} \cap E^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}_{\epsilon\nu,T}$ une solution de $(\widetilde{NSC}^\epsilon)$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que des paramètres N, λ, μ et de la loi de pression telle que pour $s \in [N/2, N/2+1/2]$ et $t \in [0,T]$ on ait*

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & \|b^\epsilon(t)\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_{\epsilon\mu}} + \|u^\epsilon(t)\|_{B^{s-1}} + \int_0^t \Big(\|b^\epsilon(\tau)\|_{\widetilde{B}^{s,1}_{\epsilon\mu}} + \|u^\epsilon(\tau)\|_{B^{s+1}} \Big)\, d\tau \\
& \le C e^{CV_\epsilon(t)} \bigg(\|b_0\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_{\epsilon\mu}} + \|u_0\|_{B^{s-1}} + \int_0^t \Big(\|f(\tau)\|_{B^{s-1}} + \epsilon \|b^\epsilon(\tau)\|_{L^\infty} \|u^\epsilon(\tau)\|_{B^{s+1}} \Big)\, d\tau \bigg),
\end{aligned}
$$

avec

$$
V_\epsilon(t) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t \Big(\|u^\epsilon(\tau)\|^2_{L^\infty} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|\nabla u^\epsilon(\tau)\|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty} + \|b^\epsilon(\tau)\|^2_{L^\infty} \Big)\, d\tau.
$$

Preuve: En remarquant que

$$
\widetilde{b}(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \epsilon b^\epsilon(\epsilon^2 t, \epsilon x), \qquad \widetilde{u}(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \epsilon u^\epsilon(\epsilon^2 t, \epsilon x)
$$

est solution de $(\widetilde{NSC}^1)$ avec données

$$
\widetilde{u}_0(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \epsilon u_0(\epsilon x), \qquad \widetilde{b}_0(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \epsilon b_0(\epsilon x) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(t,x) \overset{\text{déf}}{=} \epsilon^3 f(\epsilon^2 t, \epsilon x),
$$

on peut se ramener au cas $\epsilon = 1$, et on désignera simplement par (b,u) la solution considérée.

La proposition 3 se prouve alors par une méthode d'énergie appliquée au système $(\widetilde{NSC}^1)$ localisé en fréquences dyadiques grâce à la décomposition de Littlewood-Paley. Il s'agit de contrôler la quantité $2^{q(s-1)}k_q$ où l'on note

$$
k_q = \sqrt{\|\Delta_q b\|^2_{L^2} + \|\Delta_q u\|^2_{L^2}} \quad \text{si} \quad 2^q\nu < 2,
$$

$$
k_q = \sqrt{\|\nu\nabla\Delta_q b\|^2_{L^2} + \|\Delta_q u\|^2_{L^2}} \quad \text{si} \quad 2^q\nu \ge 2.
$$

Le linéarisé (LPH^1) de la partie compressible de $(\widetilde{NSC}^1)$ n'est pas diagonal en (b,u), si bien qu'une méthode d'énergie directe ne permet pas de majorer correctement $2^{q(s-1)}k_q$. On peut diagonaliser "à la main" bloc à bloc et étudier des quantités équivalentes à k_q faisant intervenir de plus le produit scalaire (au sens L^2) $(\nu\nabla\Delta_q b|\Delta_q u)$. Considérons par exemple f_q défini par

$$
f_q = \sqrt{\|\Delta_q b\|^2_{L^2} + \|\Delta_q u\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}(\nu\nabla\Delta_q c|\Delta_q v)} \quad \text{si} \quad 2^q\nu < 2,
$$

$$
f_q = \sqrt{\|\nu\nabla\Delta_q b\|^2_{L^2} + 2\|\Delta_q u\|^2_{L^2} + 2(\nu\nabla\Delta_q b|\Delta_q u)} \quad \text{si} \quad 2^q\nu \ge 2.
$$

Si l'on suit la preuve de [Da1,Prop. 2.3], on n'obtient pas tout à fait l'estimation voulue. En effet, les termes de convection vérifient des inégalités du type

$$\left|\left(\Delta_q(u\cdot\nabla b)|\Delta_q b\right)\right| \lesssim c_q 2^{-q(s-1)}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{2}}}\|b\|_{B^{s-1}}\|\Delta_q b\|_{L^2} \tag{6}$$

avec $\sum_q c_q \leq 1$, ce qui fera apparaître *in fine* un terme $\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{2}}}$ dans l'expression de $V_\epsilon(t)$ au lieu de $\|\nabla u\|_{L^\infty}$.

On se heurte d'ailleurs à un obstacle tout à fait similaire lorsque l'on veut prouver que les solutions de Navier-Stokes incompressibles sont régulières tant que $\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,d\tau$ reste fini (voir [BKM]). Une application trop hâtive de (6) avec $b=u=v$ fera apparaître $\|\nabla v\|_{B^{\frac{N}{2}}}$ au lieu de $\|\nabla v\|_{L^\infty}$.

Dans notre cas, l'utilisation du paraproduit sera le remède à nos maux. Considérons une paralinéarisation de $(\widetilde{NSC}^1)$:

$$\begin{cases}\partial_t c+\partial_j T_{z^j}c+\operatorname{div} v=F,\\ \partial_t v+T_{z^j}\partial_j v-\mu\Delta v-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div} v+\nabla c=G\end{cases} \tag{PL}$$

Dans [Da3] et [Da4], nous obtenons le résultat suivant:

Proposition 4.—*Soit $s\in I\!R$ et (c,v) une solution de (PL). Il existe une constante C ne dépendant que de N, λ, μ et s, et telle que l'on ait*

$$\begin{aligned}\|c(t)\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\mu}+\|v(t)\|_{B^{s-1}}+\int_0^t\Big(\|c(\tau)\|_{\widetilde{B}^{s,1}_\mu}+\|v(\tau)\|_{B^{s+1}}\Big)\,d\tau\\ \leq Ce^{C\widetilde{V}(t)}\bigg(\|c_0\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\mu}+\|v_0\|_{B^{s-1}}+\int_0^t\Big(\|F(\tau)\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\mu}+\|G(\tau)\|_{B^{s-1}}\Big)\,d\tau\bigg),\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{V}(t)\overset{\text{déf}}{=}\int_0^t\Big(\|z(\tau)\|_{L^\infty}^2+\|\nabla z(\tau)\|_{L^\infty}^{\frac{4}{3}}\Big)\,d\tau.$$

Cette proposition se prouve en estimant les quantités f_q définies plus haut et en remarquant que les termes de convection "paralinéarisés" vérifient (par exemple)

$$\left|\left(\Delta_q(T_{z^j}\partial_j c)|\Delta_q c\right)\right|\lesssim\|\nabla z\|_{L^\infty}\|\Delta_q c\|_{L^2}\sum_{|q'-q|\leq 3}\|\Delta_{q'}c\|_{L^2}.$$

Une application directe du lemme de Gronwall fera alors apparaître un terme $\exp(\int_0^t\|\nabla z(\tau)\|_{L^\infty}\,d\tau)$ dans l'estimation, ce qui n'est pas tout à fait ce que l'on veut (on verra plus tard pourquoi il est justement important de ne pas avoir de norme L^1 en temps).

On peut en fait aisément remplacer la norme L^1 par une norme L^p grâce à l'inégalité de Young. Pour simplifier, montrons comment procéder dans le cas d'une inégalité différentielle ordinaire.

Supposons que l'on ait l'inégalité suivante avec $\kappa>0$, et f, a, Z fonctions positives et bornées:

$$Z'(t)+\kappa Z(t)\leq a(t)Z(t)+f(t).$$

Grâce à l'inégalité de Young, on a

$$a(t)\leq a^p(t)\kappa^{1-p}/p+(p-1)\kappa/p$$

donc,

$$Z'(t)+\frac{\kappa}{p}Z(t)\le a^p(t)\frac{\kappa^{1-p}}{p}Z(t)+f(t).$$

Grâce au lemme de Gronwall, on conclut finalement à

$$Z(t)+\frac{\kappa}{p}\int_0^t Z(\tau)\,d\tau\le e^{\frac{\kappa}{p\kappa^p}\int_0^t a^p(\tau)\,d\tau}\biggl(Z(0)+\int_0^t e^{-\frac{\kappa}{p\kappa^p}\int_0^\tau a^p(\tau')\,d\tau'}f(\tau)\,d\tau\biggr).$$

Grâce à la proposition 4, on obtient l'inégalité suivante pour (b,u):

$$\begin{aligned}
&\|b(t)\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\mu}+\|u(t)\|_{B^{s-1}}+\int_0^t\Bigl(\|b(\tau)\|_{\widetilde{B}^{s,1}_\mu}+\|u(\tau)\|_{B^{s+1}}\Bigr)\,d\tau\\
&\qquad\le Ce^{C\int_0^t\left(\|u(\tau)\|^2_{L^\infty}+\|\nabla u(\tau)\|^{\frac43}_{L^\infty}\right)d\tau}\Bigl(\|b_0\|_{\widetilde{B}^{s,\infty}_\nu}+\|u_0\|_{B^{s-1}}+\|f\|_{L^1_t(B^{s-1})}\\
&\qquad\quad+\|\partial_j T'_b u\|_{L^1_t(\widetilde{B}^{s,\infty}_\nu)}+\|T'_{\partial_j u}u\|_{L^1_t(B^{s-1})}+\|(b/(1+b))\Delta u\|_{L^1_t(B^{s-1})}+\|K(b)\nabla b\|_{L^1_t(B^{s-1})}\Bigr).
\end{aligned}$$

En appliquant la proposition 1 et des estimations de composition classiques, puis l'inégalité de Young et le lemme de Gronwall, on obtient la proposition 3. $\square$

Remarquons que la proposition 3 ne donne d'estimations uniformes pour la solution (b^ϵ,u^ϵ) dans $E^{\frac N2}_{T^\epsilon,\epsilon\nu}\cap E^{\frac N2+\frac12}_{T^\epsilon,\epsilon\nu}$ (pour ϵ petit) que si la quantité $V_\epsilon(t)$ reste bornée. Il faut donc montrer que les contributions de b^ϵ et u^ϵ dans $L^2(0,T;L^\infty)$ restent bornées quand ϵ tend vers 0. Ce résultat fait l'objet des deux étapes suivantes de la preuve.

Troisième étape: Convergence de $(b^\epsilon,\mathcal{Q}u^\epsilon)$ vers 0 dans l'espace $L^2(0,T;L^\infty)$.

Nous avons vu que $(b^\epsilon,\mathcal{Q}u^\epsilon)$ vérifiait

$$\begin{cases}\partial_t b^\epsilon+\dfrac{\operatorname{div}\mathcal{Q}u^\epsilon}{\epsilon}=F^\epsilon,\\[2mm]\partial_t\mathcal{Q}u^\epsilon+\dfrac{\nabla b^\epsilon}{\epsilon}=G^\epsilon,\end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned}
F^\epsilon&=-\operatorname{div}(b^\epsilon u^\epsilon),\\
G^\epsilon&=-\nu\Delta\mathcal{Q}u^\epsilon+\mathcal{Q}\biggl(\frac{\mu\Delta u^\epsilon+(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}u^\epsilon}{1+\epsilon b^\epsilon}-K(\epsilon b^\epsilon)\nabla b^\epsilon-u^\epsilon\cdot\nabla u^\epsilon\biggr).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Strichartz (4), on a

$$\|(b^\epsilon,\mathcal{Q}u^\epsilon)\|_{L^2_T(L^\infty)}\lesssim\epsilon^{\frac12}\Bigl(\|(b_0,\mathcal{Q}u_0)\|_{B^{\frac N2-\frac12}}+\|(F^\epsilon,G^\epsilon)\|_{L^1_T(B^{\frac N2-\frac12})}\Bigr).$$

Des estimations de produit et de composition classiques dans les espaces de Besov permettent de prouver que

$$\|F^\epsilon\|_{L^1_T(B^{\frac N2-\frac12})}\lesssim\|b^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2+\frac12})}\|u^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2})}+\|u^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2+\frac12})}\|b^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2})},$$

$$\begin{aligned}
\|G^\epsilon\|_{L^1_T(B^{\frac N2-\frac12})}&\lesssim\|u^\epsilon\|_{L^1_T(B^{\frac N2+\frac32})}\bigl(1+\epsilon\|b^\epsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac N2})}\bigr)\\
&\quad+\|b^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2+\frac12})}\|b^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2})}+\|u^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2+\frac12})}\|u^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac N2})},
\end{aligned}$$

et donc

$$\|(F^\epsilon,G^\epsilon)\|_{L^1_T(B^{\frac N2-\frac12})}\lesssim\|(b^\epsilon,u^\epsilon)\|_{E^{\frac N2+\frac12}_{\epsilon\nu,T}}\Bigl(1+\|(b^\epsilon,u^\epsilon)\|_{E^{\frac N2}_{\epsilon\nu,T}}\Bigr)$$

ce qui donne une convergence dominée par $\epsilon^{\frac12}$ pourvu que l'on dispose d'un contrôle de la solution dans l'espace $E^{\frac N2}_{T,\epsilon\nu}\cap E^{\frac N2+\frac12}_{T,\epsilon\nu}$.

Quatrième étape: Convergence de $\mathcal{P}u^\epsilon$ vers v dans $F^{\frac{N}{2}}_{T^\epsilon}\cap F^{\frac{N}{2}+\frac12}_{T^\epsilon}$.

La différence $w^\epsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}u^\epsilon - v$ vérifie l'équation de la chaleur suivante:

$$\partial_t w^\epsilon + \mathcal{P}\left(A^\epsilon\cdot\nabla w^\epsilon\right)+\mathcal{P}\left(w^\epsilon\cdot\nabla A^\epsilon\right)-\mu\Delta w^\epsilon=-\mathcal{P}K^\epsilon$$

avec $A^\epsilon = \mathcal{Q}u^\epsilon + v$ et

$$K^\epsilon=\mathcal{Q}u^\epsilon\cdot\nabla v+v\cdot\nabla\mathcal{Q}u^\epsilon+w^\epsilon\cdot\nabla w^\epsilon+\frac{\epsilon b^\epsilon}{1+\epsilon b^\epsilon}\Big(\mu\Delta u^\epsilon+(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}u^\epsilon\Big).$$

Comme $w^\epsilon_{|t=0}=0$, on a d'après [Da3, Prop. 7.4] pour $s\in\{N/2, N/2+1/2\}$,

$$\|w^\epsilon(t)\|_{B^{s-1}}+\mu\int_0^t\|w^\epsilon(\tau)\|_{B^{s+1}}\,d\tau\le e^{C\int_0^t\|A^\epsilon(\tau)\|_{B^{\frac{N}{2}+1}}\,d\tau}\int_0^t\|K^\epsilon(\tau)\|_{B^{s-1}}\,d\tau.$$

Nous souhaitons utiliser cette inégalité pour majorer w^ϵ par une puissance de ϵ.

Clairement, le terme exponentiel est borné tant que l'on dispose d'estimations uniformes dans $E^{\frac{N}{2}}_{\epsilon\nu,T^\epsilon}$ sur la solution. Il suffit donc de majorer convenablement $\|K^\epsilon\|_{L^1_T(B^{s-1})}$ pour $s\in\{N/2,N/2+1/2\}$. Le dernier terme de l'expression de K^ϵ est visiblement petit: en effet, sous l'hypothèse $\epsilon\|b^\epsilon\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\le 1/2$, on a

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\epsilon b^\epsilon}{1+\epsilon b^\epsilon}\partial_i\partial_j u^\epsilon\Big\|_{L^1_T(B^{s-1})}&\lesssim \epsilon\|b^\epsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{2}})}\|\partial_i\partial_j u^\epsilon\|_{L^1_T(B^{s-1})},\\ &\lesssim \epsilon^{\frac12}\|b^\epsilon\|_{L^\infty_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+\frac12,\infty}_{\epsilon\nu})}\|u^\epsilon\|_{L^1_T(B^{s+1})}.\end{aligned}$$

L'avant-dernier terme est quadratique en w^ϵ, et pourra donc être absorbé par le membre de gauche.

Prouver que les termes $\mathcal{Q}u^\epsilon\cdot\nabla v$ et $v\cdot\nabla\mathcal{Q}u^\epsilon$ sont petits dans $L^1(0,T;B^{s-1})$ est un peu plus délicat. L'étape 3 permet bien d'affirmer que $\mathcal{Q}u^\epsilon$ est dominé par $\epsilon^{\frac12}$, mais dans l'espace $L^2(0,T;L^\infty)$ seulement. En particulier, il n'y a aucune raison pour que $\mathcal{Q}u^\epsilon$ soit petit dans un espace du type $L^r(0,T;B^\sigma)$.

Pour y remédier, on peut utiliser une variante de la décomposition de Bony:

$$Qu^\epsilon\cdot\nabla v=\underbrace{\sum_{q\in\mathbb{Z}}\Delta_q\mathcal{Q}u^\epsilon\cdot S_{q-1+[\log_2\eta]}\nabla v}_{T_1}+\underbrace{\sum_{q\in\mathbb{Z}}S_{q+2-[\log_2\eta]}\mathcal{Q}u^\epsilon\cdot\Delta_q\nabla v}_{T_2}$$

où le (petit) paramètre $\eta\le 1$ sera fixé ultérieurement.

Comme $B^{\frac{N}{2}-\frac12}$ s'injecte continûment dans $\dot{C}^{-\frac12}$, on a pour tout $p\in\mathbb{Z}$,

$$\|S_p\nabla v\|_{L^\infty}\lesssim 2^{\frac{p}{2}}\|\nabla v\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac12}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\big\|\Delta_q\mathcal{Q}u^\epsilon\cdot S_{q-1+[\log_2\eta]}\nabla v\big\|_{L^2}&\le\|\Delta_q\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^2}\,\big\|S_{q-1+[\log_2\eta]}\nabla v\big\|_{L^\infty},\\ &\lesssim \eta^{\frac12}2^{\frac{q}{2}}\|\nabla v\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac12}}\,\|\Delta_q\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Comme, grâce à (2), chaque terme $\Delta_q \mathcal{Q}u^\epsilon \cdot S_{q-1+[\log_2 \eta]}\nabla v$ est localisé en fréquences dans une couronne de type $C(0, R_1 2^q, R_2 2^q)$ avec R_1 et R_2 indépendants de η, on conclut que

(7) $$\|T_1\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac12}} \lesssim \eta^{\frac12} \|v\|_{B^{\frac{N}{2}+\frac12}} \|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{B^{\frac{N}{2}}}.$$

Grâce à (2), on a aussi pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta_p T_2 = \sum_{q \geq p-2+[\log_2 \eta]} \Delta_p\big(S_{q+2-[\log_2 \eta]}\mathcal{Q}u^\epsilon \cdot \Delta_q \nabla v\big).$$

Donc

$$\begin{aligned} 2^{p(\frac{N}{2}-\frac12)} \|\Delta_p T_2\|_{L^2} &\lesssim 2^{p(\frac{N}{2}-\frac12)} \|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^\infty} \sum_{q \geq p-2+[\log_2 \eta]} \|\Delta_q \nabla v\|_{L^2}, \\ &\lesssim \eta^{\frac12-\frac{N}{2}} \|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac12}} \end{aligned}$$

En conséquence,

(8) $$\|T_2\|_{B^{\frac{N}{2}-\frac12}} \lesssim \eta^{\frac12-\frac{N}{2}} \|v\|_{B^{\frac{N}{2}+\frac12}} \|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^\infty}.$$

En choisissant $\eta = \epsilon^{\frac{1}{N}}$, on conclut de (7) et (8) que

$$\|Qu^\epsilon \cdot \nabla v\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{2}-\frac12})} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2N}} \|v\|_{L^2_T(B^{\frac{N}{2}+\frac12})} \Big(\|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^2_T(B^{\frac{N}{2}})} + \epsilon^{-\frac12}\|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^2_T(L^\infty)}\Big).$$

Enfin, n'oublions pas que d'après la troisième étape, $\epsilon^{-\frac12}\|\mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^2_T(L^\infty)}$ est borné. L'inégalité ci-dessus montre donc que $\|Qu^\epsilon \cdot \nabla v\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{2}-\frac12})}$ est dominé par $\epsilon^{\frac{1}{2N}}$.

Le terme $\|v \cdot \nabla \mathcal{Q}u^\epsilon\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{2}-\frac12})}$ se majore par une méthode similaire.

On peut majorer $\mathcal{Q}u^\epsilon \cdot \nabla v$ et $v \cdot \nabla \mathcal{Q}u^\epsilon$ dans $L^1(0,T; B^{\frac{N}{2}-1})$ de façon analogue et conclure à un contrôle de w^ϵ par $\epsilon^{\frac{1}{2N}}$ dans l'espace $F^{\frac{N}{2}}_{T^\epsilon} \cap F^{\frac{N}{2}+\frac12}_{T^\epsilon}$.

Dernière étape: Bootstrap et argument de continuité.

Cette dernière étape consiste à montrer que pour ϵ suffisamment petit, on peut choisir $T^\epsilon \geq T_0$ et que par la même occasion les estimations des étapes 2, 3 et 4 ne dépendent plus que des données initiales, et de v. Faire cette étape de façon rigoureuse n'a qu'un intérêt médiocre et nous renvoyons donc à [Da3] pour les détails. Donnons juste quelques arguments heuristiques permettant de justifier le bootstrap.

Nous avons déjà vu qu'une borne uniforme sur la solution dans $E^{\frac{N}{2}}_{T_0,\epsilon\nu} \cap E^{\frac{N}{2}+\frac12}_{T_0,\epsilon\nu}$ permettait de montrer la convergence dans les étapes 3 et 4.

Réciproquement, si l'on admet que $(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)$ est contrôlé par $\epsilon^{\frac12}$ dans $L^2(0,T;L^\infty)$, et que $\mathcal{P}u^\epsilon - v$ est contrôlé par une puissance de ϵ dans $F^{\frac{N}{2}}_T \cap F^{\frac{N}{2}+\alpha}_T$, on obtient un contrôle uniforme de la solution entière (b^ϵ, u^ϵ) dans $E^{\frac{N}{2}}_{T,\epsilon\nu} \cap E^{\frac{N}{2}+\frac12}_{T,\epsilon\nu}$.

En effet, il s'agit essentiellement de vérifier que $V^\epsilon(t)$ peut être majoré indépendamment de ϵ. Or (b^ϵ, u^ϵ) est uniformément borné dans $L^2(0,T;L^\infty)$ car

$$\|(b^\epsilon, u^\epsilon)\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq \|(b^\epsilon, \mathcal{Q}u^\epsilon)\|_{L^2_T(L^\infty)} + \|\mathcal{P}u^\epsilon - v\|_{L^2_T(L^\infty)} + \|v\|_{L^2_T(L^\infty)}.$$

Par hypothèse, les deux premiers termes du membre de droite sont dominés par des puissances de ϵ, et le dernier terme est fini pour $T \leq T_0$.

Par ailleurs, par interpolation et injection de Sobolev,

$$\|\nabla u^\epsilon\|_{L_T^{\frac{4}{3}}(L^\infty)} \lesssim \|\nabla u^\epsilon\|^{\frac{3}{4}}_{L^1_T(B^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}})} \|\nabla u^\epsilon\|^{\frac{1}{4}}_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{2}-\frac{3}{2}})} \lesssim \|u^\epsilon\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{2}+\frac{3}{2}})} + \|u^\epsilon\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}})}.$$

On conclut donc que le terme $\epsilon^{\frac{2}{3}}\|\nabla u^\epsilon\|_{L_T^{\frac{4}{3}}(L^\infty)}$ peut être absorbé par le membre de gauche de (5) pour ϵ petit. $\square$

Remarque: Il n'est pas possible de prouver une estimation de type (4) pour les normes L^1 en temps, à moins d'introduire une dépendance en T dans la majoration (ce qui ôte toute possibilité de traiter le cas $T_0 = +\infty$).

Il est donc vraiment essentiel que n'apparaissent pas de normes L^1 en temps dans l'expression de $V^\epsilon(t)$ de l'inégalité (5).

Références bibliographiques

[AT] P. Auscher et P. Tchamitchian: Espaces critiques pour le système des équations de Navier-Stokes incompressibles, Prépublication de l'*Université de Picardie Jules Verne* (1999).

[BKM] J. Beale, T. Kato et A. Majda: Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, *Communications in Mathematical Physics*, **94**, pages 61–66 (1984).

[Bon] J.-M. Bony: Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **14**, pages 209–246 (1981).

[Bou] G. Bourdaud: Réalisations des espaces de Besov homogènes, *Arkiv för matematik*, **26**, pages 41–54 (1988).

[Da1] R. Danchin: Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Inventiones Mathematicae*, **141**, pages 579–614 (2000).

[Da2] R. Danchin: Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases, to appear in *Communications in Partial Differential Equation.*

[Da3] R. Danchin: Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, to appear in *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.*

[Da4] R. Danchin: Zero Mach number limit for compressible Navier-Stokes equations with periodic boundary conditions, travail en cours.

[DG] B. Desjardins and E. Grenier: Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space, *Royal Society of London Proceedings, Series A*, **455 (1986)**, pages 2271–2279 (1999).

[DGLM] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions and N. Masmoudi: Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **78**, pages 461–471 (1999).

[FK] H. Fujita and T. Kato: On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269–315 (1964).

[G] I. Gallagher: A remark on smooth solutions of the weakly compressible periodic Navier-Stokes equations, prépublication Université Paris-Sud, Mathématiques (1999).

[GV] J. Ginibre and G. Velo: Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *Journal of Functional Analysis*, **133**, pages 50–68 (1995).

[HL] T. Hagstrom and J. Lorenz: All-time existence of classical solutions for slightly compressible flows, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **29**, pages 652–672 (1998).

[Ho] D. Hoff: The zero-Mach limit of compressible flows, *Communications in Mathematical Physics*, **192**, pages 543–554 (1998).

[KM] S. Klainerman and A. Majda: Compressible and incompressible fluids, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **35**, pages 629–651 (1982).

[KLN] H.-0. Kreiss, J. Lorenz and M. Naughton: Convergence of the solutions of the compressible to the solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **12**, pages 187–214 (1991).

[Le] J. Leray: Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, *Acta mathematica*, **63**, pages 193–248 (1934).

[Li1] P.-L. Lions: Mathematical topics in fluid mechanics, vol. 1, incompressible models (1996).

[Li2] P.-L. Lions: Mathematical topics in fluid mechanics, vol. 2, compressible models (1998).

[LM1] P.-L. Lions, N. Masmoudi: Incompressible limit for a viscous compressible fluid, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **77**, pages 585–627 (1998).

[LM2] P.-L. Lions, N. Masmoudi: Une approche locale de la limite incompressible, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I*, **329**, pages 387–392 (1999).

[M] Y. Meyer: Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations. Current developments in mathematics, (Cambridge, MA), Int. Press, Boston, pages 105–212 (1996).

[RS] T. Runst and W. Sickel: Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 3. Walter de Gruyter & Co., Berlin (1996).

[St] R. Strichartz: Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Mathematical Journal*, **44**, pages 705–774 (1977).