Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Pierre-Yves Jeanne

Optique Géométrique et invariance de jauge : Solutions oscillantes d'amplitude critique pour les équations de Yang-Mills

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° XVIII, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ET INVARIANCE DE JAUGE : SOLUTIONS OSCILLANTES D'AMPLITUDE CRITIQUE POUR LES ÉQUATIONS DE YANG-MILLS

par

P.-Y. Jeanne

1. Introduction

Notre but est de justifier le recours à des méthodes de type "optique géométrique" pour une large classe de systèmes d'équations de champs semi-linéaires, invariants à la fois par transformations de Lorentz et par changements de jauge. Nous construisons explicitement des familles de solutions approchées d'un système modèle, couplant un champ de jauge (équation de Yang-Mills) avec un champ scalaire (équation des ondes) et un champ de spineurs (équation de Dirac), sous forme de développements oscillant à haute fréquence, monophasés, d'amplitude maximale. Nous justifions ensuite notre démarche en prouvant l'existence de solutions exactes, qui prolongent asymptotiquement les développements oscillants obtenus. Les potentiels de Yang-Mills, champ scalaire et champ de spineurs ainsi générés ne restent uniformément bornés que dans - respectivement - $H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}$ et L^2. L'obtention de solutions oscillantes de forte amplitude montre que le système étudié peut conserver un comportement linéaire stable pour toute une classe de champs de très faible régularité.

1.1. Développement et justification d'une méthode de type "Optique Géométrique" pour des sytèmes semi-linéaires présentant une invariance de jauge. — Les premières tentatives de construire des solutions oscillantes à haute fréquence pour des systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires remontent à l'article [**1**] d'Y. Choquet-Bruhat, en 1969. L'article [**2**] s'inscrit dans ce cadre, proposant des ébauches de développements oscillants pour les équations de champs semi-linéaires avec invariance de jauge qui nous intéressent. La méthode consiste à se ramener, moyennant des conditons de polarisation sur certains termes oscillants, au développement d'un système d'équations d'ondes semi-linéaires. En contre partie, le développement s'arrête au premier ordre. Rien ne laisse préjuger de l'existence de solutions exactes qui viendraient prolonger asymptotiquement (et du coup justifier) les solutions approchées obtenues. Enfin, les oscillations envisagées restent de faible amplitude, et ne permettent pas au système de révéler toute la richesse de sa structure algébrique.

Plus récemment (1992, vingt bonnes années après la parution de [**1**]), J.L. Joly et J. Rauch ont justifié rigoureusement les développements W.K.B. monophasés pour des systèmes hyperboliques d'ordre 1 en dimension quelconque dans l'article [**3**], et O. Guès a traité le cas quasi-linéaire dans [**4, 5**] (voir également l'article [**6**] de J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch qui précise et complète ces résultats).

Malheureusement, les systèmes d'équations de champs semi-linéaires avec invariance de jauge envisagés dans [**2**] (voir aussi [**7**]) échappent aux études précédentes. Pour cause, ce ne sont pas de vrais systèmes hyperboliques (en tous cas, pas dans un sens classique pour l'analyse) et ils

Travaux supportés par une bourse de thèse DGA/CNRS, allocation de recherches No 5901798/C16.

apparaisent a priori "mal déterminés"... Il est toujours possible de les résoudre sous forme de systèmes d'équations semi-linéaires strictement hyperboliques, mais c'est au prix d'une condition complémentaire sur les inconnues (nous pensons, par exemple, à la jauge de Lorentz). Une façon (optimiste) d'aborder le problème consiste donc à se ramener à un système hyperbolique semi-linéaire sur-déterminé, et à le traiter comme si de rien n'était, en espérant que ses degrés de symétrie suffiront pour contourner la difficulté. Cette démarche a déjà fait ses preuve dans le cas de solutions régulières : il existe une relation algébrique sur les équations (héritée des identités de Bianchi sur le champ de jauge) garantissant que certaines "bonnes" contraintes de jauge "hyperbolisantes" se propagent automatiquement, dès lors qu'elles sont satisfaites à $t = 0$ ainsi que les contraintes elliptiques de compatibilité structurelle qui pèsent sur les données de Cauchy. Quoiqu'il en soit, il n'est pas acquis que ces principes tiennent encore pour des solutions fortement oscillantes à haute fréquence, et le développement W.K.B. de tels systèmes ne peut se faire directement dans l'esprit de [**3**] ou [**4, 5**] sans reconsidérer minutieusement la structure algébrique des équations. Par ailleurs, combien même parviendrions nous à résoudre un problème de Cauchy oscillant en s'appuyant sur une contrainte de jauge hyperbolisante, il faudrait s'assurer que les oscillations observées ne sont pas artificielles et ne peuvent pas être anullées par un changement de jauge oscillant de même amplitude. Il est nécessaire, à un moment ou un autre, de préciser géométriquement la façon dont se propagent les différentes composantes oscillantes du champ de jauge, en identifiant celles qui sont polarisées (partie sur-determinée du système liée aux contraintes elliptiques sur les données initiales), libres (partie sous-déterminée du système liée à l'invariance de jauge) ou transportées le long de géodésiques nulles de l'espace-temps (partie dynamique du système se comportant de façon véritablement hyperbolique).

Enfin, compte tenu des résultats d'existence de solutions peu régulières d'équations de champs à non-linéarités dites "compatibles" obtenus il-y-a quelques années par S. Klainerman et M. Machedon dans [**8, 9**], ou par M. Beals et M. Bézard dans [**10**] en combinant les effets régularisants d'estimations de type Strichartz avec la structure algébrique très particulière des termes non-linéaires, il était naturel de chercher des développements W.K.B. de solutions aussi peu régulières, et de les justifier convenablement. De tels développements ne peuvent certes pas décrire totalement le comportement d'une solution d'énergie du système (H^1 pour Yang-Mills en dimension 3+1 d'espace-temps). Ils excluent, en particulier, les phénomènes de concentration les plus néfastes et restent "petits en norme Stricharz". Par contre, ils décrivent bien la partie "grosse en norme d'énergie" d'une solution (voir par exemple [**11**]). Aussi espérons-nous utiliser l'optique géométrique pour obtenir des informations un peu plus précises sur la façon dont se comportent les solutions lorsque la régularité tombe sous le seuil critique pour lequel les termes non-linéaires commencent à jouer un rôle actif. Dans ce but, nous avons cherché à construire les développements oscillants monophasées les plus singuliers possibles. Si l'amplitude de ces développements est trop faible, la structure "compatible" des non-linéarités (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch parlent de conditions de "transparence", c.f. [**12**]) fait que les oscillations restent de simples perturbations linéaires d'une solution régulière donnée et ne forme aucune interaction substentielle. Si elle est trop forte, il se forme immédiatement des interractions destructives que nous ne pouvons pas maîtriser. Il faut donc trouver l'amplitude d'oscillation critique pour laquelle l'optique géométrique met en évidence de véritables effets non-linéaires, tout en restant capables de prouver que les solutions oscillantes que nous construisons restent asymptotiques à des solutions exactes du système. Ce faisant, nous sommes confrontés à des difficultés nouvelles du point de vue de l'analyse et sommes obligés de démontrer des estimations bilinéaires plus fines que celles utilisées dans [**4, 5**].

1.2. Remerciements. — L'auteur fait part de sa profonde gratitude à M.Bézard, N.Burq, P.Gérard et G.Métivier, qui ont chacun apporté une contribution importante aux résultats présentés dans cet exposé.

2. Solutions oscillantes d'amplitude critique pour un système modèle d'équations d'ondes semi-linéaires

Nous nous plaçons dans cette section sur l'espace-temps plat de Minkovski, les coordonnées sont notées $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) = (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. $\square = \partial^\nu \partial_\nu = \partial_t^2 - \triangle$ est le d'Alembertien et $F(U, \partial U) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq p, 0 \leq \gamma \leq n} c_{\alpha\beta\gamma}(x) U_\alpha \partial_\gamma U_\beta$ une forme bilinéaire en U et ∂U à coefficients C^∞. Nous considérons pour commencer un système modèle d'équations d'ondes semi-linéaires :

$$\square U = F(U, \partial U) \tag{1}$$

et cherchons à construire des familles de solutions exactes admettant un développement de la forme

$$U_\varepsilon(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} u_i(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{M}{2}} z_\varepsilon(x) \tag{2}$$

où $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ est un petit paramètre d'échelle, $\theta(x)$ une fonction de phase, u_0 une fonction non-oscillante régulière, $u_i(x, \omega)$, $0 < i < M$, une suite de fonctions régulières 2π-périodiques en la variable ω, et $(z)_\varepsilon$ un reste uniformément borné dans $H^{\frac{1}{2}}$.

Notons $\tilde{\cdot}$ ou $Moy(\cdot)$ la partie moyenne d'un terme donné, 2π-periodique en la variable ω : $\widetilde{u}(x) = \int_0^{2\pi} u(x, \omega) d\omega$. La partie purement oscillante (de moyenne nulle) sera désigné par $\star$ ou $Osc(\cdot)$ et définie par : $\overset{\star}{u}(x, \omega) = u(x, \omega) - \widetilde{u}(x)$, la décomposition obtenue est univoque. Les données de la forme (2) se mettent alors sous la forme

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} (\tilde{u}_i(x) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overset{\star}{u}_{i+1}(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon})) + \varepsilon^{\frac{M}{2}} z_\varepsilon(x) \tag{3}$$

2.1. Construction de solutions approchées. —

Proposition 2.1.1. — *(existence de solutions approchées à tout ordre) Soit θ une fonction de phase régulière vérifiant l'équation eïkonale $\partial_t \theta = \pm |grad_{\mathbf{R}^n} \theta|$ sur l'intervalle $[0, t_0]$, un réel $s \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ et un entier naturel M. Toutes données initiales $(\tilde{u}, \partial_t \tilde{u})_i(0, y)$ et $(\overset{\star}{u})_{i+1}(0, y, \omega)$, $i = 0 \cdots M-1$, avec*

$$|\tilde{u}_i(0, y)|_{H^{s_i}(\mathbf{R}^n)} + |\partial_t \tilde{u}_i(0, y)|_{H^{s_i - 1}(\mathbf{R}^n)} + |\overset{\star}{u}_{i+1}(0, y, \omega)|_{C^s([0, 2\pi], H^{s_i}(\mathbf{R}^n))} \leq \delta_i, \qquad s_i = s + M - 1 - i$$

se prolongent sur un intervalle $[0, t_1(\delta_0)]$, $0 < t_1(\delta_0) \geq t_0$, en une unique suite $(\tilde{u}, \partial_t \tilde{u})_i$ et $(\overset{\star}{u})_{i+1}$, $i = 0 \cdots M-1$,

$$\tilde{u}_i \in C^0([0, t_1], H^{s_i}(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, t_1], H^{s_i - 1}(\mathbf{R}^n))$$
$$\overset{\star}{u}_{i+1} \in C^0([0, t_1], C^s([0, 2\pi], H^{s_i}(\mathbf{R}^n)))$$

telle que

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} (\tilde{u}_i(x) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overset{\star}{u}_{i+1}(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}))$$

vérifie

$$\square U_\varepsilon - F(U_\varepsilon, \partial U_\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{M}{2}} R_\varepsilon$$

avec un reste $R_\varepsilon \in C^0([0, t_1], C^s([0, 2\pi], H^s(\mathbf{R}^n)))$ qui est borné dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)$ uniformément en ε. De plus, si δ_0 est assez petit, $t_1 = t_0$.

Idée de la preuve : Nous commençons par développer en puissances de ε le système (1) appliqué à U_ε, afin de dégager les équations de profils que les $(U)_i$ doivent vérifier. Nous obtenons successivement :

- à l'ordre $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ et ε^{-1} :

$$(\partial^\nu \theta \partial_\nu \theta) \partial_\omega^2 U_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\partial^\nu \theta \partial_\nu \theta) \partial_\omega^2 U_2 = 0$$

Si $\overset{\star}{u}_1$ et $\overset{\star}{u}_2$ sont non identiquement nuls, nous sommes contraints de prendre $\partial^\nu\theta\partial_\nu\theta = 0$, c'est à dire que la phase vérifie l'eikonale associée à l'équation des ondes.

- à l'ordre $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$:

$$X\partial_\omega U_1 = (2\partial^\nu\theta\partial_\nu + \Box\theta)\partial_\omega U_1 = \sum_{0\leq\alpha,\beta\leq p, 0\leq\gamma\leq n} c_{\alpha\beta\gamma}(x)(U_0)_\alpha\partial_\gamma\theta(\partial_\omega U_1)_\beta = F_\theta(U_0, \partial_\omega U_1)$$

- à l'ordre ε^0 :

$$X\partial_\omega U_2 + \Box U_0 = F(U_0, \partial U_0) + F_\theta(U_0, \partial_\omega U_2) + F_\theta(U_1, \partial_\omega U_1)$$

- à l'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$:

$$X\partial_\omega U_3 + \Box U_1 = F(U_0, \partial U_1) + F(u_1, \partial U_0) + F_\theta(U_0, \partial_\omega U_3) + F_\theta(U_1, \partial_\omega U_2) + F_\theta(U_2, \partial_\omega U_1)$$

et ainsi de suite... Afin de faire apparaître clairement une relation de dépendance causale entre les profils d'ordre croissants, il faut décomposer chacune de ces équations en sa partie moyenne et oscillante. Nous recueillons dans l'ordre :

$$(C,0)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} X\partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} & = & F_\theta(\mathbf{U_0}, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}) \\ \Box\mathbf{U_0} & = & F(\mathbf{U_0}, \partial\mathbf{U_0}) + Moy\ F_\theta(\overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}) \end{array}\right.$$

puis

$$(C,1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} X\partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}} & = & F_\theta(U_0, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}) + F_\theta(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}, \partial_\omega \overset{\star}{u}_1) + Osc\ F_\theta(\overset{\star}{u}_1, \partial_\omega \overset{\star}{u}_1) \\ \Box\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} & = & F(U_0, \partial\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}) + F(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}, \partial U_0) + Moy\ F_\theta(\overset{\star}{u}_1, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}) + Moy\ F_\theta(\overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}, \partial_\omega \overset{\star}{u}_1) \end{array}\right.$$

puis

$$(C,i)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} X\partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{i+1}} & = & F_\theta(U_0, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{i+1}}) + F_\theta(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}, \partial_\omega \overset{\star}{u}_1) \\ & & -\Box\ \overset{\star}{u}_{i-1} + \overset{\star}{f}_i\ (\tilde{u}_k, \partial\tilde{u}_k, \overset{\star}{u}_{k+1}, 0\leq k < i) \\ \Box\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}} & = & F(U_0, \partial\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}) + F(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}, \partial U_0) + Moy\ F_\theta(\overset{\star}{u}_1, \partial_\omega \overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{i+1}}) + Moy\ F_\theta(\overset{\star}{\mathbf{u}}_{\mathbf{i+1}}, \partial_\omega \overset{\star}{u}_1) \\ & & +\tilde{f}_i(\tilde{u}_k, \partial\tilde{u}_k, \overset{\star}{u}_{k+1}, 0\leq k < i) \end{array}\right.$$

Tous ces systèmes couplent une équation d'onde avec une équation de transport le long des rayons de lumière (courbes intégrales du champ de vecteurs nuls $grad_{\mathbf{R}^{1+n}}\theta$). Remarquons que $(C,0)$ est semilinéaire en $(U_0, \overset{\star}{u}_1)$, tandis que les (C,i) suivants, $1\leq i$, sont linéaires en $(\tilde{u}_i, \overset{\star}{u}_{i+1})$. Leur résolution ne présente aucune difficulté particulière, à condition de prendre des données suffisamment régulières (on observe un déperdition inévitable de régularité à cause du terme $-\Box\ \overset{\star}{u}_{i-1}$ qui apparait en second membre des equations de transport).

Il est important de remarquer que les familles de fonctions $(U)_\varepsilon$ de la proposition 2.1.1 ne sont pas uniformément Lipschitziennes lorsque $\varepsilon \to 0$. Ceci est source de difficultés pour l'obtention des solutions exactes asymptotiques de la proposition 2.2.1. Ces fonctions ont en fait une "demi-dérivée" bornée uniformément en ε. Nous posons $\langle D\rangle^s = (1-\triangle)^{\frac{s}{2}}$ et $\langle\varepsilon D\rangle^s = (1-\varepsilon^2\triangle)^{\frac{s}{2}}$.

Définition 2.1.1. — *Pour tous réels s et m, pour toute famille de fonctions $(u)_\varepsilon$ de $H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$ dépendant d'un paramètre ε, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0<1$, nous définissons la norme suivante :*

$$||u_\varepsilon||_{s,m,2} = \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} |\langle D\rangle^s\langle\varepsilon D\rangle^m u_\varepsilon|_{\mathbf{L^2}}$$

Nous désignons par $\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,2}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des familles $(u)_\varepsilon$ de $H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$ dépendant d'un paramètre ε dont la norme $||u_\varepsilon||_{s,m,2}$ est bornée. Pour tout $M\in\mathbf{R}$, nous faisons usage de la notation $\varepsilon^M\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,2}(\mathbf{R}^n)$ pour désigner l'ensemble des familles $(u)_\varepsilon$ de $H^{s+m}(\mathbf{R}^n)$ telles que $||\varepsilon^{-M}u_\varepsilon||_{s,m,2}$ est bornée.

Pour tout s et m, ces espaces sont complets pour la norme $||\cdot||_{s,m,2}$ (et conviennent donc à la mise en oeuvre d'un point fixe). Ils contiennent des familles uniformément bornées dans H^s et nous serviront dans la partie suivante à estimer les termes de reste prolongeant la solution approchée de la proposition 2.1.1 en une solution exacte. Nous définissons d'une façon similaire des espaces $\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,\infty}$, construits sur l'espace BMO, et non plus sur L^2.

Définition 2.1.2. — *pour tout réels s et m, pour toute famille de fonctions $(u)_\varepsilon$, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0<1$, nous définissons la norme :*

$$||u_\varepsilon||_{s,m,\infty}=\sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}|\langle D\rangle^s\langle\varepsilon D\rangle^m u_\varepsilon|_{BMO}$$

Nous nommons $\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,\infty}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des familles $(u)_\varepsilon$ dont la norme $||u_\varepsilon||_{s,m,\infty}$ est bornée.

Enfin, nous définissons les espaces qui nous permettent d'estimer uniformément la régularité de développements oscillants dépendant du paramètre ε.

Définition 2.1.3. — *Nous nommons $\mathcal{Z}_\varepsilon^{(s,m)}$ l'ensemble des familles $(u)_\varepsilon$ de $\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,2}$ qui peuvent se décomposer en*

$$(u)_\varepsilon=(u')_\varepsilon+(u")_\varepsilon \text{ avec } (u')_\varepsilon\in\mathcal{W}_\varepsilon^{s+m,0,2} \text{ et } (u")_\varepsilon\in\mathcal{W}_\varepsilon^{s,m,\infty}$$

Nous prenons comme norme sur $\mathcal{Z}_\varepsilon^{(s,m)}$ la quantité

$$|||u_\varepsilon|||_{(s,m)}\ =\ ||u_\varepsilon||_{s,m,2}\ +\ \inf_{(u'+u"=u)}(||u'_\varepsilon||_{s+m,0,2}+||u"_\varepsilon||_{s,m,\infty})$$

où $\inf_{(u'+u"=u)}$ désigne l' $\inf$ pour toutes les décompositions possibles.

Nous précisons alors la proposition 2.1.1 :

Proposition 2.1.2. — *(Estimations uniformes sur les solutions approchées et les termes de reste) La famille de solutions approchées $(U)_\varepsilon$ de la proposition 2.1.1 vérifie*

$$(U)_\varepsilon\in C^0([0,t],\mathcal{Z}_\varepsilon^{\frac12,\frac n2}(\mathbf{R}^n))\cap C^1([0,t],\mathcal{Z}_\varepsilon^{-\frac12,\frac n2}(\mathbf{R}^n))$$

Le reste $(R)_\varepsilon$ vérifie

$$(R)_\varepsilon\in C^0([0,t],\varepsilon^{\frac M2}\mathcal{W}_\varepsilon^{-\frac12,\frac n2,2}(\mathbf{R}^n))$$

2.2. Prolongement asymptotiques des solutions approchées en solutions exactes. — La proposition suivante justifie alors les développements oscillants de la proposition 2.1.1 à l'ordre $\varepsilon^{\frac M2}$:

Proposition 2.2.1. — *(prolongement asymptotique des développements oscillants en familles de solutions exactes) Soit*

$$(U)_\varepsilon\in C^0([0,t_0],\mathcal{Z}_\varepsilon^{(\frac12,\frac n2)}(\mathbf{R}^n))\cap C^1([0,t_0],\mathcal{Z}_\varepsilon^{(-\frac12,\frac n2)}(\mathbf{R}^n))$$

une solution approchée du système (1) à l'ordre $O(\varepsilon^{\frac M2})$, $M\geq n$:

$$(R)_\varepsilon=(\Box U-F(U,\partial U))_\varepsilon\in C^0([0,t_0],\varepsilon^{\frac M2}\mathcal{W}_\varepsilon^{-\frac12,\frac n2,2}(\mathbf{R}^n))$$

Toutes données résiduelles $(Z,\partial_tZ)_{\varepsilon_{|t=0}}$ vérifiant

$$||\varepsilon^{-\frac M2}(Z)_\varepsilon(t=0)||_{\frac12,\frac n2,2}+||\varepsilon^{-\frac M2}(\partial_tZ)_\varepsilon(t=0)||_{-\frac12,\frac n2,2}\ \leq\ \delta_0$$

se prolongent sur un intervalle $[0,t_1]$, $0<t_1\leq t_0$ indépendant de ε, en une unique famille

$$(Z)_\varepsilon\in C^0([0,t_1],\varepsilon^{\frac M2}\mathcal{W}_\varepsilon^{\frac12,\frac n2,2}(\mathbf{R}^n))\cap C^1([0,t_1],\varepsilon^{\frac M2}\mathcal{W}_\varepsilon^{-\frac12,\frac n2,2}(\mathbf{R}^n))$$

telle que

$$(\mathcal{U})_\varepsilon\ =\ (U)_\varepsilon+(Z)_\varepsilon$$

forme une famille de solutions exactes de (1). De plus, si δ_0 est assez petit, alors $t_1=t_0$.

Idée de la preuve : Il faut résoudre dans $C^0([0,t_1],\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{\frac{1}{2},\frac{n}{2},2}(\mathbf{R}^n))\cap C^1([0,t_1],\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-\frac{1}{2},\frac{n}{2},2}(\mathbf{R}^n))$ l'équation d'onde semilinéaire

$$\Box Z_\varepsilon = F(Z_\varepsilon,\partial Z_\varepsilon)+F(U_\varepsilon,\partial Z_\varepsilon)+F(Z_\varepsilon,\partial U_\varepsilon)+R_\varepsilon \tag{4}$$

La difficulté tient au fait que la famille de solutions approchées **n'est pas uniformément Lipschitzienne** en ε. Ceci rend délicate l'estimation des produits de type $Z_\varepsilon.\partial U_\varepsilon$. Les majorations mises au point dans [**4, 5**], par exemple, ne suffisent plus. La marge de manoeuvre dont nous disposons est réduite à une demie dérivée, qu'il faut exploiter systématiquement par un argument d'analyse adapté. L'équation (4) se résout par une méthode traditionnelle de point fixe une fois prouvé le lemme suivant :

Proposition 2.2.2. — *(Estimations bilinéaires uniformes) Etant donné un entier $M\geq n$, un réel $s>0$, il existe une constante C telle que :*

a) si $(U)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{s,\frac{n}{2},2}$ et $(V)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-s,\frac{n}{2},2}$, alors le produit $(UV)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-s,\frac{n}{2},2}$ et

$$||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon V_\varepsilon||_{-s,\frac{n}{2},2}\ \leq\ C\,||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon||_{s,\frac{n}{2},2}\ \ ||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}V_\varepsilon||_{-s,\frac{n}{2},2}$$

b) si $(U)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{s,\frac{n}{2},2}$ et $(V)_\varepsilon\in\mathcal{Z}_\varepsilon^{(-s,\frac{n}{2})}$, alors le produit $(UV)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-s,\frac{n}{2},2}$ et

$$||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon V_\varepsilon||_{-s,\frac{n}{2},2}\ \leq\ C\,||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon||_{s,\frac{n}{2},2}\ \ |||V_\varepsilon|||_{(-s,\frac{n}{2})}$$

c) si $(U)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-s,\frac{n}{2},2}$ et $(V)_\varepsilon\in\mathcal{Z}_\varepsilon^{(s,\frac{n}{2})}$, alors le produit $(UV)_\varepsilon\in\varepsilon^{\frac{M}{2}}\mathcal{W}_\varepsilon^{-s,\frac{n}{2},2}$ et

$$||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon V_\varepsilon||_{-s,\frac{n}{2},2}\ \leq\ C\,||\varepsilon^{-\frac{M}{2}}U_\varepsilon||_{-s,\frac{n}{2},2}\ \ |||V_\varepsilon|||_{(s,\frac{n}{2})}$$

Afin d'éclaircir la proposition 2.2.2, nous détaillons un résultat intermédiaire qui fait abstraction du paramètre ε :

Proposition 2.2.3. — *Pour tout réel $s>0$,*
a) Si $f\in H^s$ et $\langle D\rangle^{-s}g\in L^\infty$, alors le produit $fg\in H^{-s}$ et il existe une constante $C>0$ telle que :

$$|fg|_{H^{-s}}\leq C|f|_{H^s}|\langle D\rangle^{-s}g|_{L^\infty}$$

b) Si $f\in H^{-s}$ et $\langle D\rangle^{s}g\in L^\infty$, alors le produit $fg\in H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ et il existe une constante $C>0$ telle que :

$$|fg|_{H^{-s}}\leq C|f|_{H^{-s}}|\langle D\rangle^{s}g|_{L^\infty}$$

La preuve des estimations bilinéaires s'appuie sur la proposition suivante (énoncée dans [**13**], démonstration du théorème 33, pour des décompositions diadiques dépendant d'un paramètre continu, la démonstration originale s'appuie sur [**14**], et peut-être lue dans [**15**]). C'est ici qu'apparaît de façon naturelle l'espace BMO (on utilise en fait sa caractérisation en termes de mesures de Carleson).

Proposition 2.2.4. — *(Stein et Coifman-Meyer) Soit $\tilde\phi_k(\xi)$, $k\geq 0$, une suite de fonctions vérifiant la condition de sommabilité $\sum_{k\geq0}|\tilde\phi_k|^2\leq\tilde C$, et telle que la famille $\tilde\Phi_k=\tilde\phi_k(2^k\cdot)$ est supportée dans une couronne fixe $\{1/R\leq|\xi|\leq R\}$ et reste uniformément bornée dans C^∞. Soit $\tilde\psi_k(\xi)$, $k\geq0$, une suite de fonction telle que la famille $\tilde\Psi_k=\tilde\psi_k(2^k\cdot)$ est supportée dans une boule fixe $\{|\xi|\leq R\}$ et reste uniformément bornée dans C^∞. Nous posons $\tilde S_k u=\tilde\psi_k(D)u$ et $\tilde\Delta_k v=\tilde\phi_k(D)v$. Si $u\in L^2$ et $v\in BMO$, alors :*

$$\sum_k\int|\tilde\Delta_k(D)v(y)|^2|\tilde S_k(D)u(y)|^2dy\leq C|u|^2_{L^2}|v|^2_{BMO}$$

De plus, la constante C ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes des $\tilde\Phi_k$ et $\tilde\Psi_k$ dans C_0^∞.

Preuve de la proposition 2.2.3. Nous utilisons une décomposition diadique de Littlewood-Paley standard : soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, vérifiant $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1/2$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$. Posons $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$. φ est supportée dans la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$, et pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, $1 = \psi(\xi) + \sum_{k\geq 0} \varphi(2^{-k}\xi)$. Pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, posons alors $\Delta_k u = \varphi(2^{-k}D)u$ pour $k \geq 0$ et $\Delta_{-1}u = \psi(D)u$. Nous noterons $S_k u = \sum_{j=-1}^{k-1} \Delta_j u$. Le produit de deux fonctions f et g se décompose en :

$$fg = T_f g + T_g f + R(f,g)$$

où

$$T_f g = \sum_{k\geq 2} S_{k-2} f \Delta_k g$$

$$T_g f = \sum_{k\geq 2} S_{k-2} g \Delta_k f$$

et

$$R(f,g) = \sum_{|k-k'|\leq 2} \Delta_{k'} f \Delta_k g$$

Preuve du a) : Commençons par examiner le terme $T_g f$ (hautes fréquences en f, basses fréquences en g). Le spectre de chaque terme $S_{k-2} f \Delta_k g$ est supporté dans une couronne $2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}$. En considérant une fonction test $h \in \mathcal{S}$, $|h|_{L^2} \leq 1$, il vient

$$\begin{aligned} |<\sum_{k\geq 2} S_{k-2} g \Delta_k f, h>| &\leq \sum_{|k-k'|\leq 3} <|S_{k-2} g \Delta_k f|, |\Delta_{k'} h|> \\ &\leq C \sum_{|k-k'|\leq 3} <|2^{ks} \Delta_k f 2^{-ks} S_{k-2} g|, |\Delta_{k'} h|> \\ &\leq C(\sum_k |2^{ks}\Delta_k f|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{|k-k'|\leq 5} |2^{-ks} S_k g \Delta_{k'} h|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Lorsque $s > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{|k-k'|\leq 5} |2^{-ks} S_k g \Delta_{k'} h|_{L^2}^2 &\leq C \sum_{|k-k'|\leq 5} |2^{-ks} S_k g|_{L^\infty}^2 |\Delta_{k'} h|_{L^2}^2 \\ &\leq C |\langle D\rangle^{-s} g|_{L^\infty}^2 \sum_k |\Delta_k h|_{L^2}^2 \ \leq \ C |\langle D\rangle^{-s} g|_{L^\infty}^2 |h|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\sum |2^{ks} \Delta_k f|_{L^2}^2 \leq C |f|_{H^s}^2$$

nous en déduisons immédiatement

$$|T_g f|_{L^2} \leq C |f|_{H^s} |\langle D\rangle^{-s} g|_{L^\infty}$$

Pour le terme de reste $R(f,g)$ (même ordre de fréquences pour f et g), il faut introduire les estimations du lemme 2.2.4. C'est ici que l'on voit pourquoi $\langle D\rangle^{-s} g$ doit être bornée dans BMO. Considérons une fonction test $h \in \mathcal{S}$ vérifiant $|h|_{L^2} \leq 1$. Le spectre de chaque terme $\Delta_{k'} f \Delta_k g$ est supporté dans une boule $|\xi| \leq 2^{k+4}$ lorsque $|k - k'| \leq 2$, et il en résulte que :

$$\begin{aligned} |<\sum_{|k-k'|\leq 2} \Delta_{k'} f \Delta_k g, h>| &\leq \sum_{|k-k'|\leq 2} <|\Delta_{k'} f \Delta_k g|, |S_{k+5} h|> \\ &\leq C \sum_{|k-k'|\leq 2} <|2^{k's} \Delta_{k'} f 2^{-ks} \Delta_k g|, |S_{k+5} h|> \\ &\leq C(\sum_k |2^{ks} \Delta_k f)|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k |2^{-ks} \Delta_k g S_{k+5} h|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour tout $s \in \mathbf{R}$ et $k \geq 0$, posons $\tilde{\phi}_k(\xi) = (2^{-2k} + |2^{-k}\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \phi(2^{-k}\xi)$ et $\tilde{\Delta}_k u = \tilde{\phi}_k(D)u$, de sorte que $2^{-ks}\Delta_k g = \tilde{\Delta}_k(\langle D\rangle^{-s} g)$. Les fonctions $\tilde{\Phi}_k(\xi) = \tilde{\phi}_k(2^k\xi)$ sont uniformément bornées dans C_0^∞ et supportées dans une couronne fixe. Nous définissons ainsi une décomposition diadique en couronnes légèrement modifiée, mais vérifiant toujours la bonne propriété de sommation :

$\sum |\tilde{\phi}_k(\xi)|^2 \leq C$. Notons $S_{k+5}h = \tilde{S}_k h$. Nous sommes ainsi amenés à estimer $\sum_k |\tilde{\Delta}_k(\langle D\rangle^{-s}g)\tilde{S}_k h|^2_{L^2}$. Or ce terme entre précisément dans le cadre du lemme 2.2.4 :

$$\sum_k |\tilde{\Delta}_k(\langle D\rangle^{-s}g)\tilde{S}_k h|^2_{L^2} \leq C|h|^2_{L^2}|\langle D\rangle^{-s}g|^2_{BMO}$$

enfin,

$$\sum_{k\geq 0} |2^{ks}\Delta_k f|^2_{L^2} \leq C|f|^2_{H^s}$$

d'où l'estimation désirée :

$$|R(f,g)|_{L^2} \leq C|f|_{H^s}|\langle D\rangle^{-s}g|_{BMO}$$

Pour le terme $T_f g$ (basses fréquences en f et hautes fréquences en g), nous procédons de façon semblable avec une fonction test $h \in \mathcal{S}$, $|h|_{H^s} \leq 1$, et en remarquant que le spectre de chaque terme $S_{k-2}f\Delta_k g$ est supporté dans une couronne $2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}$:

$$\begin{aligned}
|<\sum_{k\geq 2} S_{k-2}f\Delta_k g, h>| &\leq C \sum_{|k-k'|\leq 3} <|S_{k-2}f\Delta_k g|, |\Delta'_k h|> \\
&\leq C \sum_{|k-k'|\leq 3} <|S_{k-2}f 2^{-ks}\Delta_k g|, |2^{k's}\Delta'_k h|> \\
&\leq C(\sum_{k\geq 2} |S_{k-2}f 2^{-ks}\Delta_k g|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k\geq 0} |2^{ks}\Delta_k h|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Comme précédemment (en notant cette fois $\tilde{S}_k = S_{k-2}$, et sans changer la définition des $\tilde{\Delta}_k$), nous appliquons le lemme 2.2.4 :

$$\sum_{k\geq 2} |S_{k-2}f 2^{-ks}\Delta_k g|^2_{L^2} = \sum_k |\tilde{S}_k f\tilde{\Delta}_k(\langle D\rangle^{-s}g)|^2_{L^2} \leq C|f|^2_{L^2}|\langle D\rangle^{-s}g|^2_{BMO}$$

Enfin,

$$\sum_{k\geq 0} |2^{ks}\Delta_k h|^2_{L^2} \leq C|h|^2_{H^s}$$

et il vient

$$|T_f g|_{H^{-s}} \leq C|f|_{L^2}|\langle D\rangle^{-s}g|_{BMO}$$

ce qui achève la preuve du a) de la proposition 2.2.3. La preuve du b) est symétrique.

3. Champs de jauge

3.1. Formalisme géométrique. — Considérons un espace temps $\mathbf{E}$ de dimension $n+1$ (le cas qui nous intéresse est $n = 3$, mais le propos reste valable pour tout entier $n \geq 3$) que nous dotons d'une métrique Lorentzienne $\mathbf{g}$ de signature $(+,-,\cdots,-)$. Nous supposons au moins[1] que $(\mathbf{E},\mathbf{g})$ est régulier (C^∞) et orientable, et qu'il est alors possible, ne serait-ce que localement, de définir une fonction temps t, C^∞, qui génère un feuilletage régulier en hypersurfaces $\Sigma_t = \{x \in \mathbf{E}/t(x) = t\}$ de type espace (le gradiant $Grad\ t$ de la fonction temps et le champ N_R des vecteurs normaux unitaires aux Σ_t orientés vers le futur doivent vérifier $\mathbf{g}(Grad\ t, Grad\ t) \geq Cte > 0$ et $\alpha = \mathbf{g}(N_R, Grad\ t) \leq Cte$). Nous pouvons alors identifier, au moins localement, $\mathbf{E} \overset{\mathbf{diff}}{\longleftrightarrow} \mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}$, où $\mathbf{\Sigma}$ est une variété de dimension n difféomorphe à chaque $\mathbf{\Sigma}_t$, et donner un cadre causal à notre étude. Nous avons alors le choix entre deux hypothèses raisonnables :

1 - Nous nous contentons de travailler localement, sur un domaine causal inclu dans un ouvert où la fonction temps est bien définie, sur une tranche de temps finie. Nous évitons délibérément

[1] Nous souhaitons ici conserver un maximum de généralité ayant dans l'idée d'autoriser, dans des travaux ultérieurs, des oscillations de la métrique de base

toute discussion sur la structure de Σ hors d'un compact donné. Cette hypothèse est d'autant plus pertinente que les équations que nous avons à résoudre respectent toutes le principe de "vitesse finie de propagation". On peut envisager de procéder ultérieurement au recollement de solutions obtenues sur des domaines causaux adjascents. D'autre part, l'optique géométrique est d'ordinaire mise à contribution pour préciser la description de phénomènes propagatoires sur des tranches de temps courtes. Nous assimilons les solutions oscillantes que nous construisons à une perturbation locale de champs réguliers préexistants (background).

2 - Si l'on désire vraiment travailler globalement en espace, il faut faire en plus des hypothèses d'hyperbolicité globales (La fonction temps définit une coordonnée globale, et les Σ_t réalisent un feuilletage de type espace sur $\mathbf{E}$ tout entier. Nous supposons en particulier que $0 < cte \leq \alpha^2(y,t) \leq Cte$ uniformément pour tout $y \in \mathbf{\Sigma}$ et localement uniformément pour $t \in \mathbf{R}$) et de platitude à l'infini (à l'exterieur d'un compact donné, Σ est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ privé d'une boule). L'important est de pouvoir disposer de bonnes estimations a priori pour l'équation des ondes et l'equation de Dirac sur toute tranche de temps finie.

Nous supposons une de ces hypothèses satisfaite. Un point de $\mathbf{E}$ sera naturellement désigné par $x = (t,y)$, $t \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{\Sigma}$. Lorsque nous aurons besoin de se référer à un choix (local) de coordonnées sur $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$, les indices latins $1 \leq i \leq n$ se rapporterons à $\mathbf{\Sigma}$ seule, les indices grecs $0 \leq \nu \leq n$ à $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$ tout entier. Nous utilisons la convention de sommation habituelle sur les indices répétés. La métrique image sur $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$ sera elle aussi noté $\mathbf{g}$. Pour tout choix de coordonnées locales y^i sur Σ, nous utiliserons systématiquement sur $T^*(\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma})$ des coordonnées ξ^μ de la forme

$$\xi^0 = dt, \quad \text{et} \quad \xi^i = dy^i + \beta^i dt, \; i = 1, \cdots, n$$

duales aux champs de vecteurs

$$\partial_0 = \alpha N_R = \frac{\partial}{\partial t} - \beta^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \text{et} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, \; i = 1, \cdots, n$$

De telles coordonnées restent partout adaptées au feuilletage que nous avons fait de $\mathbf{E}$, et permettent d'écrire la métrique sous sa forme scindée :

$$g(t,y) = \alpha^2(t,y)(\xi^0)^2 + g_{ij}(t,y)\xi^i\xi^j \tag{5}$$

Le scalaire $\alpha(t,y)$ et le vecteur $\beta(t,y)$ sont respectivement nommés "lapse" et "shift" du feuilletage. Ils correspondent à la projection du vecteur tangent à la ligne de temps respectivement sur la normale de Σ_t et sur l'espace tangent à Σ_t (le cas $\beta = 0$ correspond à des coordonnées $y(t)$ de Σ_t transportées par le flot de $Grad\ t$). Nous définissons alors $T^*\mathbf{\Sigma} = Vect(\xi^i, i = 1, \cdots, n)$, fibré cotangent à $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$. Nous posons $\mathbf{g}_\Sigma(t,y) = -g_{ij}(t,y)\xi^i\xi^j$ la métrique Riemannienne induite par $\mathbf{g}$ sur Σ. Nous notons $g^{\nu\mu}$ les éléments de la matrice $\mathbf{g}^{-1}$, vérifiant $g^{\nu\mu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$. Nous utilisons la convention de "relèvement" des indices $A^\nu = g^{\nu\mu}A_\nu$ (on passe d'une 1-forme $A_\nu\xi^\nu$ à un vecteur $A^\nu\partial_\nu$ associé par la métrique). Nous utilisons systématiquement la notation

$$T = \nabla$$

pour désigner l'opérateur de dérivation covariante lié à la métrique $\mathbf{g}$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$. Sur un champ de vevteur $V = V^\nu\partial_\nu$, il vient $\nabla_\mu V = (\nabla_\mu V^\nu)\partial_\nu$ avec

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + C^\nu{}_{\lambda\mu} V^\lambda$$

où les coefficients de connexion sont donnés par

$$C^\mu{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma}[\partial_\nu g_{\lambda\gamma} + \partial_\lambda g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma g_{\lambda\nu}]$$

Pour une 0-forme χ de $\Lambda^0(\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma})$, $T\chi = \nabla\chi = d\chi$, où d désigne l'opérateur de dérivation exterieure. En coordonnées locales,

$$\nabla\chi = \partial_\nu\chi\xi^\nu$$

Pour une 1-forme $A = A_\nu \xi^\nu$, il vient $\nabla_\mu A = (\nabla_\mu A_\nu)\xi^\nu$, avec

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - C^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda$$

La dérivation covariante ainsi construite est faite pour vérifier $\nabla \mathbf{g} = 0$, c'est à dire pour tous indices, $\nabla_\nu g_{\mu\lambda} = 0$. Nous notons

$$R = \nabla^\star$$

l'adjoint de ∇ pour la métrique $\mathbf{g}$. Pour une 1-forme $A = A_\nu \xi^\nu$ de $\Lambda^1(\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma})$, $RA = \nabla^\star A = d^\star A$ où $d^\star$ désigne l'adjoint de d pour la métrique $\mathbf{g}$, soit en coordonnées locales

$$RA = \nabla^\nu A_\nu = g^{\nu\mu} \nabla_\nu A_\mu$$

Le Dalembertien associé à g sur $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$ est défini par

$$\Box = \nabla^\star \nabla = RT$$

et en coordonnées locales par

$$\Box = \nabla^\nu \nabla_\nu = \mathbf{g}^{\nu\mu} \nabla_\nu \nabla_\mu = \alpha^{-2} (\nabla_0)^2 - g_\Sigma^{ij} \nabla_i \nabla_j$$

Nous renvoyons à [**16**] pour une présentation générale de l'équation des ondes sur un espace temps courbe (globalement hyperbolique et asymptotiquement plat).

Considérons un groupe de Lie (compact) $\mathbf{G}$, que nous nommerons ici "**groupe de jauge**", et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous notons $[,]$ le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Soit $\mathbf{P}$ un fibré principal (C^∞) ayant pour variété de base l'espace temps $\mathbf{E}$ et pour structure de groupe $\mathbf{G}$.

Nous appelons "**connexion de Yang-Mills**" une 1-forme $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{P}$. Moyennant la donnée d'une section de référence s sur $\mathbf{P}$, que nous désignons ensuite par le terme de "**jauge**", il est toujours possible d'identifier $\mathbf{A}$ à une 1-forme de $\Lambda^1(\mathbf{E})$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Réciproquement, nous désignons par "**condition de jauge**" sur les 1-formes de $\mathbf{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ toute condition permettant de se référer de façon univoque aux 1-formes sur $\mathbf{P}$. Un "**changement de jauge**" est caractérisé par la donnée d'une application u de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$. Le choix d'une jauge sur $\mathbf{P}$ et d'un feuilletage sur $\mathbf{E}$ nous permet donc de représenter sans ambiguïté une 1-forme $\mathbf{A}$ de $\mathbf{P}$ par une 1-forme A de $\Lambda^1(\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma})$ (**potentiel de Yang-Mills**) à valeurs dans $\mathfrak{g}$:

$$\mathbf{A}(x) \ \stackrel{s}{\rightarrow}\ A(x)dx = A_0(x)\xi^0 + A_i(x)\xi^i = A_t(x)dt + A_\Sigma(x)dy$$

Un calcul immédiat nous donne $A_i = (A_\Sigma)_i$ et $A_0 = A_t - \beta^i (A_\Sigma)_i$. Etant donné un couple de 1-formes a et A à valeurs dans $\mathfrak{g}$, nous posons

$$d_a A = dA + [a, A]$$

Nous appelons "**champ de Yang-Mills**" une 2-forme Γ de $\Lambda^2(\mathbf{E})$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, correspondant à la courbure d'une connexion de Yang-Mills $\mathbf{A}$, et donnée par l'expression

$$\Gamma(A) = d_A A = dA + [A, A]$$

En représentation $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$, la composante de Γ conormale à $\mathbf{\Sigma}$ est désigné "champ électrique", par analogie avec l'électromagnétisme (cas où $\mathbf{G} = U(1)$) :

$$\mathcal{E}_i(A) = \Gamma_{0i}(A) = \nabla_0 A_i - \nabla_i A_0 + [A_0, A_i]$$

Les composantes de Γ cotangentes à $\mathbf{\Sigma}$ sont données par le "champ magnétique"

$$\epsilon_{ijk} \mathcal{B}_k(A) = \Gamma_{ij}(A) = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i + [A_i, A_j]$$

La dynamique du champ de Yang-Mills peut donc être décrite, dans le cadre du feuilletage spatio-temporel $\mathbf{R} \times \mathbf{\Sigma}$, par la donnée du champ cotangent au feuilletage A_Σ et par celle du "champ électrique". Nous définissons l'opérateur de Yang-Mills $\mathbf{L}$ par

$$\mathbf{L}(A) = d_A{}^\star \Gamma(A) = d_A{}^\star d_A A$$

où l'opérateur $d_A{}^\star$ désigne l'adjoint de d_A pour la métrique g. En coordonnées locales,

$$\mathbf{L}_\mu(A) = \nabla^\nu \nabla_\nu A_\mu - \nabla^\nu \nabla_\mu A_\nu + 2[A^\nu, \nabla_\nu A_\mu] - [A^\nu, \nabla_\mu A_\nu] - [A_\mu, \nabla^\nu A_\nu] + [A^\nu, [A_\nu, A_\mu]]$$

Sous l'action d'un changement de jauge $u\ :\ \mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{G}$,

$$A\ \rightsquigarrow\ A'=u^{-1}Au+u^{-1}du$$

tandis que $\Gamma\ \rightsquigarrow\ \Gamma'=u^{-1}\Gamma u$, de même que $\mathbf{L}(A)\ \rightsquigarrow\ u^{-1}\mathbf{L}(A)u$. Il vient naturellement l'**identité de Bianchi** :

$$d_A{}^\star\mathbf{L}(A)=d_A{}^\star d_A{}^\star d_AA\equiv 0 \tag{6}$$

et l'identité duale :

$$d_A{}^\star d_Ad_A\equiv 0 \tag{7}$$

Nous notons de même $LA=d^\star dA$, qui correspond à la partie linéaire de $\mathbf{L}(A)$. En coordonnées locales

$$(LA)_\mu=\nabla^\nu\nabla_\nu A_\mu-\nabla^\nu\nabla_\mu A_\nu=\Box A_\mu-\nabla_\mu\nabla^\nu A_\nu-(\mathcal{R}ic.)_\mu{}^\nu A_\nu \tag{8}$$

et nous réécrirons

$$L=RT-TR-(\mathcal{R}ic.)$$

L'opérateur $(\mathcal{R}ic.)_\mu{}^\nu$ désigne l'opérateur de Ricci associé à la métrique g. Les identités (6) et (7) donnent

$$RLA\ =\ d^\star d^\star dA=0 \tag{9}$$

et

$$LT\chi\ =\ d^\star dd\chi=0 \tag{10}$$

Nous associons à $\mathbf{P}$ un fibré vectoriel complexe (ou réel) par le biais d'une représentation unitaire (respectivement orthogonale) r de $\mathbf{G}$. Nous désignons par "**champ scalaire**" une section ϕ de ce fibré. Nous représentons un tel champs ϕ par une 0-forme de $\mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}$ à valeurs dans $\mathbf{C}^J$ (ou $\mathbf{R}^J$). Nous notons $d_A\phi=d\phi+r'(1).A\phi$. Remarquons que pour une 0-forme, $d^\star d\phi=\Box\phi$. Nous noterons $\bar\phi={}^t\phi^*$ le conjugué hermitien de ϕ (ou le transposé dans le cas réel). Nous posons $|\phi|=(\bar\phi\phi)^{\frac12}$.

Nous supposons qu'il existe sur $\mathbf{E}$ une structure spinorielle globale, i.e. un fibré $\mathbf{SE}$ ayant pour base $\mathbf{E}$ et pour structure de groupe Spin$(n+1)$ (en dimension n=3, ceci découle directement de l'hypothèse d'hyperbolicité globale, consulter par exemple [**17**] pour une description précise des espaces temps globalement hyperboliques de dimension 3+1 et de leur structure spinorielle). Un "**champ de spineurs**" est une section ψ d'un fibré vectoriel sur $\mathbf{E}$ dont les fibres sont de la forme $\mathbf{C}^K\times\mathbf{C}^L$, où $\mathbf{C}^K$ ($K=2^{(n+1)/2}$ si n est impair) correspond à la représentation canonique du groupe Spin$(n+1)$, tandis que $\mathbf{C}^L$ correspond à une représentation unitaire ρ de $\mathbf{G}$. Nous représentons un tel champ par une 0-forme sur $\mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}$ à valeurs dans $\mathbf{C}^K\times\mathbf{C}^L$. Nous considérons des matrices de Dirac γ^ν, $\nu=0,1,\cdots,n$, vérifiant dans toutes coordonnées locales :

$$\gamma^\nu\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\nu\mu}Id_K \tag{11}$$

L'opérateur de Dirac se définit alors par

$$\mathcal{D}=\gamma^\nu\nabla_\nu$$

et

$$\mathcal{D}_A=\mathcal{D}+\gamma^\nu\rho'(1).A_\nu$$

Compte tenu de (11), nous vérifions immédiatement que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2 &= \gamma^\mu\nabla_\mu\gamma^\nu\nabla_\nu\\ &= \Box Id_K+\tfrac14 tr(\mathcal{R}ic.)\end{aligned}$$

où $tr(\mathcal{R}ic.)=(\mathcal{R}ic.)^\nu{}_\nu$ désigne la courbure scalaire (en d'autres termes, l'opérateur de Dirac est construit, à un terme de courbure près, comme une "racine carrée" du d'Alambertien). L'adjoint d'un champ ψ est donné par $\bar\psi={}^t\psi^*\kappa$ où κ est la matrice $K\times K$ vérifiant $\kappa\gamma^\mu\kappa^{-1}={}^t(\gamma^\mu)^*$.

Nous posons $|\psi|^2 = {}^t\psi^*\psi$. Si l'on travail avec des coordonnées adaptées au feuilletage $\mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}$ vérifiant (5), il est intéressant de fixer $\kappa = \alpha\gamma^0$. Les conditions (11) deviennent alors

$$ {}^t(\gamma^0)^* = \gamma^0 = \alpha^{-2}(\gamma^0)^{-1} $$

et

$$ \begin{cases} {}^t(\gamma^i)^* = -\gamma^i \\ \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}Id_K \end{cases} $$

Pour un tel choix de matrices de Dirac, adapté au feuilletage $\mathbf{R}\times\mathbf{\Sigma}$, il vient

$$ \mathcal{D} = \gamma^0\nabla_0 - \mathcal{D}_\Sigma $$

où $\mathcal{D}_\Sigma = -\gamma^i\nabla_i$ vérifie $\mathcal{D}^2_\Sigma = g^{ij}_\Sigma\nabla_i\nabla_j\, Id_K + \frac{1}{4}tr(\mathcal{R}ic.|\Sigma)$, le terme $tr(\mathcal{R}ic.|\Sigma)$ correspondant à la courbure scalaire de Σ. Nous conservons ce choix de matrices de Dirac dans le reste de l'article, et renvoyons à [**18**] pour une étude plus détaillée de l'opérateur de Dirac sur un espace temps globalement hyperbolique et assymptotiquement plat.

3.2. Le système modèle (YM). — Le potentiel de Yang-Mills, le champ scalaire et le champ de spineurs sont couplés entre eux par les équations d'Euler Lagrange associées à un Lagrangien Λ invariant par transformations de Lorentz (symétrie externe) et par changements de jauge sur A (symétrie interne) :

$$ \Lambda = \Gamma^{\nu\mu}(A)\Gamma_{\nu\mu}(A) + (d_A\bar{\phi})^\nu(d_A\phi)_\nu + i(\bar{\psi}(\mathcal{D}_A\psi) - (\mathcal{D}_A\bar{\psi})\psi) + \Lambda_{int.}(\phi,\psi) $$

En accord avec [**7**], nous retiendrons pour le terme de couplage :

$$ \Lambda_{int.} = \bar{\psi}\mathbf{C}\psi\phi + \bar{\phi}\bar{\psi}^t\mathbf{C}^*\psi + \mathbf{c}\bar{\phi}\phi $$

où l'invariance de jauge du couplage est garantie par la relation

$$ {}^t\rho'(1)^*\mathbf{C} + \mathbf{C}\rho'(1) + \mathbf{C}r'(1) = 0 $$

(ceci autorise un couplage nul). Les équations sont semi-linéaires d'ordre 2 pour le potentiel de Yang-Mills A et le champ scalaire ϕ, d'ordre 1 pour le champ de spineurs ψ, et sont elles aussi invariantes par transformations de Lorentz ou par changements de jauge :

$$ (Y.M.)\ :\quad \begin{cases} d_A{}^\star d_A A &= \mathcal{J} \\ d_A{}^\star d_A\phi &= \mathcal{C} \\ \mathcal{D}_A\psi &= \mathcal{K} \end{cases} $$

Le terme de courant

$$ \mathcal{J}^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\rho'(1)\psi + (\bar{\phi}^t r'(1)^*(d_A\phi)^\mu + (d_A\bar{\phi})^\mu r'(1)\phi) $$

doit être compatible avec l'identité de Bianchi : $d_A{}^\star\mathcal{J} = 0$, et sous l'action d'un changement de jauge u : $\mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{J}' = u^{-1}\mathcal{J}u$. Les termes

$$ \mathcal{C} = -\bar{\psi}^t\mathbf{C}^*\psi - \mathbf{c}(\bar{\phi}\phi)\phi $$

et

$$ \mathcal{K} = i(\mathbf{C}\phi + \bar{\phi}^t\mathbf{C}^*)\psi $$

correspondent à un couplage éventuel entre ϕ et ψ. Le lecteur intéressé trouvera le détail de divers couplages physiquement pertinents dans [**7**], qui donne par ailleurs des résultats d'existence de solutions régulières pour $(Y.M.)$.

En séparant les termes linéaires et non-linéaires, nous nous ramenons à étudier un système schématique de la forme :

$$ (YM)\ :\quad \begin{cases} LA &= F(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi) \\ \Box\phi &= G(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi) \\ \mathcal{D}\psi &= h(A,\phi,\psi) \end{cases} $$

Pour récapituler, la partie linéaire est donnée par les opérateurs

$$ (LA)_\mu = \nabla^\nu\nabla_\nu A_\mu - \nabla^\nu\nabla_\mu A_\nu,\ \Box\phi = \nabla^\nu\nabla_\nu\phi \ \text{ et }\ \mathcal{D}\psi = \gamma^\nu\nabla_\nu\psi $$

La partie non-linéaire est donnée par des fonctions

$$F(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi) \;=\; F^I(A,\partial A)+F^{II}(\phi,\partial\phi)+f(A,\phi,\psi)$$

et

$$G(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi) \;=\; G^I(A,\partial\phi)+G^{II}(\partial A,\phi)+g(A,\phi,\psi)$$

où

$$\begin{array}{rcl} F^I(A,\partial A)_\mu &=& 2[\nabla_\nu A_\mu, A^\nu]+[A^\nu,\nabla_\mu A_\nu]+[A_\mu,\nabla^\nu A_\nu] \\ F^{II}(\phi,\partial\phi)_\mu &=& \bar{\phi}^t r'(1)^*(\nabla_\mu\phi)+(\nabla_\mu\bar{\phi})r'(1)\phi \\ f(A,\phi,\psi) &=& [[A_\nu,A_\mu],A^\nu]+\bar{\phi}^t r'(1)^*(r'(1).A_\mu)\phi+(r'(1).A_\mu)\bar{\phi}r'(1)\phi+i\bar{\psi}\gamma_\mu\rho'(1)\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} G^I(A,\partial\phi) &=& -2r'(1).A_\nu\nabla^\nu\phi \\ G^{II}(\partial A,\phi) &=& -r'(1).\nabla^\nu A_\nu\phi \\ g(A,\phi,\psi) &=& -(r'(1).A^\nu)(r'(1).A_\nu)\phi-\bar{\psi}^t\mathbf{C}^*\psi-\mathbf{c}(\bar{\phi}\phi)\phi \end{array}$$

et

$$h(A,\phi,\psi)=-\rho'(1).A_\nu\gamma^\nu\psi+i(\mathbf{C}\phi+\bar{\phi}^t\mathbf{C}^*)\psi$$

Les fonctions F^I, F^{II}, G^I et G^{II} sont bilinéaires à coefficients C^∞. Les fonctions $f(A,\phi,\psi)$ et $g(A,\phi,\psi)$ sont des polynômes de degré 3 à coefficients C^∞, et de degré au plus 2 en ψ. Enfin le terme $h(A,\phi,\psi)$ est un polynôme de degré 3 à coefficients C^∞, et de degré 1 en ψ. Avec les identités (6), (7) et (9), il s'agit des seules hypothèses de structure dont nous avons réellement besoin pour l'analyse des équations.

Ainsi formulé, $(Y.M.)$ est représentatif des équations "**à jauge libre**" : la donnée d'un potentiel de Yang-Mills A vérifiant le système engendre toute une classe de solutions par changement de jauge. Sous l'action d'un tel changement de jauge caractérisé par une application $u\;:\;\mathbf{R}\times\sigma\to\mathbf{G}$, nous transformons

$$\begin{array}{rcl} A &\rightsquigarrow& A'=u^{-1}Au+u^{-1}du \\ \phi &\rightsquigarrow& \phi'=r(u)\phi \\ \psi &\rightsquigarrow& \psi'=\rho(u)\psi \end{array}$$

L'invariance de jauge des équations se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} LA'-F(A',\partial A',\phi',\partial\phi',\psi') &=& u^{-1}(LA-F(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi))u \\ \Box\phi'-G(A',\partial A',\phi',\partial\phi',\psi') &=& r(u)(\Box\phi-G(A,\partial A,\phi,\partial\phi,\psi)) \\ \mathcal{D}\psi'-h(A',\phi',\psi') &=& \rho(u)(\mathcal{D}\psi-h(A,\phi,\psi)) \end{array}\right.$$

On lève l'indétermination sur le potentiel A en se donnant une condition de jauge, qui apparaît sous la forme d'une équation supplémentaire $J(A)=0$, où J s'identifie d'ordinaire à un opérateur d'ordre 1. Chaque solution du système (YM) à jauge fixée désigne de façon univoque une classe de solution du système à jauge libre.

Ces propriétés d'invariance par changements de jauge font que le système (YM) semble a priori "mal" déterminé :

- sous-déterminé à jauge libre,
- sur-déterminé à jauge fixée. Compte tenu de cette "mauvaise" détermination, le système (YM) s'apparente plus à un système quasi-linéaire qu'à un vrai système semi-linéaire. Toute la difficulté consiste à se placer dans des situations où il est techniquement possible de quotienter l'action du groupe de jauge sur les équations, et redonner au système son aspect hyperbolique semi-linéaire "bien déterminé".

La famille suivante est représentative[(2)] des conditions de jauge couramment utilisées pour étudier le problème de Cauchy sur le système (YM) :

$$J_\lambda(A)=\lambda\alpha^{-2}\nabla_0A_0-(1-\lambda)g_\Sigma^{ij}\nabla_iA_{\Sigma j}=0$$

où λ est un réel pris entre 0 et 1. On trouve aux extrémités la jauge de Coulomb pour $\lambda=1$ et la jauge temporelle pour $\lambda=0$. Les résultats d'existence de solutions peu régulières d'énergie

[(2)]seul le symbôle principal de J_λ est significatif, on ne change pas la nature de la jauge en lui ajoutant un second membre régulier où en modifiant sa partie linéaire d'ordre 0.

bornée obtenus dans [**8, 9**] (pour Yang-Mills seul ou pour le système plus simple de Maxwell-Klein-Gordon) utilisent la jauge de Coulomb pour mettre en valeur la structure algébrique des nonlinéarités du second membre. L'inconvénient de la jauge de Coulomb est qu'elle scinde le système en une partie elliptique et une partie hyperbolique, et demeure en définitive peu naturelle. En revanche, lorsque $\lambda \in]0,1[$, la condition de jauge $J_\lambda(A) = 0$ est transverse à $\mathbf{T}^*\mathbf{\Sigma}$, demeure invariante par changements de coordonnées locales sur $\mathbf{\Sigma}$, et semble mieux adapté à la résolution du problème de Cauchy avec des données initiales sur $\mathbf{\Sigma}$. L'opérateur L se transforme alors en un opérateur hyperbolique symétrisable, auquel on peut espérer appliquer des méthodes d'optique géométrique traditionnelles.

Enfin, on appelle jauge de Lorentz la condition médiane $J_{\frac{1}{2}}(A) = \frac{1}{2}RA = 0$. Si A vérifie la jauge de Lorentz, alors $LA = (\Box - \mathcal{R}ic.)A$, et apparaît sous forme d'un opérateur diagonal strictement hyperbolique. De plus la condition $RA = 0$ est invariante par changements de coordonnées sur $\mathbf{E}$, et donc indépendante du feuilletage causal choisi pour résoudre le problème de Cauchy (ce n'est en général pas le cas des autres conditions $J_\lambda,\ \lambda \in [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1])$. Le gros inconvéniant de cette jauge, du point de vue de l'analyse, est qu'elle semble occulter une partie de la régularité des solutions.

3.3. Résolution de (YM) à partir de données régulières. — Outre l'invariance de jauge, le système (YM) est sujet à un deuxième type de symétrie : l'invariance relativiste, i.e. l'invariance par transformation de Lorentz(3) sur $\mathbf{E}$. Sur le linéarisé du système, ces deux degrés de libérté, internes et externes, se traduisent respectivement par le fait que $L(\xi)$ n'est ni injectif, ni surjectif. Cependant, les identités de Bianchi (9) et (10), duales l'une de l'autre, relient les deux symétries et les rendent compatibles entre elles. L'exploitation combinée de (9) et (10) permet alors de remédier à la mauvaise détermination apparente du système.

Définition 3.3.1. — *Nous dirons qu'un système de la forme :*

$$(\mathcal{S}.Comp.)\ :\quad \begin{cases} LA = F(A, \partial A, U) \\ \mathcal{C}(A, \partial A, U) = 0 \end{cases}$$

est exterieurement "compatible" avec L si et seulement si il existe des formes bilinéaires Q et Q' telles que

$$RF\ =\ Q(A, LA - F) + Q'(U, \mathcal{C})$$

Proposition 3.3.1. — *(Hyperbolicité de l'opérateur L) Soit*

$$(\mathcal{S}.Comp.)\ :\quad \begin{cases} LA = F(A, \partial A, U) \\ \mathcal{C}(A, \partial A, U) = 0 \end{cases}$$

un système exterieurement compatible avec l'opérateur L. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i). (A, U) est solution régulière de $(\mathcal{S}.Comp.)$ en jauge de Lorentz.

ii). (A, U) est solution régulière du système hyperbolique :

$$(\mathcal{S}.Hyp.)\ :\quad \begin{cases} \Box A - (\mathcal{R}ic.)A = F(A, \partial A, U) \\ \mathcal{C}(A, \partial A, U) = 0 \end{cases}$$

et satisfait à $t = 0$ les contraintes

$$(12)\qquad \begin{cases} \nabla^i(\nabla_i\, A_{0|t=0} - \nabla_0\, A_{i|t=0})\ =\ F_0(A_{|t=0}, \partial A_{|t=0}, U_{|t=0}) \\ RA_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

(3)il convient de rappeler que les changements de coordonnées sont assimilables à des changements de jauge sur la métrique $\mathbf{g}$, qui se superposent aux changements de jauge sur les connexions de Yang-Mills

Preuve : i). implique ii). de façon immédiate. Prouvons la proposition réciproque : à défaut de pouvoir résoudre directement $(\mathcal{S}.Comp.)$, supposons que nous disposons sur un intervalle de temps $[0,t]$ d'une solution (A,U) régulière ($A \in C^0([0,t],H^s) \cap C^1([0,t],H^{s-1})$, $s \geq \frac{n}{2}+\frac{1}{2}$) du système

$$(\mathcal{S}.Hyp.)\ :\quad \begin{cases} \Box A - (\mathcal{R}ic.)A = (L+TR)A = F(A,\partial A,U) \\ \mathcal{C}(A,\partial A,U) = 0 \end{cases}$$

avec des données de Cauchy compatibles en jauge de Lorentz, vérifient

$$\begin{cases} \nabla^i(\nabla_i A_{0|_{t=0}} - \nabla_0 A_{i|_{t=0}}) \ = \ F_0(A_{|_{t=0}}, \partial A_{|_{t=0}}, U_{|_{t=0}}) \\ RA_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

Nous calculons alors :

$$\nabla_0(RA_{|t=0}) = (\Box A_{0|t=0} - (\mathcal{R}ic.)_0{}^\nu A_{\nu|t=0}) - \nabla^i(\nabla_i A_{0|_{t=0}} - \nabla_0 A_{i|_{t=0}}) = 0$$

Puisque $RL = R(\Box - \mathcal{R}ic.) - RTR = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \Box(RA) &= RTRA \\ &= R(\Box - \mathcal{R}ic.)A \\ &= RF(A,\partial A,U) \end{aligned}$$

D'autre part, la compatibilité du système est donnée par une identité de type

$$RF(A,\partial A,U) \ = \ Q(A, LA-F) + Q'(U,\mathcal{C}) \ = \ -Q(A,T(RA))$$

où Q et Q' sont deux formes bilinéaires données. Il en résulte que (RA) est solution du système :

$$\begin{cases} \Box(RA) \ = \ -Q(A,T(RA)) \\ (RA)_{|t=0} = 0 \\ \partial_t(RA)_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

Puisque Q est supposée bilinéaire et que $A \in C^0([0,t],H^s) \cap C^1([0,t],H^{s-1})$ avec $s \geq \frac{n}{2}+\frac{1}{2}$, nous disposons pour cette équation d'ondes de l'estimation a priori suivante :

$$|RA|_{L^\infty([0,t],H^s)} + |\nabla_0(RA)|_{L^\infty([0,t],H^{s-1})} \leq C(|RA_{|t=0}|_{H^s} + |\nabla_0(RA)_{|t=0}|_{H^{s-1}})$$

Vu la nullité des données initiales, il en résulte que l'unique solution est $RA \equiv 0$ sur $[0,t]$. Le système $(\mathcal{S}.Hyp.)$ propage donc naturellement la jauge de Lorentz. Mais alors

$$\Box A - (\mathcal{R}ic.)A \ = \ LA + TRA \ = \ LA$$

et il vient naturellement que

$$(\mathcal{S}.Hyp.) = (\mathcal{S}.Comp.)$$

Lorsque $(\mathcal{S}.Comp.)$ est compatible, invariant par changements de jauge, et que nous disposons de résultats d'existence pour le système hyperbolique $(\mathcal{S}.Hyp.)$, la proposition 3.3.1 permet de résoudre le problème de Cauchy pour $(\mathcal{S}.Comp.)$ dans n'importe quelle jauge transverse de type J_λ :

Proposition 3.3.2. — *(Bonnes conditions de jauge pour l'opérateur L) Soit $E(\chi)$ une famille de transformations dépendant d'un paramètre χ à valeurs dans $\mathcal{G}$, qui tansforme*

$$A \ \overset{E(\chi)}{\rightsquigarrow} \ A' \ = \ T\chi \ + \ A \ + \ e(A,\chi)$$

où e est une fonction analytique vérifiant $e(A,0) = 0$ et linéaire en A. Si le système

$$(\mathcal{S}.Comp.)\ :\quad \begin{cases} LA = F(A,\partial A,U) \\ \mathcal{C}(A,\partial A,U) = 0 \end{cases}$$

est exterieurement compatible avec l'opérateur L et invariant sous l'action de $E(\chi)$, alors la proposition i). implique la proposition ii). :

i). Toutes données initiales $(A, \nabla_0 A, U)_{|t=0}$, $|(A, \nabla_0 A)_{|t=0}|_s \leq \delta$, $s \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, se prolongent sur un intervalle $[0, t_0(\delta)]$, $0 < t(\delta)$, en une unique solution (A, U), $A \in C^0([0, t_0], H^s) \cap C^1([0, t_0], H^{s-1})$ du système hyperbolique

$$(\mathcal{S}.Hyp.) \ : \quad \begin{cases} \Box A - (\mathcal{R}ic.)A = F(A, \partial A, U) \\ \mathcal{C}(A, \partial A, U) = 0 \end{cases}$$

avec $F(A, \partial A, U) \in C^0([0, t_0], H^{s-1}) \cap C^1([0, t_0], H^{s-2})$.

ii). Il existe un temps $0 < t_1(\delta) \leq t_0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, les données initiales $(A, \nabla_0 A, U)_{|t=0}$ qui vérifient $|(A, \nabla_0 A)_{|t=0}|_s \leq \delta$,$s \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, et

$$\begin{cases} \nabla^i(\nabla_i A_{0|t=0} - \nabla_0 A_{i|t=0}) \ = \ F_0(A_{|t=0}, \partial A_{|t=0}, U_{|t=0}) \\ J_\lambda A_{|t=0} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

se prolongent sur $[0, t_1(\delta)]$ en une unique solution (A, U), $A \in C^0([0, t_1], H^s) \cap C^1([0, t_1], H^{s-1})$ du système $(\mathcal{S}.Comp.)$ vérifiant la condition de jauge $J_\lambda A = 0$. De plus, si $F(A, \partial A, U)$ est linéaire en $(A, \partial A)$ et si $e(A, \chi)$ est linéaire en χ, alors $t_1 = t_0$.

Les résultats que nous venons d'énoncer restent vrais tant que nous disposons de bonnes estimations sur les termes non-linéaires, ce qui est le cas si nous considérons des données régulières. [**9**] montre que la situation se détériore brutalement en dessous du seuil que nous nous sommes fixés ($s \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$). Il apparaît, entre autres, que les conditions de jauge ne peuvent pas toujours être imposées globalement en espace. Nous éviterons par la suite ce genre d'inconvénients, en construisant des solutions oscillantes, qui restent très régulières à ε fixé, et dont les singularités s'accumulent, lorsque ε devient petit, dans des directions conormales à un feuilletage de $[0, t_0] \times \Sigma$ en hypersurfaces de type nul, fixé une fois pour toute. Notre objectif est de faire un usage systématique de la proposition 3.3.1, en compensant la perte de régularité à ε petit par un suivi détaillé de la géométrie des oscillations.

3.4. Problème de Cauchy oscillant pour le système (YM). — Notons $\mathcal{H}^s_\varepsilon(\Sigma)$ l'ensemble des familles dépendant du paramètre $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ dont la norme H^s est uniformément bornée. Notre résultat principal se résume alors de la sorte :

Théorème 1. — *Le problème de Cauchy oscillant sur (YM) est bien posé localement en temps dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^0_\varepsilon(\Sigma)$:*

Pour tout choix de phase θ non-dégénérée(4) engendrant un feuilletage régulier d'un domaine $[0, t_0] \times \Sigma$ en hypersurfaces de type nul, pour toutes données initiales compatibles(5)

$$(A, \phi, \psi)_\varepsilon(0, y) \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^0_\varepsilon(\Sigma) \ \ et \ \ (\partial_t A, \partial_t \phi)_\varepsilon(0, y) \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}_\varepsilon(\Sigma)$$

admettant un développement oscillant de phase θ/ε à l'ordre $\varepsilon^{\frac{M}{2}}$, $M \geq n$, et traduites dans une jauge J_λ, $\lambda \in [0, 1]$ abitraire, il existe un temps $0 < t_1 \leq t_0$, et un unique prolongement

$$(A, \phi, \psi)_\varepsilon \in C^0([0, t_1], \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^0_\varepsilon(\Sigma)) \cap C^1([0, t_1], \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}_\varepsilon \times \mathcal{H}^{-1}_\varepsilon(\Sigma))$$

(4) nous nous plaçons loin des caustiques, voir [**19**] pour des hypothèses précises

(5) Un certain nombre de contraintes structurelles s'appliquent à ces données, nous renvoyons à [**19**]

solution exacte de (YM) dans la même jauge J_λ, qui garde la forme d'un développement oscillant de même ordre et de même amplitude :

$$(*)\quad \begin{cases} A_\varepsilon(x) = A_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} A_i(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}) \ + \varepsilon^{\frac{M}{2}} Z_\varepsilon(x) \\ \phi_\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \phi_i(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{M}{2}} z_\varepsilon(x) \\ \psi_\varepsilon(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{M-1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \psi_i(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{M}{2}} \zeta_\varepsilon(x) \end{cases}$$

où les profils d'oscillation $(A_i, \phi_i, \psi_i)(x, \omega)$ sont des fonctions 2π-périodiques en la variable ω, à l'exception de A_0 et ϕ_0 qui restent indépendants de ω. Le reste est petit devant les autres termes du développement :

$$(Z, z, \zeta)_\varepsilon \in C^0([0, t_0], \mathcal{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_\varepsilon^0(\Sigma)) \cap C^1([0, t_0], \mathcal{H}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_\varepsilon^{-1}(\Sigma))$$

Pour prouver ce théorème, nous combinons les résultats de la section précédente 2.1.1 et 2.2.1 avec la proposition 3.3.1 qui permet de donner une forme hyperbolique au problème :

- Nous commençons par développer en puissances de ε le système $(Y.M.)$ appliqué à $(A, \phi, \psi)_\varepsilon$. Ce développement primaire à pour but de révéler une relation de dépendance causale entre les profils d'ordre croissant, et nous conduit à une succession d'équations de profils à jauge libre.
- Nous entreprenons alors de développer les identités de compatibilité de $(Y.M.)$, et de réduire les équations de profils en les quotientant par les composantes oscillantes du champ A_ε qui correspondent à des oscillations de la jauge. Nous séparons ainsi les composantes véritablement dynamiques (transportées le long des rayons de lumière) des composantes libres (partie sous déterminée du système) ou polarisées (partie surdéterminée du système) des oscillations.
- Nous démontrons un résultat analogue à la proposition 3.3.1 individuellement pour chacun des systèmes d'équations de profils successifs, qui deviennent du coup exploitables. Nous montrons comment propager n'importe quelle jauge J_λ à tout ordre, en partie moyenne comme en partie oscillante. Du coup, nous vérifions que le résultat de la proposition 3.3.1 reste valable globalement pour les solutions oscillantes (d'amplitude critique) que nous envisageons : nous obtenons in fine la même solution approchée - i). en développant le système sous sa forme mal déterminée, à jauge libre, tout en fixant judicieusement les composantes non dynamiques du champ de jauge pour vérifier in fine la jauge de Lorentz, - ii). en développant directement le sytème sous sa forme hyperbolique, à jauge de Lorentz fixée. Le résultat semble de bon sens, mais vu l'amplitude critique des oscillations, sa démonstration requiert quelque attention. Nous avons privilégié le développement à jauge libre pour étendre nos résultats à la famille de jauges transverses J_λ, et ne pas dépendre exclusivement de la jauge de Lorentz, qui demeure singulière et masque certaines informations. Notons qu'en dépit des apparences, il n'est pas plus simple de commencer par développer le système sous sa forme hyperbolique, à jauge de Lorentz fixée : il est nécessaire, à un moment ou un autre, de décrire le comportement des différentes composantes oscillatoires du champ de jauge.

Nous obtenons finalement des résultats d'approximation puis de prolongement, qui donnent le théorème 1 une fois réunis. Nous achevons notre étude en montrant que le théorème 1 donne lieu à un résultat de stabilité du système YM par perturbations oscillantes, au voisinage de solutions régulières données.

Proposition 3.4.1. — *(stabilité du système (YM) par perturbations oscillantes)*

a). Le terme dominant $(A_0, \phi_0, \tilde{\psi}_0)$ des solutions oscillantes obtenues par le théorème 1 est lui-même solution de (YM) si et seulement si il l'est à $t = 0$, i.e. vérifie la contrainte :

$$(\triangle(A_0)_0 - div\nabla_0(A_0)^\Sigma)_{|(t=0)} = (F)_0(A_0, \partial A_0, \phi_0, \partial\phi_0, \tilde{\psi}_0)_{|(t=0)}$$

Cette condition équivaut à la nullité, au premier ordre, de la charge moyenne induite par les oscillations.

b). Si $(A_0, \phi_0, \tilde{\psi}_0)$ *reste solution de* (YM) *sur* $[0, t_0]$*, alors il est possible de prendre* $t_1 = t_0$ *dans le théorème 1, c'est à dire que l'optique géométrique garde sa précision jusqu'à apparition de caustiques.*

Nos résultats restent intimement liés à la nature géométrique (très contraignante) des équations, et aux hypothèses de régularité sur la phase qui excluent l'essentiel des phénomènes néfastes liés à la concentration des singularités. Le système (YM) conserve ici un comportement linéaire exceptionnel, dans un domaine de régularité où les termes non-linéaires jouent d'ordinaire un rôle actif, voire destructeur.

Références

[1] Y. Choquet-Bruhat. Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *J.Math.Pure Appl.*, vol. 48 :117–158, 1969.

[2] Y. Choquet-Bruhat, A. Greco. High frequency asymptotic solutions of Y.M. and associated fields. *J.Math.Phys.*, vol. 24(2) :337–379, 1983.

[3] J.-L. Joly, J. Rauch. Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics. *Trans. AMS*, vol. 330(2) :599–623, 1992.

[4] O. Guès. Développements asymptotiques de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasi-linéaires. *Asymptotique Analysis*, vol. 6 :635–678, 1993.

[5] O. Guès. Ondes multidimensionnelles ε-stratifiées et oscillations. *Duke Math. J.*, 68 :401–446, 1992.

[6] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch. Generic rigourous asymptotic expentions for weakly nonlinear multidimentioneal oscillatory waves. *Duke Math. J.*, vol. 70 :373–404, 1993.

[7] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou. Existence global solutions of the Yang-Mills, Higgs and spinor field in 3+1 dimensions. *An. Sci. ENS*, vol. 14 :581–606, 1981.

[8] S. Klainerman, M. Machedon. On the M.K.G. equation with finite energy. *Duke Math. J.*, vol. 74(1) :19–44, 1994.

[9] S. Klainerman, M. Machedon. Finite energy solutions for Y.M. equations in R^{3+1}. *Ann. Math.*, II ser. 142, n.1 :p.39–119, 1995.

[10] M. Beals, M. Bézard. Low regularity local solutions for field equations 1-2. *Com. P.D.E.*, pages p. 79–124, 1996.

[11] H. Bahouri, P. Gérard. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. *Am. Journal of Math.*, 121 :131–175, 1999.

[12] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch. Optique géométrique non-linéaire et équations de Maxwell Bloch. *Séminaire X-EDP*, exp. XI, 19 janvier 1999.

[13] R. Coifman, Y. Meyer. *Au delà des opérateurs pseudodifférentiels.* Astérisque 57, Soc. Math. de France, 1978.

[14] C. Fefferman, E. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Math.*, vol. 129 :137–193, 1972.

[15] E. Stein. *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, 1993.

[16] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, M. Francaviglia. On the wave equation in curved space-time. *Ann. Inst. Poincaré*, vol. 31(4) :399–414, 1979.

[17] R.P. Geroch. Spinor structure of space-times in general relativity 1-2, et The domain of dependence. *J.Math.Phys.*, vol. 9,11, 1968,1970.

[18] J.-P. Nicolas. Dirac fields on asymptotically flat space-times. *Preprint, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique URM 7640 CNRS*, n.99-22, 1999.

[19] P.-Y. Jeanne. *Optique géométrique pour des systèmes semilinéaires avec invariance de jauge.* Thèse, Université Paris 11, Orsay, 2000.

20 mars 2001

P.-Y. Jeanne, Université Paris-Sud,, Bât. 425, Mathématiques,, 91405 ORSAY cedex, FRANCE, pierre-yves.jeanne@math.u-psud.fr