SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

François Golse, C. David Levermore, et Laure Saint-Raymond

La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XVIII, 21 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

LA MÉTHODE DE L'ENTROPIE RELATIVE POUR LES LIMITES HYDRODYNAMIQUES DE MODÈLES CINÉTIQUES

F. GOLSE, C. D. LEVERMORE, AND L. SAINT-RAYMOND

1. Structure formelle des modèles cinétiques

La théorie cinétique classique décrit un gaz au moyen d'une fonction positive $F \equiv F(t,x,v)$ représentant la densité des molécules qui, à l'instant t, se trouvent à la position $x \in \mathbf{R}^D$ ($D = 2$ ou 3) et sont animées de la vitesse $v \in \mathbf{R}^D$. Cette fonction F est habituellement nommée "fonction de distribution" ou "densité microscopique". Supposons que les interactions entre molécules sont à courte portée. A l'échelle du libre parcours moyen, c'est à dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux interactions avec les autres molécules, ces interactions prennent la forme de collisions binaires ponctuelles et instantanées.

L'évolution de F est gouvernée par une équation cinétique de la forme

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{C}(F)\,. \tag{1}$$

Le membre de gauche de (1) décrit la variation de F dûe au mouvement rectiligne uniforme effectué par chaque particule entre deux collisions, tandis que le terme $\mathcal{C}(F)$ décrit la variation de la population de particules ayant une vitesse donnée en un point donné sous l'effet des collisions avec les autres particules.

L'exemple le plus fondamental d'opérateur de collision $\mathcal{C}$ est fourni par l'intégrale de collision de Boltzmann

$$\mathcal{B}(F,F)(t,x,v) = \iint_{\mathbf{S}^{D-1}\times\mathbf{R}^D} (F'F_1' - FF_1)c(v-v_1,\omega)d\omega dv_1 \tag{2}$$

où les notations F, F_1, F' et F_1' désignent respectivement les valeurs $F(t,x,v)$, $F(t,x,v_1)$, $F(t,x,v')$ et $F(t,x,v_1')$, les vitesses v' et v_1' étant définies en fonction de v, v_1 et ω par

$$v' = v - (v-v_1)\cdot\omega\,, \quad v_1' = v_1(v-v_1)\cdot\omega\,. \tag{3}$$

Ces relations représentent toutes les solutions du systèmes d'équations aux inconnues v' et v'_1

$$v' + v'_1 = v + v_1\,, \quad |v'|^2 + |v'_1|^2 = |v|^2 + |v_1|^2\,, \tag{4}$$

qui expriment la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique pour toute collision entre paire de particules animées des vitesses v' et v'_1 après collision et des vitesses v et v_1 avant collision, et vice-versa. (On se limite au cas de gaz purs monoatomiques, pour lesquels l'hypothèse de collisions élastiques entre particules de même masse n'est pas trop irréaliste). La fonction c est appelée "noyau de collision"; elle est de la forme

$$c(v - v_1, \omega) = |v - v_1| \Sigma \left(|v - v_1|, \frac{|\omega \cdot (v - v_1)|}{|v - v_1|} \right) \tag{5}$$

où Σ est la section efficace d'une molécule (que l'on détermine à partir de l'interaction entre molécules par un calcul de scattering classique: cf. [18] §18). On supposera que le noyau de collision vérifie l'hypothèse dite "de cutoff angulaire des potentiels durs" de Grad [15], à savoir qu'il existe $C > 0$ et $s \in [0, 1[$ tels que, pour presque tout $z \in \mathbf{R}^D$ et $\omega \in \mathbf{S}^{D-1}$

$$\begin{gathered} 0 < c(z, \omega) \le C|z \cdot \omega|(1 + |z|^{s-1}) \\ \int_{\mathbf{S}^{D-1}} c(z, \omega) d\omega \ge C^{-1}|z|(1 + |z|)^{-1}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

L'intégrale de collision (2) fut proposée par Maxwell [25] dans le cas de densités microscopiques indépendantes de x; l'équation cinétique (1) où $\mathcal{C}$ est cette intégrale de collision (2) fut écrite par Boltzmann [4]. La dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann pour un gaz de N sphères dures de rayon r à partir des équations de Hamilton dans la limite où $Nr^{D-1} \to 0$ (dite de Boltzmann-Grad) est dûe à Lanford [19]; voir aussi [7], [5].

L'exemple de l'intégrale de collision (2) suggère de considérer la classe de tous les opérateurs de collision $\mathcal{C}$ vérifiant

- il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ dense dans $L^1(dv)$ et un cône $\mathcal{K}$ ouvert dans $\mathcal{E}$ et invariant sous l'action du groupe des déplacements de $\mathbf{R}^D$ tel que $\mathcal{C}$ définisse une application de classe C^2 de $\mathcal{K}$ dans $L^1((1 + |v|^2)dv)$;
- pour tout déplacement $\mathcal{T}$ de $\mathbf{R}^D$ et tout $f \in \mathcal{K}$, on a $\mathcal{C}(f \circ \mathcal{T}) = \mathcal{C}(f) \circ \mathcal{T}$;
- pour tout $f \in \mathcal{K}$ et tout $i = 1, \ldots, D$, l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^D} \mathcal{C}(f) dv = \int_{\mathbf{R}^D} v_i \mathcal{C}(f) dv = \int_{\mathbf{R}^D} |v|^2 \mathcal{C}(f) dv = 0 \tag{7}$$

- (Théorème H) pour tout $f \in \mathcal{K}$, $\mathcal{C}(f)\ln f \in L^1(dv)$ et l'on a

(8) $$\int_{\mathbf{R}^D} \mathcal{C}(f)\ln f dv \leq 0\,,$$

  avec égalité si et seulement si f est une distribution maxwellienne, c'est à dire si et seulement si f est de la forme

(9) $$f(v) = M_{(\rho,u,\theta)}(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$$

  avec $\rho > 0$, $\theta > 0$ et $u \in \mathbf{R}^D$.
- toute distribution maxwellienne appartient à $\mathcal{K}$ et annule $\mathcal{C}$.

De même que dans le cas de l'intégrale de collision (2), on notera

$$\mathcal{C}(F)(t,x,v) = \mathcal{C}(F(t,x,\cdot))(v)\,;$$

autrement dit, $\mathcal{C}$ agit sur la seule dépendance en v de F et traite t et x comme des paramètres.

L'intégrale de collision de Boltzmann (2) $f \mapsto \mathcal{B}(f,f)$ est un exemple d'opérateur de collision $\mathcal{C}$ vérifiant les propriétés ci-dessus, en prenant par exemple pour $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbf{R}^D$ et vérifiant

$$f > 0\,, \quad f = O(|v|^{6+D}) \ \text{ et } \ |\ln f| = O(|v|^4) \ \text{ pour } |v| \to +\infty\,.$$

On en trouvera la preuve par exemple dans [7], [9] ou encore [5]. Signalons seulement que cette preuve repose sur les symétries de l'intégrande de (2) exploitées par Maxwell dans [25]; le théorème H est dû à Boltzmann [4].

Bien que l'équation de Boltzmann ait été rigoureusement établie à partir du principe fondamental de la dynamique, l'intégrale de collision $\mathcal{B}$ décrite en (2) est un objet d'un abord difficile, aussi bien sur le plan numérique que théorique. Il est donc naturel de chercher d'autres opérateurs de collision, vérifiant les propriétés ci-dessus, mais d'écriture plus simple. Le plus connu de ces opérateurs est celui de BGK (Bhatnagar-Gross-Krook)

(10) $$C_{BGK}(f) = \nu(\rho_f)(M_f - f)$$

avec les notations

(11)
$$\rho_f = \int_{\mathbf{R}^D} f dv\,, \quad u_f = \frac{1}{\rho_f}\int_{\mathbf{R}^D} v f dv\,, \quad \theta_f = \frac{1}{\rho_f}\int_{\mathbf{R}^D} \tfrac{1}{D}|v-u_f|^2 f dv\,,$$

ainsi que

(12) $$M_f = M_{(\rho_f,u_f,\theta_f)}\,.$$

La fonction $\rho_f \mapsto \nu(\rho_f) > 0$ est appelée "fréquence de collision". On vérifie aisément que l'opérateur de collision de BGK, $\mathcal{C}_{BGK}$ est défini sur le même cône $\mathcal{K}$ (cité plus haut) que l'intégrale de collision de Boltzmann, et qu'il vérifie la liste des mêmes propriétés fondamentales énumérées ci-dessus.

2. Limites hydrodynamiques formelles

Les limites hydrodynamiques de l'équation (1) sont celles où la densité microscopique F est bien approchée par une maxwellienne dont les paramètres ρ, u et θ sont des fonctions lentement variables de t et x. Par "lentement variables", on entendra que les variations relatives de, disons 10%, de ces paramètres n'apparaissent que sur des échelles de longueur et de temps grandes devant respectivement le libre parcours moyen et le temps moyen entre deux collisions successives subies par la même particule.

De plus, le caractère incompressible d'un écoulement gazeux est le cas limite correspondant à de faibles nombres de Mach (voir par exemple [17], [20]). Au niveau cinétique, cela équivaut à considérer le cas de densités microscopiques qui sont de petites perturbations d'une maxwellienne uniforme donnée. Autrement dit, les densités microscopiques relevant de ce type de limite asymptotique sont les $f > 0$ où la vitesse macroscopique $|u_f|$ est très faible devant la vitesse du son $\sqrt{\frac{D+2}{D}\theta_f}$ qui représente la vitesse d'agitation moléculaire moyenne. Des mouvements macroscopiques appréciables dans un tel écoulement gazeux ne sont donc observables qu'en temps grand.

Ces considérations conduisent à réécrire l'équation cinétique adimensionnée sous la forme

$$\epsilon\partial_t F_\epsilon + v \cdot \nabla_x F_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^m}\mathcal{C}(F)\,, \tag{13}$$

où $0 < \epsilon << 1$ (voir [2] pour une discussion détaillée de ce type de scaling). Parallèlement, on cherchera F_ϵ sous la forme d'une petite perturbation d'une maxwellienne uniforme:

$$F_\epsilon = M(1 + \epsilon g_\epsilon)\,, \qquad \text{où } M = M_{(1,0,1)}\,. \tag{14}$$

(On peut toujours ramener la maxwellienne uniforme de référence M à la gaussienne centrée réduite, par changement de repère galiléen et scaling de la densité et de la température).

La forme particulière (14) de la densité microscopique suggère d'effectuer un développement de Taylor de l'opérateur de collision à l'ordre 2 en la maxwellienne uniforme de référence. Ceci amène à définir l'opérateur de collision linéarisé

$$\mathcal{L}g = -M^{-1}d\mathcal{C}(M)\cdot(Mg) \tag{15}$$

ainsi que de la hessienne de l'opérateur de collision

$$\mathcal{Q}(g,g) = \tfrac{1}{2}M^{-1}d^2\mathcal{C}(M)\cdot(Mg,Mg)\,. \tag{16}$$

On postulera que $\mathcal{L}$ possède la propriété suivante

- $\mathcal{L}$ se prolonge en un opérateur de Fredholm auto-adjoint et positif sur $L^2(Mdv)$ de noyau

$$\text{Ker }\mathcal{L} = \text{Vect }\{1, v_1, \dots, v_D, |v|^2\}\,. \tag{17}$$

Dans le cas de l'opérateur de BGK, on vérifie que l'opérateur de collision linéarisé est proportionnel à la projection orthogonale de $L^2(Mdv)$ sur Vect $\{1, v_1, \dots, v_D, |v|^2\}^\perp$, ce qui rend le résultat ci-dessus évident.

Dans le cas de l'opérateur de Boltzmann, la démonstration de la propriété ci-dessus est dûe à Grad [15]. La démonstration, très technique, repose sur l'hypothèse (6) et constitue l'un des résultats mathématiques fondamentaux sur l'équation de Boltzmann.

On peut alors réécrire l'équation cinétique adimensionnée en termes de fluctuations de densité microscopique

$$\epsilon\partial_t g_\epsilon + v\cdot\nabla_x g_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}g_\epsilon = \epsilon^{m-1}\mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) + o(\epsilon^{m-1})\,. \tag{18}$$

On utilisera désormais la notation

$$\langle\phi\rangle = \int_{\mathbf{R}^D}\phi(v)M(v)dv\,,\ \text{ pour tout } \phi\in L^1(Mdv)\,. \tag{19}$$

Les quantités suivantes jouent un rôle fondamental dans ces limites hydrodynamiques:

$$A(v) = v\otimes v - \tfrac{1}{D}|v|^2 I\,,\quad B = \tfrac{1}{2}v(|v|^2 - D - 2)\,. \tag{20}$$

Les composantes de A et de B appartiennent à $(\text{Ker }\mathcal{L})^\perp = \text{Im }\mathcal{L}$ car $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm auto-adjoint. On notera $\mathcal{L}^{-1}A$ et $\mathcal{L}^{-1}B$ les antécédents de A et B appartenant à $(\text{Ker }\mathcal{L})^\perp$.

Les limites hydrodynamiques formelles de (18) sont décrites ci-dessous. Commençons par le cas de la limite Euler:

Théorème 1. [1] *Supposons que $m > 1$. Soit F_ϵ, famille de solutions positives de (13) dont les fluctuations g_ϵ définies par (14) convergent p.p et au sens des distributions vers une limite g lorsque $\epsilon\to 0$. On suppose en outre que les familles*

$$(1+|v|^3)g_\epsilon \text{ et } (1+|\mathcal{L}^{-1}A| + |\mathcal{L}^{-1}B|)\mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) \tag{21}$$

sont relativement compactes dans $w\text{-}L^1_{loc}(dt; w\text{-}L^1(Mdvdx))$*. Alors* g *est une maxwellienne infinitésimale*

$$g(t,x,v) = \rho(t,x) + u(t,x)\cdot v + \theta(t,x)\tfrac{1}{2}(|v|^2 - D) \tag{22}$$

où le champ des vitesses u *et les fluctuations de densité et de température vérifient les relations d'incompressibilité et de Boussinesq*

$$\nabla_x \cdot u = 0\,, \quad \nabla_x(\rho + \theta) = 0\,, \tag{23}$$

ainsi que les équations d'Euler des fluides incompressibles

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\cdot\nabla_x u + \nabla_x p = 0\,,\\ \partial_t \theta + u\cdot\nabla_x \theta = 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Le cas de la limite Navier-Stokes est presque semblable, mais il faut expliquer comment l'on calcule la viscosité ν et la diffusion thermique κ. Ces coefficients sont précisément donnés par les relations suivantes, qui découlent de l'invariance de $\mathcal{L}$ par rotation, héritée de celle de $\mathcal{C}$:

(25)
$$\langle \mathcal{L}^{-1}A_{ij}A_{kl}\rangle = \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \tfrac{2}{D}\delta_{ij}\delta_{kl})\,, \quad \langle \mathcal{L}^{-1}B_iB_j\rangle = \tfrac{D+2}{2}\kappa\delta_{ij}\,.$$

On vérifie grâce à la positivité de $\mathcal{L}$ que ces coefficients sont bien strictement positifs. Alors

Théorème 2. [1] *Supposons que* $m = 1$*. Soit* F_ϵ*, famille de solutions positives de (13) dont les fluctuations* g_ϵ *définies par (14) convergent p.p et au sens des distributions vers une limite* g *lorsque* $\epsilon \to 0$ *en vérifiant (21). On suppose également que les suites*

$$(|\mathcal{L}^{-1}A| + |\mathcal{L}^{-1}B|)|v|g_\epsilon \tag{26}$$

sont relativement compactes dans $w\text{-}L^1_{loc}(dt; w\text{-}L^1(Mdvdx))$*. Alors* g *est une maxwellienne infinitésimale (22) où le champ des vitesses* u *et les fluctuations de densité et de température vérifient les relations d'incompressibilité et de Boussinesq (23) ainsi que les équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles*

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\cdot\nabla_x u + \nabla_x p = \nu\Delta_x u\,,\\ \partial_t \theta + u\cdot\nabla_x \theta = \kappa\Delta_x\theta\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Ces résultats sont formels, car les hypothèses de convergence p.p. de g_ϵ ainsi que les compacités faibles (21) (26) sont les points les plus difficiles à vérifier. Ils reposent tous deux sur les relations (7) qui permettent d'écrire le système de lois de conservation

$$
\begin{aligned}
\epsilon\partial_t\langle g_\epsilon\rangle + \nabla_x\cdot\langle vg_\epsilon\rangle &= 0\,,\\
\epsilon\partial_t\langle vg_\epsilon\rangle + \nabla_x\cdot\langle Ag_\epsilon\rangle &= -\tfrac{1}{D}\nabla_x\langle |v|^2 g_\epsilon\rangle\,,\\
\epsilon\partial_t\tfrac12\langle(|v|^2-D-2)g_\epsilon\rangle + \nabla_x\cdot\langle Bg_\epsilon\rangle &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Ensuite, le fait que le coefficient du terme de plus haut degré en $1/\epsilon$ dans (18) soit $\mathcal{L}g_\epsilon$, joint à la connaissance du noyau de $\mathcal{L}$ explique la forme limite (22). Maxwell [25] avait déjà remarqué que le problème de la limite hydrodynamique vers le système d'Euler de la dynamique des gaz compressibles se réduisait à savoir "fermer" un tel système de lois de conservation. Dans le cas qui nous occupe, cela veut dire exprimer

$$\frac{1}{\epsilon}\langle Ag_\epsilon\rangle \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{\epsilon}\langle Bg_\epsilon\rangle$$

en fonction de

$$\langle g_\epsilon\rangle\,,\quad \langle vg_\epsilon\rangle\,,\quad \tfrac12\langle(|v|^2-D-2)g_\epsilon\rangle\,,$$

au moins dans la limite où $\epsilon\to 0$.

Précisément, pour passer à la limite dans les termes

$$\tfrac{1}{\epsilon}\langle Ag_\epsilon\rangle \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{\epsilon}\langle Bg_\epsilon\rangle$$

on les réécrit comme

$$\langle\mathcal{L}^{-1}A\,\tfrac{1}{\epsilon}\mathcal{L}g_\epsilon\rangle \quad \text{et} \quad \langle\mathcal{L}^{-1}B\,\tfrac{1}{\epsilon}\mathcal{L}g_\epsilon\rangle\,.$$

On remplace ensuite le terme $\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}g_\epsilon$ par sa valeur tirée de l'équation (18). Nous renvoyons à [1] pour un calcul détaillé.

3. Évolution de l'entropie relative

Il existe plusieurs type de méthodes pour démontrer des résultats comme les théorèmes 1 et 2. Hilbert étudia le problème de la limite hydrodynamique vers le système d'Euler de la dynamique des gaz [16] dans le cadre de son 6ème problème:

"Le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter du point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent au lois du mouvement des continua" [1]

Sa méthode consistait à représenter la solution F_ϵ par un développement en puissances de ϵ. Il fallut attendre le travail de Caflisch [6] basé

[1] D. Hilbert: Sur les problèmes futurs des mathématiques (trad. L. Laugel) pp. 58–114, *Comptes-Rendus du 2ème congrès international des mathématiciens (Paris 1900)*, Gauthiers-Villars, Paris (1902).

sur les estimations de Grad [15] du noyau de collision linéarisé pour que la validité d'un tel développement asymptotique tronqué soit prouvée localement en temps (avant l'apparition de chocs dans le système limite). Dans [10] est expliquée l'utilisation de cette méthode dans le cas du théorème 2.

Toutefois ces méthodes ne sont pas adaptées au traitement de solutions faibles, et donc n'envisagent qu'un ensemble maigre de solutions dans la classe de toutes celles qui sont physiquement admissibles. Une approche basée sur la fermeture du système (28) et sur les propriétés de compacité découlant de l'équation de Boltzmann (13) a été proposée dans [2]. Malheureusement, ces résultats ne sont pas tout à fait complets, car ils reposent sur la possibilité d'écrire le système (28), ce qui n'est pas garanti par la théorie actuelle des solutions faibles de l'équation de Boltzmann dûe à DiPerna-Lions [11]. Nous verrons que la théorie des solutions faibles du modèle de BGK est, à cet égard, plus favorable.

La méthode que nous proposons ici est hybride, en ce qu'elle peut considérer des solutions faibles de (13) mais utilise de manière cruciale que la solution du problème hydrodynamique limite que l'on cherche à approcher est au moins lipschitzienne. L'idée d'utiliser la notion d'entropie relative pour ce type de problème vient d'une part de la notion de convergence entropique développée dans [2] et surtout de l'élégante solution trouvée par H.T. Yau [29] au problème de la limite hydrodynamique des modèles de Ginzburg-Landau.

Nous allons présenter cette méthode dans le cas de la limite Navier-Stokes pour des solutions classiques de l'équation de Boltzmann.

Définition 1. *Soit λ une mesure positive sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$. Soient F et G deux éléments positifs de $L^1(X, \lambda)$. L'entropie relative de F par rapport à G est*

$$H(F|G) = \int_X \left[F \ln\left(\frac{F}{G}\right) - F + G \right] d\lambda\,.$$

(On remarquera que l'intégrande est une fonction définie λ-p.p., positive et mesurable, de sorte que l'intégrale est bien définie).

Soit donc u et θ solutions classiques des équations (27) sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{T}^D$ (voir [8]). Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\epsilon|\theta(t,x)| < 1$ pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{T}^D$. Posons alors

$$M_\epsilon(t,x,v) = M_{\left(1-\epsilon\theta(t,x)\,,\,\frac{\epsilon u(t,x)}{1-\epsilon\theta(t,x)}\,,\,\frac{1}{1-\epsilon\theta(t,x)}\right)}(v)\,. \tag{29}$$

Soit F_ϵ famille de solutions classiques de l'équation de Boltzmann rescalée (13) sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{T}^D \times \mathbf{R}^D$. Posons

$$H_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon^2} H(F_\epsilon(t,\cdot,\cdot)|M_\epsilon(t,\cdot,\cdot))\,,$$

et calculons

$$\frac{dH_\epsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\epsilon^2}\int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon\rangle dx - \frac{d}{dt}\frac{1}{\epsilon^2}\int \left\langle G_\epsilon \ln\left(\frac{M_\epsilon}{M}\right)\right\rangle dx$$

avec les notations de la section précédente. Dans toute la suite, nous utiliserons la notation

$$b(v) = \tfrac{1}{2}(|v|^2 - D - 2)\,, \qquad \text{si bien que} \quad B(v) = b(v)v\,. \tag{30}$$

Observons que

$$\ln\left(\frac{M_\epsilon}{M}\right) = -\Gamma_\epsilon(u,\theta) + \epsilon\theta b(v) + \epsilon u\cdot v\,,$$

avec

$$\Gamma_\epsilon(u,\theta) = \frac{\epsilon^2 u^2}{2(1-\epsilon\theta)} - \tfrac{D+2}{2}(\ln(1-\epsilon\theta) + \epsilon\theta)\,. \tag{31}$$

Ainsi, en utilisant la relation d'incompressibilité $\nabla_x\cdot u = 0$ ainsi que les équations de Navier-Stokes (27), on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{dH_\epsilon}{dt} &= \frac{1}{\epsilon^2}\frac{d}{dt}\int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon\rangle dx \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon^2}\frac{d}{dt}\int \epsilon\left[\theta\langle bG_\epsilon\rangle + \epsilon u\cdot\langle vG_\epsilon\rangle - \langle G_\epsilon\rangle\Gamma_\epsilon(u,\theta)\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\frac{d}{dt}\int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon\rangle dx + I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,,
\end{aligned} \tag{32}$$

où

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon^2}\int \left[\epsilon(u\cdot\nabla\theta - \kappa\Delta\theta)\langle bG_\epsilon\rangle + \theta\nabla\cdot\langle BG_\epsilon\rangle\right] dx\,, \tag{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon^2}\int \left[\epsilon(u\cdot\nabla u + \nabla p - \nu\Delta u)\cdot\langle vG_\epsilon\rangle + u\cdot\nabla\cdot\langle AG_\epsilon\rangle\right] dx\,, \tag{34}$$

$$I_3 = -\frac{1}{\epsilon^2}\int \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\langle vG_\epsilon\rangle\Gamma_\epsilon(u,\theta) dx\,, \tag{35}$$

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon^2}\int \langle G_\epsilon\rangle\partial_t\Gamma_\epsilon(u,\theta) dx\,. \tag{36}$$

Etudions séparément ces diverses intégrales. D'abord

$$\langle bG_\epsilon\rangle = -1 + \epsilon\langle bg_\epsilon\rangle\,,$$

de sorte que

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int \epsilon(u\cdot\nabla\theta-\kappa\Delta\theta)\langle bG_\epsilon\rangle dx=\int(u\cdot\nabla\theta-\kappa\Delta\theta)\langle bg_\epsilon\rangle dx\,.$$

Puis, en tenant compte du caractère auto-adjoint de $\mathcal{L}$ dans $L^2(Mdv)$ et du fait que, pour tout $g\in Ker\,\mathcal{L}$ l'on a (cf. [1], [5], Lemma 2.5, p. 74)

$$\mathcal{Q}(g,g)=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}g^2\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\langle BG_\epsilon\rangle &= \epsilon^2\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}g_\epsilon\rangle=\epsilon^2\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,[\mathcal{Q}(g_\epsilon,g_\epsilon)-(\epsilon\partial_t+v\cdot\nabla_x)g_\epsilon]\rangle\\ &=\epsilon^2\langle B\frac{1}{2}\,{}^H\!g_\epsilon^2\rangle-\epsilon^2\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,v\cdot\nabla_x\,{}^H\!g_\epsilon\rangle\\ &\quad+\epsilon^2\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,[\mathcal{Q}(g_\epsilon,g_\epsilon)-\mathcal{Q}({}^H\!g_\epsilon,{}^H\!g_\epsilon)-\epsilon\partial_t g_\epsilon-v\cdot\nabla_x(g_\epsilon-{}^H\!g_\epsilon)]\rangle\end{aligned}$$

où ${}^H\!g_\epsilon(t,x,\cdot)$ est la projection orthogonale (au sens de la mesure Mdv) de $g_\epsilon(t,x,\cdot)$ sur $Ker\,\mathcal{L}$. Autrement dit

$${}^H\!g_\epsilon(t,x,\cdot)=\rho_\epsilon(t,x)+u_\epsilon(t,x)\cdot v+\theta_\epsilon(t,x)(b(v)+1)$$

de sorte que

$$\langle bg_\epsilon\rangle=\theta_\epsilon\langle b^2\rangle-(\rho_\epsilon+\theta_\epsilon)=\tfrac{D+2}{2}\theta_\epsilon-(\rho_\epsilon+\theta_\epsilon)$$

et que

$$\begin{aligned}\langle BG_\epsilon\rangle &= \tfrac{D+2}{2}\epsilon^2[u_\epsilon\theta_\epsilon-\kappa\nabla\theta_\epsilon]\\ &\quad-\epsilon^2\langle\mathcal{L}^{-1}Bv\cdot\nabla_x(g_\epsilon-{}^H\!g_\epsilon)\rangle\\ &\quad+\epsilon^2\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,[\mathcal{Q}(g_\epsilon,g_\epsilon)-\mathcal{Q}({}^H\!g_\epsilon,{}^H\!g_\epsilon)-\epsilon\partial_t g_\epsilon]\rangle\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

(37)

$$I_1=\int[\tfrac{D+2}{2}\theta_\epsilon(u\cdot\nabla\theta-\kappa\Delta\theta)+\tfrac{D+2}{2}\theta(\nabla\cdot(u_\epsilon\theta_\epsilon)-\kappa\Delta\theta_\epsilon)]dx+R_1$$

avec

(38)

$$\begin{aligned}R_1&=\int(u\theta-\kappa\nabla\theta)\nabla(\rho_\epsilon+\theta_\epsilon)dx-\int\theta\nabla\cdot\langle\mathcal{L}^{-1}Bv\cdot\nabla_x(g_\epsilon-{}^H\!g_\epsilon)\rangle dx\\ &\quad+\int\theta\nabla\cdot\langle(\mathcal{L}^{-1}B)\,(\mathcal{Q}(g_\epsilon,g_\epsilon)-\mathcal{Q}({}^H\!g_\epsilon,{}^H\!g_\epsilon)-\epsilon\partial_t g_\epsilon)\rangle dx\,.\end{aligned}$$

De même, en tenant compte de ce que u est à divergence nulle, on a

(39)

$$I_2=\int[u_\epsilon\cdot(u\cdot\nabla u+\nabla p-\nu\Delta u)+u\cdot(\nabla\cdot u_\epsilon^{\otimes 2}-\nu\Delta u_\epsilon)]dx+R_2\,,$$

avec

$$
(40)\qquad \begin{aligned} R_2 = &- \int u \cdot \nabla \cdot \langle \mathcal{L}^{-1} A v \cdot \nabla_x (g_\epsilon - {}^H\!g_\epsilon) \rangle dx \\ &+ \int u \cdot \nabla \cdot \langle (\mathcal{L}^{-1} A) \left(\mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) - \mathcal{Q}({}^H\!g_\epsilon, {}^H\!g_\epsilon) - \epsilon \partial_t g_\epsilon \right) \rangle dx \,. \end{aligned}
$$

Ecrivons enfin

$$
(41)\qquad I_3 = - \int \nabla \cdot u_\epsilon \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{D+2}{2} \theta^2 + |u|^2 \right) dx + R_3
$$

avec

$$
(42)\qquad R_3 = \int \nabla \cdot u_\epsilon \left[\tfrac{D+2}{2} \tfrac{1}{2} \theta^2 + \tfrac{1}{2} |u|^2 - \tfrac{1}{\epsilon^2} \Gamma_\epsilon(u, \theta) \right] dx \,,
$$

ainsi que

$$
(43)\qquad I_4 = - \int \left[\tfrac{D+2}{2} \kappa |\nabla \theta|^2 + \nu |\nabla u|^2 \right] dx + R_4 \,,
$$

avec

$$
(44)\qquad R_4 = \int \left[(1 + \epsilon \rho_\epsilon) \tfrac{1}{\epsilon^2} \partial_t \Gamma_\epsilon(u, \theta) - \partial_t \left(\tfrac{D+2}{2} \tfrac{1}{2} \theta^2 + \tfrac{1}{2} |u|^2 \right) \right] dx \,.
$$

En regroupant toutes les relations (37) à (44) et en intégrant (32) en temps sur $[0, t]$, on trouve

(45)

$$
\begin{aligned} H_\epsilon(t) = &H_\epsilon(0) \\ &- \int_0^t \int \tfrac{D+2}{2} \nabla \theta \cdot [(u_\epsilon - u)(\theta_\epsilon - \theta) - u\theta - 2\kappa \nabla \theta_\epsilon + \kappa \nabla \theta] dx ds \\ &- \int_0^t \int \nabla u : [(u_\epsilon - u)^{\otimes 2} - u^{\otimes 2} - 2\nu \nabla u_\epsilon + \nu \nabla u] dx ds \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} \int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon \rangle (t, x) dx - \frac{1}{\epsilon^2} \int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon \rangle (0, x) dx \\ &+ \int_0^t (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) ds + \int_0^t \int u_\epsilon \cdot \nabla p dx ds \,. \end{aligned}
$$

Notons alors

$$
(46)\qquad \begin{aligned} X_\epsilon = &\int_0^t \int \tfrac{1}{2} \nu |\nabla u_* + \nabla u_*^T|^2 + \tfrac{D+2}{2} |\nabla \theta_*|^2 dx \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} \int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon \rangle (t, x) dx - \frac{1}{\epsilon^2} \int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon \rangle (0, x) dx \,, \end{aligned}
$$

où (u_*, θ_*) est un point limite de $(u_\epsilon, \theta_\epsilon)$ dans w-$L^\infty(dt; L^1(dx))$ lorsque $\epsilon \to 0$ (cf. la proposition 3.1 de [2] pour l'existence de tels points limites). D'après [2] (lemme 4.7 et première inégalité de la p. 703), on trouve que

$$\limsup_{\epsilon \to 0} X_\epsilon \leq 0 \,. \tag{47}$$

Tenant compte de ce que u est à divergence nulle, on obtient alors que

(48)

$$\begin{aligned} H_\epsilon(t) &= H_\epsilon(0) \\ &\quad - \int_0^t \int \tfrac{D+2}{2} \nabla\theta \cdot (u_\epsilon - u)(\theta_\epsilon - \theta) dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int \nabla u : (u_\epsilon - u)^{\otimes 2} dx ds + \int_0^t R_\epsilon^1 ds + X_\epsilon \\ &\quad - \int_0^t \int \tfrac{1}{2}\nu |\nabla(u_* - u) + \nabla(u_* - u)^T|^2 + \tfrac{D+2}{2} |\nabla(\theta_* - \theta)|^2 dx \,, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_\epsilon^1 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \int_0^t \int u_\epsilon \cdot \nabla p dx ds \\ - 2 \int \left[\nu \nabla u : \nabla(u_\epsilon - u_*) + \tfrac{D+2}{2} \kappa \nabla\theta \cdot \nabla(\theta_\epsilon - \theta_*) \right] dx \,. \end{aligned}$$

D'après (48) et (47),

$$\begin{aligned} H_\epsilon(t) &\leq H_\epsilon(0) \\ &\quad + \int_0^t (\|\nabla u + \nabla u^T\|_{L^\infty}(s) + \|\nabla\theta\|_{L^\infty}(s)) H_\epsilon(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (R_\epsilon^1 + R_\epsilon^2) ds + X_\epsilon \,, \end{aligned} \tag{49}$$

où

$$\begin{aligned} R_\epsilon^2(t) &= (\|\nabla u + \nabla u^T\|_{L^\infty}(t) + \|\nabla\theta\|_{L^\infty}(t)) \\ &\quad \times \left(\int \left[\tfrac{1}{2} |u_\epsilon - u|^2(t,x) + \tfrac{D+2}{2} |\theta_\epsilon - \theta|^2(t,x) \right] dx - H_\epsilon(t) \right) \,. \end{aligned} \tag{50}$$

Si l'on savait que

(51)

$$\text{la famille } g_\epsilon^2 \text{ est relativement compacte dans } w\text{-}L^1_{loc}(dt; L^1(dx)) \,,$$

alors on vérifierait sans peine que, pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t (R_\epsilon^1 + R_\epsilon^2) ds \to 0$$

lorsque $\epsilon \to 0$. L'inégalité de Gronwall appliquée à (49) permettrait alors de conclure que

$$H_\epsilon \to 0$$

uniformément sur tout compact lorsque $\epsilon \to 0$, ce qui garantirait en particulier que

$$g_\epsilon \to u \cdot v + \theta b(v)$$

dans $L^\infty_{loc}(dt; L^1(Mdvdx))$ lorsque $\epsilon \to 0$. Précisons d'ailleurs cela au moyen de la notion de convergence entropique introduite dans [2].

Définition 2. *Une famille a_ϵ de $L^1(Mdvdx)$ converge entropiquement à l'ordre $m > 0$ vers a lorsque $\epsilon \to 0$ ssi*

- $a_\epsilon \to a$ *dans* w-$L^1(Mdvdx)$ *lorsque* $\epsilon \to 0$;
- $1 + \epsilon^m a_\epsilon \geq 0$ *p.p. pour tout* $\epsilon > 0$;
- $\epsilon^{-2m} H(M(1 + \epsilon^m a_\epsilon)|M) \to \frac{1}{2} \int \langle a^2 \rangle dx$.

La convergence entropique à un ordre $m > 0$ quelconque implique la convergence forte dans $L^1_{loc}(dx; (L^1((1 + |v|^2)Mdv))$: cf. proposition 4.11 dans [2].

Remarquons enfin que l'hypothèse (51) n'est pas vide: en effet elle est vérifiée dans le cas de solutions classiques de l'équation de Boltzmann convergeant vers des solutions classiques (à données petites) de l'équation de Navier-Stokes: voir [3]. Toutefois, elle n'est pas absolument nécessaire. On en utilise seulement une variante affaiblie (cf. la section suivante), et ce uniquement dans le cas des limites Euler ou Navier-Stokes incompressibles de solutions faibles globales de l'équation de Boltzmann. Si l'on part de solutions faibles globales du modèle de BGK, il est inutile d'avoir recours à (51), comme on le verra également dans la section consacrée à ce modèle.

4. Principaux résultats dans le cas de l'équation de Boltzmann

Nous allons esquisser dans cette section l'application de cette méthode aux solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann construites par DiPerna-Lions [11] (rappelons qu'il s'agit, pour le moment, du seul cadre où l'on sache construire des solutions globales au problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann, pour toute donnée physiquement admissible, c'est à dire de masse, d'énergie et d'entropie finie).

Voici un théorème portant sur la limite Navier-Stokes, correspondant au résultat formel énoncé dans le théorème 2, et obtenu par la méthode d'entropie relative. On se retreindra dans cette section au cas où le domaine spatial est le tore $\mathbf{T}^D$. Un énoncé équivalent sur la limite Euler est exposé dans [5], (Théorème 2.10, p. 108).

Théorème 3. *Soit une famille* $g_\epsilon^{in} \to g^{in} \equiv u^{in}(x) \cdot v$ *entropiquement à l'ordre 1, où* u^{in} *est un champ de vecteurs à divergence nulle sur* $\mathbf{T}^D$ *tel que l'équation de Navier-Stokes*

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \nu \Delta_x u \,, \\ \nabla_x \cdot u = 0 \,, \end{aligned} \tag{52}$$

où la viscosité ν *est donnée par (25), admette une solution classique globale* u *de donnée initiale* u^{in}. *Soit alors* F_ϵ *solution renormalisée de l'équation de Boltzmann rescalée (13) avec donnée initiale* $F_{\epsilon|t=0} = M(1 + \epsilon g_\epsilon^{in})$. *Supposons que*

- *pour tout* $\epsilon > 0$ *la solution renormalisée* F_ϵ *satisfait à la loi de conservation locale de l'impulsion*

$$\partial_t \int v F_\epsilon dv + \frac{1}{\epsilon} \nabla_x \cdot \int v \otimes v F_\epsilon dv = 0\,; \tag{53}$$

- *la famille des fluctuations* $g_\epsilon = \frac{F_\epsilon - M}{\epsilon M}$ *vérifie*

(54)

$$|v|^2 \frac{g_\epsilon^2}{1 + \frac{1}{3}\epsilon |g_\epsilon|} \text{ est relativement compacte dans } w\text{-}L^\infty(dt; L^1(M dv dx))\,.$$

Alors $g_\epsilon(t, x, v) \to g \equiv u(t, x) \cdot v$ *entropiquement à l'ordre 1 pour tout* $t > 0$ *lorsque* $\epsilon \to 0$, *où* u *est la solution de (52).*

Cet énoncé appelle quelques remarques. En premier lieu, la conservation locale de l'impulsion (53) semble garantie par la propriété (7). Malheureusement, les solutions renormalisées de DiPerna-Lions ne vérifient pas l'équation (13) au sens usuel des distributions, et seule la conservation *globale* de l'impulsion est prouvée, à savoir la relation

$$\int \langle v F_\epsilon \rangle (t, x) dx = \int \langle v F_\epsilon \rangle (0, x) dx\,.$$

Ensuite, l'hypothèse (54) peut paraître étrange. Certes, il s'agit d'un affaiblissement de l'hypothèse (51) de la section précédente. Mais on observera surtout que, à $\epsilon > 0$ fixé, la quantité

$$\frac{g_\epsilon^2}{1 + \frac{1}{3}\epsilon |g_\epsilon|}$$

croît linéairement en g_ϵ, ce qui rend plausible son contrôle par le théorème H, qui implique en particulier que

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int \langle h(\epsilon g_\epsilon) \rangle (t, x) dx \le \frac{1}{\epsilon^2} \int \langle h(\epsilon g_\epsilon^{in}) \rangle (x) dx \tag{55}$$

avec la notation $h(z) = (1+z)\ln(1+z) - z$. Evidemment on ne peut espérer contrôler g_ϵ^2 par (55) parce que la fonction h est sous-quadratique. Ce à quoi une analyse minutieuse (basée sur l'inégalité de Young pour les transformées de Legendre) de l'inégalité (55) conduit à l'énoncé

$$\sup_{t,\epsilon>0} \int \left\langle \frac{g_\epsilon^2}{1+\frac{1}{3}\epsilon|g_\epsilon|} \right\rangle (t,x)dx < +\infty\,,$$
$$\sup_{t>0} \int \left\langle |v|^2 \frac{g_\epsilon^2}{1+\frac{1}{3}\epsilon|g_\epsilon|} \right\rangle (t,x)dx = O(|\ln\epsilon|)\,,$$

lorsque $\epsilon \to 0$: voir [2], corollaire 3.2 (3) et proposition 3.3. On voit ainsi que l'hypothèse (54) est sans doute beaucoup moins irréaliste que (51) dans la généralité des solutions renormalisées (toutefois, comme on l'a dit plus haut, l'hypothèse (51) se trouve satisfaite dans certaines situations particulières, comme le cadre des solutions régulières utilisé par Bardos-Ukai [3]).

On observera également que cette méthode ne nécessite de démontrer *aucun résultat de compacité* sur les solutions de (13). Ce trait l'oppose à celle utilisée dans [2] dans le cas stationnaire, qui est basée sur les résultats de moyennisation en vitesse des équations cinétiques [14], [13], ou à celle de [21] pour le cas d'évolution qui utilise, outre la moyennisation, les idées de Schochet sur le filtrage des ondes acoustiques, sous une forme renouvelée dans [22]. La compacité est démontrée par propagation de la convergence entropique initiale, au moyen de l'estimation d'entropie relative présentée dans la section précédente. Evidemment, la méthode de [21] permet de considérer des données moins bien préparées que celles du théorème 3, pour lesquelles elle établit la convergence faible des fluctuations de densité microscopique.

Cette remarque sur la compacité explique pourquoi il existe un énoncé analogue pour la limite Euler: cf. [5], théorème 2.10 p. 108. En effet, démontrer un résultat de compacité a priori des fluctuations de la densité d'impulsion pour les solutions de (13) dans le cas $m > 1$ demeure un problème ouvert majeur des EDP non linéaires, analogue au problème de la compacité pour des solutions de l'équation de Navier-Stokes avec viscosité évanescente. La méthode d'entropie relative permet, là-aussi, d'éviter cette question en utilisant la propagation de la convergence entropique initiale, et reste pour l'instant la seule façon d'aborder la limite de solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann vers des solutions classiques de l'équation d'Euler incompressibles. Il semblerait d'ailleurs (voir [23]) qu'on puisse éviter d'y supposer la conservation locale de l'impulsion.

Voici, pour terminer, quelques indications sur la preuve.

Esquisse de la preuve. Comme on ne s'intéresse pas à l'évolution des fluctuations de température, on part de l'inégalité (48) où l'on fait $\theta = 0$. On va la réécrire en l'adaptant un peu à cause de la renormalisation. Notons dans ce qui suit

$$N_\epsilon = 1 + \tfrac{1}{3}\epsilon g_\epsilon\,, \quad \gamma_\epsilon = \frac{3}{\epsilon}\ln N_\epsilon$$

les quantités liées à la renormalisation au sens de DiPerna-Lions, ainsi que

$$\hat{g}_\epsilon = \frac{g_\epsilon}{1+\frac{1}{3}\epsilon|g_\epsilon|}\,, \quad \hat{u}_\epsilon = \langle v\hat{g}_\epsilon\rangle$$

et ${}^H\hat{g}$ la projection orthogonale (au sens de la mesure Mdv) de $\hat{g}_\epsilon(t,x,\cdot)$ sur $Ker\,\mathcal{L}$. Autrement dit

$${}^H\hat{g}_\epsilon(t,x,\cdot) = \hat{\rho}_\epsilon(t,x) + \hat{u}_\epsilon(t,x)\cdot v + \hat{\theta}_\epsilon(t,x)(b(v)+1)\,.$$

Un calcul fastidieux mais guère plus compliqué que celui de la section précédente montre, grâce à la conservation locale de l'impulsion (53), que

(56)

$$\begin{aligned}H_\epsilon(t) = H_\epsilon(0) - \int_0^t\int \nabla u : [\hat{u}_\epsilon^{\otimes 2} - u_\epsilon\otimes u - u\otimes u_\epsilon + (1+\epsilon\rho_\epsilon)u^{\otimes 2}]dxds\\ + Y_\epsilon - \nu\int_0^t\int|\nabla(u_* - u)|^2dxds + \int_0^t R_\epsilon^3 ds\,.\end{aligned}$$

Le terme Y_ϵ est analogue au terme X_ϵ de la section précédente:

$$\begin{aligned}Y_\epsilon = \int_0^t\int \tfrac{1}{2}\nu|\nabla u_* + \nabla u_*^T|^2\\ + \frac{1}{\epsilon^2}\int\langle G_\epsilon\ln G_\epsilon\rangle(t,x)dx - \frac{1}{\epsilon^2}\int\langle G_\epsilon\ln G_\epsilon\rangle(0,x)dx\,.\end{aligned}$$

Il vérifie également:

$$\limsup_{\epsilon\to 0} Y_\epsilon \le 0\,,$$

(loc. cit.). Enfin le terme de reste est donné par la formule

(57)

$$
\begin{aligned}
R_\epsilon^3 = Y_\epsilon - \nu \int |\nabla(u_* - u)|^2 dx + 2\nu \int \nabla u : \nabla(u_\epsilon - u_*) dx \\
+ \int \nabla p \cdot (u_\epsilon - \epsilon\rho_\epsilon u) dx - \epsilon \int \nabla u : \nabla(\rho_\epsilon u)) dx \\
+ \int \left\langle (\mathcal{L}^{-1} A) \left(\frac{\mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon)}{N_\epsilon} - \mathcal{Q}({}^H\hat{g}_\epsilon, {}^H\hat{g}_\epsilon) \right) \right\rangle dx \\
+ \int \nabla_x u : \left\langle (\mathcal{L}^{-1} A) \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{1}{N_\epsilon} \right) \mathcal{L} g_\epsilon \right\rangle dx \\
+ \int \nabla_x u : \langle \mathcal{L}^{-1} A \otimes v(\gamma_\epsilon - {}^H\!g_\epsilon) \rangle dx + \epsilon \int \nabla_x u : \langle \mathcal{L}^{-1} A \partial_t \gamma_\epsilon \rangle dx \,.
\end{aligned}
$$

Un calcul élémentaire montre que

$$
\begin{aligned}
& \int |\nabla u : [\hat{u}_\epsilon^{\otimes 2} - u_\epsilon \otimes u - u \otimes u_\epsilon + (1 + \epsilon\rho_\epsilon) u^{\otimes 2}]| dx \\
& \le \int |\nabla u : (\hat{u}_\epsilon - u)^{\otimes 2}| dx \\
& + \int |\nabla u : [(u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon) \otimes u - u \otimes (u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon) - \epsilon\rho_\epsilon u^{\otimes 2}]| dx \\
& \le \int |\nabla u| |\hat{u}_\epsilon - u|^2 dx + \int |\nabla u| [2|u||u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon| + \epsilon |\rho_\epsilon| |u|^2] dx \\
& \le \int |\nabla u| [|\hat{u}_\epsilon|^2 - 2u_\epsilon \cdot u + (1 + \epsilon\rho_\epsilon)|u|^2] dx \\
& + 2 \int |\nabla u| [2|u||u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon| + \epsilon |\rho_\epsilon| |u|^2] dx \\
& \le 2 \|\nabla u\|_{L^\infty} H_\epsilon + 2 \int |\nabla u| [2|u||u_\epsilon - \hat{u}_\epsilon| + \epsilon |\rho_\epsilon| |u|^2] dx \,,
\end{aligned}
$$

puisque (voir [5], p. 105, formule (2.305-306)) l'on a

$$
\frac{1}{\epsilon^2} \int \langle G_\epsilon \ln G_\epsilon \rangle dx \ge \tfrac{1}{2} \int \langle \hat{g}_\epsilon^2 \rangle dx \ge \tfrac{1}{2} \int \langle {}^H\hat{g}_\epsilon^2 \rangle dx \ge \tfrac{1}{2} \int |u_\epsilon|^2 dx \,.
$$

Grâce à cette denière inégalité, on peut conclure en appliquant l'inégalité de Gronwall comme expliqué dans la section précédente. L'hypothèse (54) permet enfin de montrer que les termes de reste tendent vers 0 (voir la discussion qui en est faite dans [5] p. 104, particulièrement les résultats **a-b**, qui proviennent de [2] que l'on pourra consulter pour plus de détails). □

5. Principaux résultats dans le cas du modèle de BGK

Nous terminons cette description de la méthode d'entropie relative en montrant comment on peut l'appliquer pour établir la limite Euler du modèle de BGK à fréquence de collision constante (disons égale à 1 dans ce qui suit). On pourrait également utiliser cette méthode pour le cas de la limite conduisant aux équations de Navier-Stokes (couplées à l'équation de température), mais un résultat récent permet de démontrer cette limite par des méthodes de compacité, et donc pour des données initiales beaucoup plus générales: voir [28].

Le calcul formel de l'avant-dernière section permet d'ailleurs d'espérer obtenir à partir du modèle de BGK les équations d'Euler incompressibles couplées à l'équation de transport de la température. Malheureusement, il subsiste encore des difficultés pour aller au delà d'un énoncé formel.

On part donc du problème de Cauchy pour le modèle de BGK, considéré ici dans l'espace entier:

$$
\begin{aligned}
&\epsilon\partial_t F_\epsilon + v\cdot\nabla_x F_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^m}(M_{F_\epsilon} - F_\epsilon)\,, \quad t>0\,,\ x,v\in\mathbf{R}^D\,,\\
&F_\epsilon(0,x,v) = F_\epsilon^{in}(x,v) = M(1+\epsilon g_\epsilon^{in}(x,v))\,, \quad x,v\in\mathbf{R}^D\,.
\end{aligned} \tag{58}
$$

On supposera que, lorsque $\epsilon\to 0$,

$$
g_\epsilon^{in}(x,v)\to g^{in}(x,v) = u^{in}\cdot v \ \text{ entropiquement à l'ordre } 1\,. \tag{59}
$$

Perthame [26] a démontré l'existence globale de solutions faibles pour (58). Sa démonstration ne fait appel à aucun argument de renormalisation, et par conséquent, les solutions obtenues vérifient les conservations locales de l'impulsion et de l'énergie. Elle doit être légèrement modifiée afin de prendre en compte des données initiales vérifiant (59) — il considère en effet des solutions convergeant vers 0 pour $|x|\to+\infty$, et non pas, comme ici, vers la maxwellienne M. Ainsi, pour tout $\epsilon>0$ fixé,

$$
\begin{aligned}
(\epsilon\partial_t + v\cdot\nabla_x)(F_\epsilon - M) \in L^\infty(dt; L^1((1+|v|^2)dvdx))\,,\\
F_{\epsilon|t=0} - M \in L^1((1+|v|^2)dvdx)\,.
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de multiplier chaque membre de l'égalité ci-dessus par $|v|x\cdot v/(1+|x|^2)^{1/2}$ (voir[24]) et d'intégrer sur $[0,T]\times\mathbf{R}^D\times\mathbf{R}^D$ pour en déduire que $F_\epsilon\in L^1_{loc}(dtdx; L^1(|v|^3dv))$. C'est cette estimation qui légitime immédiatement les lois de conservation formelles obtenues à partir de (7) pour $\mathcal{C}=\mathcal{C}_{BGK}$.

Théorème 4. *Soit une famille g_ϵ^{in} vérifiant (59) où u^{in} est un champ de vecteurs à divergence nulle sur $\mathbf{R}^D$ tel que l'équation d'Euler*

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = 0\,, \\ \nabla_x \cdot u = 0\,, \end{aligned} \tag{60}$$

admette une solution classique u sur $[0,T]\times\mathbf{R}^D$ de donnée initiale u^{in}, et telle que $\nabla u + \nabla u^T \in L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^D)$. Soit alors F_ϵ solution faible de l'équation de BGK rescalée (58). Alors $g_\epsilon(t,x,v) = \frac{F_\epsilon(t,x,v)-M(v)}{\epsilon M(v)} \to u(t,x)\cdot v$ entropiquement à l'ordre 1 lorsque $\epsilon \to 0$ pour tout $t \in [0,T]$, où u est la solution de (60).

Esquisse de la preuve. La démonstration de ce résultat suit de très près celle du théorème 3, à cela près que l'on n'a pas besoin de s'inquiéter du terme de production d'entropie (on utilisera seulement le fait que ce terme est positif).

La principale différence vient de la façon dont on contrôle le terme

$$\frac{1}{\epsilon^2}\iint \nabla u : (v-\epsilon u)^{\otimes 2} F_\epsilon dv dx \quad \text{par} \quad \frac{1}{\epsilon^2} H(F_\epsilon | M_{(1,\epsilon u,1)})\,.$$

Comme dans [27], on utilisera ici la décomposition

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2}\iint \nabla u : (v-\epsilon u)^{\otimes 2} F_\epsilon dv dx = \frac{1}{\epsilon^2}\iint \nabla u : (v-\epsilon u)^{\otimes 2} M_{F_\epsilon} dv dx \\ + \frac{1}{\epsilon^2}\iint_{\mathcal{D}_\epsilon^1(t)} \nabla u : (v-\epsilon u)^{\otimes 2}(F_\epsilon - M_{F_\epsilon}) dv dx \\ + \frac{1}{\epsilon^2}\iint_{\mathcal{D}_\epsilon^2(t)} \nabla u : (v-\epsilon u)^{\otimes 2}(F_\epsilon - M_{F_\epsilon}) dv dx\,, \end{aligned}$$

où les ensembles $\mathcal{D}_\epsilon^1(t)$ et $\mathcal{D}_\epsilon^2(t)$ sont définis par

$$\mathcal{D}_\epsilon^1(t) = \{x \in \mathbf{R}^D \,|\, |\epsilon\rho_\epsilon(t,x)| \le \tfrac{1}{2}\,,\ |\epsilon(u_\epsilon(t,x) - u)| \le \tfrac{1}{2}\,,\ |\epsilon\theta_\epsilon| \le \tfrac{1}{2}\}\,,$$

et

$$\mathcal{D}_\epsilon^2(t) = (\mathcal{D}_\epsilon^1(t))^c\,.$$

Sur $\mathcal{D}_\epsilon^1(t)$, on voit facilement que le terme de production d'entropie contrôle $F_\epsilon - M_{F_\epsilon}$, alors que sur $\mathcal{D}_\epsilon^2(t)$ ce terme est contrôlé par l'entropie relative. Voir les détails dans [12]. □

References

[1] Bardos C., Golse F., Levermore D., Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations I: Formal Derivations. J. of Stat. Phys. 63 (1991), 323–344.

[2] Bardos C., Golse F., Levermore D., Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for the Boltzmann Equation. Comm. on Pure and Appl. Math. 46 (1993), 667–753.

[3] Bardos C., Ukai S., The Classical Incompressible Navier–Stokes Limit of the Boltzmann Equation. Math. Models and Methods in the Appl. Sciences 1 (1991), 235–257.

[4] Boltzmann L., Lectures on Gas Theory. Translated by Stephen G. Brush. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif. 1964.

[5] Bouchut, F., Golse, F., Pulvirenti, M., Kinetic equations and asymptotic theories; édité par L. Desvillettes et B. Perthame. Series in Applied Mathematics 4. Editions scientifiques et médicales Elsevier, Paris (2000).

[6] Caflisch R., The Fluid Dynamic Limit of the Boltzmann Equation. Comm. on Pure and Appl. Math. 33 (1980), 651–666.

[7] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M., The Mathematical Theory of Dilute Gases. Applied Mathematical Sciences, 106. Springer-Verlag, New York, 1994.

[8] Constantin P., Foias C., Navier–Stokes Equations. Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[9] Decoster, A., Markowich, P., Perthame, B., Modeling of collisions; édité par P.-A. Raviart. Series in Applied Mathematics 2. Editions scientifiques et médicales Elsevier, Paris (1997).

[10] DeMasi A., Esposito R., Lebowitz J., Incompressible Navier–Stokes and Euler Limits of the Boltzmann Equation. Comm. on Pure and Appl. Math. 42 (1990), 1189–1214.

[11] DiPerna R., Lions P.-L., On the Cauchy Problem for the Boltzmann Equation: Global Existence and Weak Stability Results. Annals of Math. 130 (1990), 321–366.

[12] Golse, F., Levermore, C. D., Saint-Raymond, L., en préparation.

[13] Golse F., Lions P.-L., Perthame B., Sentis R., Regularity of the Moments of the Solution of a Transport Equation. J. of Funct. Anal. 76 (1988), 110-125.

[14] Golse F., Perthame B., Sentis R., Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale de l'opérateur de transport. C.R. Acad. Sci. 301 (1985), 341–344.

[15] Grad H., Asymptotic theory of the Boltzmann equation II; dans *Rarefied Gas Dynamics*, édité par J. A. Laurman, Vol. 1, 26–59 (1963).

[16] Hilbert, D., Begründung der kinetischen Gastheorie; Math. Annalen 72 (1912), 562–577.

[17] Klainerman S., Majda A., Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. Comm. Pure Appl. Math. 34 (4) (1981), 481–524. Et "Compressible and incompressible fluids". Comm. Pure Appl. Math. 35 (5) (1982), 629–651.

[18] Landau L., Lifshitz E., Course of theoretical physics. Vol. 1. Mechanics. Third edition. Translated from the Russian by J. B. Skyes and J. S. Bell. Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1976.

[19] Lanford, O., The evolution of large classical systems; in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, édité par J. Moser, pp. 1-111. Lect. Notes in Physics 35, Springer Verlag (1975).

[20] Lions P.-L., Masmoudi N., Incompressible limit for a viscous compressible fluid. J. Math. Pures Appl. (9) 77 (6) (1998) 585–627.

[21] Lions P.-L., Masmoudi N., preprint.

[22] Lions P.-L., Masmoudi N., Une approche locale de la limite incompressible; C.R. Acad. Sci. 329 (1999), no. 5, 387–392.

[23] Lions P.-L., Masmoudi N., communication personnelle.
[24] Lions, P.-L., Perthame, B., Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion; C. R. Acad. Sci. 314 (1992), no. 11, 801–806.
[25] Maxwell J.C., On the Dynamical Theory of Gases. Phil. Trans. of the Royal Society of London 157 (1867), 49–88.
[26] Perthame B., Global Existence to the BGK Model of the Boltzmann Equation. J. Diff. Eq. 82 (1989), 191–205.
[27] Saint-Raymond, L., Discrete time Navier-Stokes limit for the BGK Boltzmann equation; preprint.
[28] Saint-Raymond, L., travail en préparation.
[29] Yau, H.-T., Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. Letters in Math. Phys. 22 (1991), 63–80.

(F. Golse) Département de Mathématiques et Applications, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France
E-mail address: golse@dma.ens.fr

(C.D. Levermore, Current Address) Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742-4015, USA
E-mail address: lvrmr@math.umd.edu

(L. Saint-Raymond) Département de Mathématiques et Applications, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France
E-mail address: saintray@dma.ens.fr