SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Gilles Lebeau

Régularité du problème de Kelvin-Helmholtz pour l'équation d'Euler 2d

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° II, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Régularité du problème de Kelvin-Helmholtz pour l'équation d'Euler 2d

Gilles Lebeau
Centre de Mathématiques
École Polytechnique

"Je hais le mouvement qui déplace les lignes"

1 Introduction et résultat

L'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\nabla p \ , \ \operatorname{div}(u) = 0 \tag{1}$$

où $u(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteur dans le plan et où $p(t, x, y) \in \mathbb{R}$ désigne la pression, décrit l'évolution temporelle de la vitesse $u(t, x, y)$ de la particule qui à l'instant t occupe la position (x, y).

Dans (1), le terme $u.\nabla$ désigne le champ de vecteur $u_x\partial_x + u_y\partial_y$ où (u_x, u_y) sont les coordonnées cartésiennes de u. La condition d'incompressibilité $\operatorname{div}(u) = 0$ permet de réécrire le terme $u.\nabla u$ sous la forme

$$u.\nabla u = \begin{cases} \partial_x(u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) \\ \partial_x(u_x u_y) + \partial_y(u_y^2) \end{cases} \tag{2}$$

ce qui permet de définir des solutions faibles de l'équation d'Euler sous la seule condition de régularité $u \in L^\infty_{\text{loc}}(t, L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$.

Les quantités formellement conservées pour (1) sont
• l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dxdy$
• le tourbillon $\omega(t, x, y) = \partial_x u_y - \partial_y u_x$ qui est constant le long des trajectoires des particules, i.e. vérifie

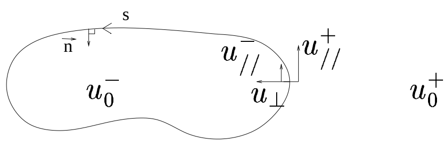
$$\partial_t\omega + u.\nabla\omega = 0 \tag{3}$$

Le problème de Kelvin-Helmholtz des nappes de tourbillon consiste à comprendre la structure des solutions de (1) dont la donnée à $t = 0, u_0(x, y) = u(0, x, y)$ vérifie

$$\text{rot}(u_0) = \omega_0 = g_0(s)\delta_{\Sigma_0} \quad \text{div}u_0 = 0 \tag{4}$$

où Σ_0 est une courbe fermée simple dans le plan, paramétrée par l'abscisse curviligne s, δ_{Σ_0} désignant la mesure d'intégration sur Σ_0, et où la densité $g_0(s)$ vérifie

$$\exists c_0 > 0 \quad \forall s \quad c_0 \leq g_0(s) \leq 1/c_0 \tag{5}$$



En notant $u_0^\pm$ les restrictions de u aux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ qui vérifient $\Delta u_0^\pm = 0$, et par $[u_\perp], [u_{//}]$ les sauts des composantes perpendiculaires et tangentielles de u le long de Σ_0 on a

$$[u_\perp] = 0 \ , \ [u_{//}] = g_0 = u_{//}^+ - u_{//}^- \tag{6}$$

Rappelons deux résultats connus sur ce problème : existence de solutions faibles et persistence de la structure nappes de tourbillons en temps petit si les données sont analytiques.

Théorème 1 *(J-M Delort 1990) L'équation (1) avec donnée de Cauchy $u_0 \in L^2$ tel que $\omega_0 = \text{rot}(u_0) \in H^{-1} \cap \mathcal{M}_+$ admet au moins une solution faible. ($\mathcal{M}_+$ désigne l'espace des mesures positives)*

Théorème 2 *(C. Bardos, U. Frisch, C. et P. Sulem 1981) Soit u_0 vérifiant $\omega_0 = \text{rot}(u_0) = g_0(s)\delta_{\Sigma_0}$, où Σ_0 et g_0 sont analytiques. Alors il existe $T_* > 0$ tel que (1) possède une unique solution $u(t, x, y)$, $t \in]-T_*, T_*[$, t.q. $\text{rot}(u(t, .)) = g(t, .)\delta_{\Sigma_t}$ avec $\{(t, x, y); (x, y) \in \Sigma_t\}$ et g analytiques.*

Remarques : Le th.2 prouve la conjecture de Garrett Birkhoff ; On trouvera aussi dans [2] la preuve du résultat analogue en dimension 3.

Le résultat suivant indique que le problème de Kelvin-Helmholtz est mal posé au sens de Hadamard dans la catégorie des nappes de tourbillons, i.e. ses seules solutions sont celles décrites par le théorème 2.

Théorème 3 *Soit $\Sigma \subset (]T_-, T_+[\times\mathbb{R}^2)$ une hypersurface de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\Sigma = \{t, (x, y) \in \Sigma_t\}$ où Σ_t est une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$. On suppose*

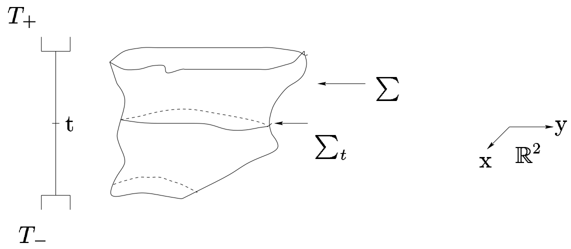
Σ de classe $C^{1+\rho_0}$ pour un $\rho_0 \in]0,1[$. Soit $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]-T,T[; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ une solution faible de (1) vérifiant

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}(u) = \omega(t,x,y) = g(t,s)\delta_{\Sigma_t}; \\ \lim\limits_{|x,y|\to\infty} u(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

où la densité g vérifie

$$\text{(8)} \qquad \exists c_0 > 0 \quad \forall (t,s) \quad c_0 \le g(t,s) \le 1/c_0$$

Alors Σ et g sont analytiques.



2 L'équation de Garrett Birkhoff

Soit u solution faible de l'équation d'Euler vérifiant les hypothèses du théorème 3. On note

$$\text{(9)} \qquad (t,s) \mapsto (t, M(t,s)) \in \mathbb{R}^3$$

une paramétrisation de l'hypersurface Σ, avec M de classe $C^{1+\rho_0}$ et $\|\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\| \equiv 1$; la variable s est une abscisse curviligne sur la courbe Σ_t ; Soit

$$\text{(10)} \qquad T(t,s) = \frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\ ,\ N(t,s) = R_{\pi/2}(T(t,s))$$

les vecteurs tangents et perpendiculaires unitaires à Σ_t, $R_{\pi/2}$ désignant la rotation de $\pi/2$ dans le plan. Les fonctions T et N sont de classe C^{ρ_0}.

Soit $\psi(t,x,y)$ une fonction de courant telle que

$$\text{(11)} \qquad (u_x, u_y) = \nabla^\perp \psi = (-\partial_y \psi, \partial_x \psi)$$

D'après (7), on a $\Delta\psi = g\delta_{\Sigma_t}$, d'où, u étant nul à l'infini.

$$\text{(12)} \qquad u(t,Q) = R_{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int \frac{Q - M(t,s)}{\|Q - M(t,s)\|^2} g(t,s)\, ds \quad (t,Q) \notin \Sigma$$

Soit u^+ (resp. u^-) la restriction de u à l'ouvert extérieur (resp. intérieur) défini par Σ. Les champs $u^\pm$ sont harmoniques en (x,y). En utilisant (12), on vérifie que les traces $u^\pm|_\Sigma$ existent et sont de la forme $u^\pm|_\Sigma = A^\pm g + r^\pm$, où $A^\pm(s,\partial s)$ est un o.p.d. de degré zéro en s et où les restes $r^\pm$ sont des champs $C^{\rho_0-\varepsilon}$ sur Σ. On note alors

$$u^\pm_{//} = u^\pm|_\Sigma.T \ ; \ u^\pm_\perp = u^\pm|_\Sigma.N \tag{13}$$

L'équation $\mathrm{div}(u) = 0$ entraîne $u^+_\perp = u^-_\perp \stackrel{\text{def}}{=} u_\perp$ et on note

$$[u_{//}] = u^+_{//} - u^-_{//} \ ; \ \langle u_{//}\rangle = \frac{1}{2}(u^+_{//} + u^-_{//}) \tag{14}$$

Soit v le champs de vecteur

$$v = \begin{cases} \partial_x u_x^2 + \partial_y u_x u_y \\ \partial_x u_x u_y + \partial_y u_y^2 \end{cases} \tag{15}$$

L'équation du tourbillon s'écrit

$$\partial_t \omega + \mathrm{rot}(v) = 0 \tag{16}$$

et la distribution $\mathrm{rot}(v)$ est à support dans Σ. Pour calculer $\mathrm{rot}(v)$, on suppose d'abord Σ et g C^∞ et on se place dans le système de coordonnées géodésique normal $(s,\ell) \mapsto M(t,s) + \ell N(t,s)$. En notant $\rho(t,s) = \rho$ la courbure de Σ_t en s, on a

$$\mathrm{div}(\alpha T + \beta N) = \frac{1}{1-\ell\rho}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \ell}(1-\ell\rho)\beta\right)$$
$$\mathrm{rot}(\alpha T + \beta N) = \frac{1}{1-\ell\rho}\left(\frac{\partial\beta}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \ell}((1-\ell\rho)\alpha)\right)$$

et si $u = \alpha T + \beta N$

$$\begin{cases} v &= aT + bN \\ a &= \frac{1}{1-\ell\rho}[\partial_s \alpha^2 - 2\rho\alpha\beta] + \partial_\ell(\alpha\beta) \\ b &= \frac{1}{1-\ell\rho}[\partial_s(\alpha\beta) + \rho(\alpha^2 - \beta^2)] + \partial_\ell \beta^2 \end{cases}$$

On en déduit pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \mathrm{rot}\ v, \varphi\rangle = \iint [\alpha]\beta(\nabla\varphi.N)|_{\ell=0} - \frac{1}{2}\partial_s[\alpha^2]\varphi|_{\ell=0} dt\ ds \tag{17}$$

où $[f] = f|^+_{\ell=0} - f^-_{|\ell=0}$, donc

$$\langle \mathrm{rot}\ v,\ \varphi\rangle = -\iint_\Sigma [u_{//}](u_\perp \nabla\varphi.N + \langle u_{//}\rangle \frac{\partial\varphi}{\partial s}) dt\ ds \tag{18}$$

et on vérifie que (18) reste valable sous l'hypothèse $\Sigma \in C^{1+\rho_0}, g \in L^\infty$. L'équation (16) est donc équivalente à

$$\iint_\Sigma [u_{//}] d\varphi . (\frac{\partial}{\partial t} + u_\perp N + \langle u_{//} \rangle T) dt\ ds = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{19}$$

et (19) reste valable pour $\varphi \in C_0^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ puisqu'on a $[u_{//}], \langle u_{//} \rangle, u_\perp \in L^\infty_{\text{loc}}(t, \bigcap_p L^p)$. Il en résulte déjà

$$\frac{\partial M}{\partial t} . N = u_\perp \tag{20}$$

donc $u_\perp \in C^{\rho_0}$; comme $A^\pm . N$ est elliptique, on obtient $g \in C^{\rho_0 - \varepsilon}$, et en réutilisant (12)

$$g = [u_{//}], \langle u_{//} \rangle, u_\perp \in C^{\rho_0} \tag{21}$$

La section $Z = \frac{\partial}{\partial t} + u_\perp N + \langle u_{//} \rangle T$ du fibré $T\mathbb{R}^3|_\Sigma$ est tangente à Σ et (19) s'écrit

$$\iint g d\varphi(Z) dt\ ds = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^3) \tag{22}$$

qui équivaut à

$$d(g\ dt\ ds \lrcorner Z) = 0 \tag{23}$$

où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur. On a $Z = \partial_t + \underline{\alpha} \partial_s$ avec $\underline{\alpha} = \langle u_{//} \rangle - \frac{\partial M}{\partial t} . T$ et d'après (23), il existe une fonction $\lambda(t, s)$ (sur le revêtement de Σ) telle que

$$g = \frac{\partial \lambda}{\partial s}\ , \ -\underline{\alpha} g = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{24}$$

et d'après (22) $\int_{\Sigma_t} d\lambda = \Lambda$ est constant (invariance de la masse totale du tourbillon).

On paramètre alors Σ par (t', λ)

$$(t', \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\Lambda \mapsto m(t', \lambda) = M(t, s) \quad \lambda = \lambda(t, s), t' = t$$

On a

$$u(t', Q) = R_{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int \frac{Q - m(t', \lambda)}{\|Q - m(t', \lambda)\|^2} d\lambda \quad (t', Q) \notin \Sigma \tag{25}$$

et dans le système de coordonnées $(t', \lambda), Z = \frac{\partial}{\partial t'}$.

Comme $\frac{\partial M}{\partial t} = pT + [u_\perp]N$, on obtient

$$\frac{\partial m}{\partial t'} = \frac{\partial M}{\partial t} + \underline{\alpha}T = pT + [u_\perp]N + \langle u_{//}\rangle T - pT = \langle u_{//}\rangle T + [u_\perp]N$$

d'où d'après (25) en notant $⨍$ la partie finie

$$\frac{\partial m}{\partial t'}(t', \lambda) = R_{\pi/2} ⨍ \frac{m(t', \lambda) - m(t', \lambda')}{\|m(t', \lambda) - m(t', \lambda')\|^2} d\lambda' \tag{26}$$

En identifiant le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en notant $\bar{m}$ le complexe conjugué de m, on obtient l'équation satisfaite par Σ, paramétrée dans le système de coordonnées (t, λ)

Équation de Garrett-Birkhoff

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t}(t, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} ⨍ \frac{d\lambda'}{m(t, \lambda) - m(t, \lambda')} \tag{27}$$

3 Régularité C^∞

Dans ce paragraphe, on va indiquer comment on vérifie que (27) est une équation pseudo-différentielle non linéaire *elliptique*, ce qui entraîne que ses solutions $C^{1+\rho_0}$ sont C^∞.

Proposition 4 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\nu_0 \in]0, 1[$, $\delta_0 \in]0, 1[$ tels que pour tout $\rho \geq \rho_0$ et tout $f \in C_0^{1+\rho}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|f; C^{1+\rho_0/2}\| \leq \varepsilon_0$ on ait avec*

$$A(f)(t, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k ⨍ \frac{[f(t, \lambda) - f(t, \lambda')]^k}{(\lambda - \lambda')^{k+1}} d\lambda' \tag{28}$$

(29)
$$\begin{cases} A(f) = Q(f) + R(f) \\ R(f) \in C^{\rho+\delta_0} \\ Q \in S^1_{1,\nu_0} \text{ est un opd tangentiel en } \lambda \text{ de symbole} \\ q(t, \lambda, \tau, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t, \lambda)|\zeta|\chi_n(\tau, \zeta), q_n(t, \lambda) = \chi(2^{-n\nu_0}D)\left(\frac{-\pi}{(1+f'_\lambda(t,\lambda))^2}\right) \end{cases}$$

où $\{\chi_n\}_{n\geq 0}$ est une décomposition dyadique de Littlewood-Paley, et $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de l'origine.

La proposition précédente entraîne que les solutions $C^{1+\rho_0}$ de (27) sont C^∞. En effet, soit $m(t, \lambda) \in C^{1+\rho}$, $\rho \geq \rho_0$, une solution de (27).

Près de $(t_0,\lambda_0)=(0,0)$ on a

$$m(t,\lambda)=\mu t+z_0(\lambda+f(t,\lambda)) \tag{30}$$

avec $z_0\in\mathbb{C}^*$, $f\in C^{1+\rho}$, $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=0$, et $\|f(t,\lambda)\,;C^{1+\rho_0/2}(B((0,0),\varepsilon))\|\le C^{te}\varepsilon^{\rho_0/2}$.

Si $\theta\in C_0^\infty(]-2,2[)$ vérifie $\theta(x)=1$ pour $x\in[-1,1]$, on a

(31)
$$\partial_t\bar m=\bar\mu+\bar z_0\partial_t\bar f=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(\frac{\lambda-\lambda'}{\varepsilon})}{z_0[(\lambda-\lambda')+f(t,\lambda)-f(t,\lambda')]}d\lambda'+r_\varepsilon(t,\lambda)$$

avec $r_\varepsilon\in C^{1+\rho}_{(0,0)}$. Soit $h\in C_0^{1+\rho}(\mathbb{R}^2)$ égal à f près de $(0,0)$ et vérifiant $\|h;C^{1+\rho_0/2}(\mathbb{R}^2)\|\le\varepsilon_0$. On a

$$|z_0|^2\partial_t\bar h-\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda'}{(\lambda-\lambda')+h(t,\lambda)-h(t,\lambda')}\in C^{1+\rho}_{(0,0)} \tag{32}$$

d'où $|z_0|^2\partial_t\bar h-\frac{1}{2i\pi}A(h)\in C^{1+\rho}_{(0,0)}$. En utilisant la proposition 1, on obtient $|z_0|^2\partial_t\bar h-\frac{1}{2i\pi}Q(h)\in C^{\rho+\delta_0}_{(0,0)}$. En décomposant $h=Reh+iImh$, et avec $(1+f'_\lambda)^{-2}=q_1+iq_2$, le symbole principal du système 2×2 $|z_0|^2\partial_t\bar h-\frac{1}{2\pi i}Q(h)$ est

$$\begin{bmatrix}|z_0|^2\partial_t+\frac{|\zeta|}{2}q_2 & \frac{|\zeta|}{2}q_1\\ \frac{-|\zeta|}{2}q_1 & -(|z_0|^2\partial_t-\frac{|\zeta|}{2}q_2)\end{bmatrix} \tag{33}$$

Comme (33) est un système elliptique, on obtient $h\in C^{1+\rho+\delta_0-0}_{(0,0)}$, d'où $m\in C^{1+\rho+\delta_0-0}$.

Pour vérifier la proposition 1, on écrit $f=\sum\limits_{j=0}^{\infty}f_j$ (décomposition de Littlewood-Paley), on pose $\Theta_j(t,x,y)=\frac{f_j(t,y)-f_j(t,x)}{y-x}$, $v_j(t,x,y)=f_j(t,x)-f_j(t,y)$. On a

$$\begin{cases}|\partial^\gamma\Theta_j|_{L^\infty}\le C^{te}2^{j|\gamma|}2^{-j\rho}\|f\|_{1+\rho}\\ \sup\limits_{(t,x)}\int|\partial_y\Theta_j(t,x,y)|dy\le C^{te}\langle j\rangle 2^{-j\rho}\|f\|_{1+\rho}\end{cases} \tag{34}$$

Pour $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)$, on pose $|\alpha|=\Sigma\alpha_j$, $J_\alpha=\max\{j,\alpha_j\neq0\}$ et

$$w_\alpha(t,x)=\int\frac{v^\alpha(t,x,y)}{(x-y)^{|\alpha|+1}}dy\ ;\ v^\alpha=\Pi v_j^{\alpha_j} \tag{35}$$

En utilisant (34), on obtient

$$|w_\alpha|_{L^\infty}\le C^{te}2^{-(\Sigma j\alpha_j)\rho}(\Sigma\langle j\rangle\alpha_j+1-\langle J_\alpha\rangle)\|f\|_{1+\rho}^{|\alpha|} \tag{36}$$

On a $A(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k(f)$, avec $A_k(f) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} w_\alpha$, et la localisation spectrale

$$Sp(w_\alpha) \subset \{|(\tau,\zeta)| \le 2.1(\sum_j 2^j \alpha_j)\} \tag{37}$$

On partitionne alors l'espace des indices en posant

$$I_{n,k} = \{\alpha; |\alpha| = k \ , \ 2^{n-1} \le \sum_j 2^j \alpha_j < 2^n\}$$

et on écrit

$$A(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} w_\alpha + \sum_{\alpha \notin \mathcal{C}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} w_\alpha = Q(f) + R(f) \tag{38}$$

avec $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{n,k} \{\alpha \in I_{n,k}, J_\alpha = n-1, \alpha_{(J\alpha)} = 1, \sum\limits_{j<J_\alpha} j\alpha_j \le \varepsilon n\}$.

On conclut alors en utilisant (36) et la caractérisation des espaces de Hölder en Littlewood-Paley. [La condition $\|f; C^{1+\rho_0/2}\| \le \varepsilon_0$ n'intervient que pour assurer la convergence des séries précédentes.]

4 Régularité analytique

Soit $m(t,\lambda)$ une solution C^∞ de l'équation de Garrett Birkhoff (27). On note $\mathcal{L}$ l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}(u) = \partial_t \bar{u} + \frac{1}{2i\pi} \fint \frac{u(t,\lambda) - u(t,\lambda')}{(m(t,\lambda) - m(t,\lambda'))^2} d\lambda' \tag{39}$$

On fixe $\rho \in]0,1[$. L'opérateur $\mathcal{L}$ envoie $C_0^{1+\rho}(]T_1,T_2[\times \mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z})$ dans $C_0^\rho(]T_1,T_2[\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z})$ et est elliptique. Quitte à diminuer $T_2 - T_1$, on peut donc supposer $\mathcal{L}$ injectif, et il existe une constante M telle que

$$\|u\|_{1+\rho} \le M\|\mathcal{L}u\|_\rho \quad \forall u \in C_0^{1+\rho}(]T_1,T_2[\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z}) \tag{40}$$

Notons $g = m(t,\lambda) - m(t,\lambda')$, $g^\nu = \nabla^\nu_{t,\lambda} m(t,\lambda) - \nabla^\nu_{t,\lambda'} m(t,\lambda')$.

En utilisant la formule

$$\partial_x \int F(f(x)-f(y))dy = \int (\partial_x + \partial_y) F(f(x)-f(y))dy = \int (f'(x)-f'(y))F'(f(x)-f(y))dy$$

on obtient en dérivant (27)

$$(41)\qquad \mathcal{L}(\nabla^\alpha_{t,\lambda} m) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\ell=2}^{|\alpha|}(-1)^\ell \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_\ell=\alpha \\ |\nu_j|\geq 1}} \frac{\alpha!}{\nu_1!\cdots\nu_\ell!} \fint \frac{1}{g}\frac{g^{\nu_1}}{g}\cdots\frac{g^{\nu_\ell}}{g}d\lambda'$$

On peut supposer $(T_1,T_2)=(-T,T)$; pour $0<r<r'<T$, on choisit des fonctions de localisation $\varphi_{r,r'}(t)\in C_0^\infty(]-r',r'[)$ égales à 1 sur $[-r,r]$, telles que l'on ait

$$\|\varphi(t)f\|_\rho \leq C^{te}[\|f\|_\rho + \frac{1}{r'-r}\|f\|_{\rho-1}]$$

et

$$\|\varphi'(t)f\|_\rho \leq C^{te}[\frac{1}{r'-r}\|f\|_\rho + \frac{1}{(r'-r)^2}\|f\|_{\rho-1}].$$

On pose pour $k\geq 0$

$$C_k(r) = \sum_{|\beta|=k}\|\frac{\nabla^\beta}{\beta!}m ; C^{1+\rho}([-r,r]\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z})\|$$

On a, avec $h=f(t,\lambda)-f(t,\lambda')$, quitte à modifier M

$$(42)\qquad \begin{cases} \|\fint\frac{1}{g}\frac{h_1}{g}\cdots\frac{h_\ell}{g}d\lambda'\|_\rho \leq M^\ell\prod_{j=1}^{\ell}\|f_j\|_{1+\rho} \\ \|\fint\frac{1}{g}\frac{h_1}{g}\cdots\frac{h_\ell}{g}d\lambda'\|_{\rho-1} \leq M^\ell\|f_1\|_\rho\prod_{j=2}^{\ell}\|f_j\|_{1+\rho} \end{cases}$$

En utilisant (40), (42) et $\mathcal{L}(\varphi\nabla^\alpha m)=\varphi\mathcal{L}(\nabla^\alpha m)+\varphi'(t)\nabla^\alpha m$ on obtient pour $0<r<r'<T$, $k\geq 2$

$$(43)\qquad C_k(r)\leq M\left[\sum_{\ell=2}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\ell=k \\ |k_j|\geq 1}} M^\ell(1+\frac{1}{k(r'-r)})C_{k_1}(r')\cdots C_{k_\ell}(r')\right]$$

$$+\frac{M}{r'-r}\frac{1}{k}C_{k-1}(r')+\frac{M}{(r'-r)^2}\frac{1}{k^2}C_{k-2}(r')$$

En posant $E_k=\sup_{r<T}D(T-r)^{\max(k-2,0)}C_k(r)$, on obtient en optimisant (43) en $r'\in]r,T[$, pour un D convenable

$$(44)\qquad E_k\leq M\left[\sum_{\ell=2}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\rho=k \\ k_j\geq 1}} E_{k_1}\cdots E_{k_\ell}+E_{k-1}+E_{k-2}\right](k\geq 3)$$

d'où l'existence de A, B tels que

$$E_k \leq AB^k \tag{45}$$

ce qui prouve que m est analytique.

Références

[1] G. Birkhoff : "Helmholtz and Taylor instability" Proc. of Symp. Appl. Math XIII. Am. Math. Soc. (1962), p.55-76.

[2] C. Bardos, U. Frisch, C. Sulem, P.L. Sulem : "Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability" CMP 80 (1981) p.485-516.

[3] J.-M. Delort : "Existence de nappes de tourbillon en dimension deux" J. Am. Math. Soc. 4, (1991) p.553-586.