Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Jean Duchon et Raoul Robert

Dissipation d'énergie pour des solutions faibles des équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XIII, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

DISSIPATION D'ENERGIE POUR DES SOLUTIONS FAIBLES DES EQUATIONS D'EULER ET NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

Jean DUCHON[1], **Raoul ROBERT**[2]

[1] Université LYON 1, Laboratoire d'Analyse Numérique,
CNRS UMR 5585, Bât.101, 43 bld du onze novembre 1918,
69622 Villeurbanne cedex, France.

[2] Institut FOURIER CNRS, 100 rue des mathématiques, BP 74, 38402
Saint Martin d'Hères Cedex, France.

Résumé.

On étudie l'équation locale de l'énergie pour des solutions faibles des équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles tridimensionnelles. On explicite un terme de dissipation provenant de l'éventuel défaut de régularité de la solution. On donne au passage une preuve simple de la conjecture d'Onsager, améliorant un peu l'hypothèse de [1]. On propose une notion de solution dissipative pour de telles solutions faibles.

1 Introduction.

Dans cette étude, nous nous intéressons pour l'essentiel aux équations de Navier-Stokes et Euler, incompressibles et tridimensionnelles. Par souci de simplicité nous nous limiterons à l'étude des écoulements sur le tore $\mathcal{T} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$ (conditions aux limites périodiques).

Considérons en premier lieu l'équation de Navier-Stokes. Pour un champ de vitesse initial $\mathbf{u}_0$ d'énergie finie, il est bien connu qu'il existe au moins une solution faible (i.e. au sens des distributions) au problème de Cauchy [4, 5, 6].

A priori cette solution est dans l'espace $L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H^1)$ et on n'a pas de régularité suffisante pour montrer qu'elle satisfait l'égalité de l'énergie ; on sait seulement qu'on peut construire une solution faible vérifiant :

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 d\mathbf{x} + \nu \int (\nabla \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \leq 0 \ .$$

Nous montrons dans un premier temps que pour toute solution faible $\mathbf{u}$ de l'équation de Navier-Stokes, on peut expliciter un terme de dissipation $D(\mathbf{u})$, distribution sur $]0,T[\times\mathcal{T}$, lié au défaut de régularité éventuel de la solution, et tel que l'équation locale de l'énergie soit satisfaite :

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) + \mathrm{div}(\mathbf{u}(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)) - \nu\Delta\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \nu(\nabla\mathbf{u})^2 + D(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \ .$$

Ainsi la non conservation de l'énergie pour les solutions faibles de Navier-Stokes a une double origine : d'une part un terme de dissipation visqueuse et d'autre part un terme lié a un défaut de régularité éventuel de la solution.

En ce qui concerne l'équation d'Euler, nous considérons des solutions faibles dans l'espace $L^3(0,T;L^3)$. Bien qu'il n'y ait à l'heure actuelle aucun résultat général sur l'existence globale en temps de telles solutions, on en connaît des exemples (considérer n'importe quelle solution faible bidimensionnelle donnée par le théorème de Youdovitch [10]).

Selon une approche d'étude de la turbulence qui remonte à Onsager [7] il se pourrait que le flot turbulent tridimensionnel soit convenablement décrit par de telles solutions faibles. Il est facile de voir par une simple intégration par parties que les solutions régulières d'Euler conservent l'énergie, mais ce calcul ne s'étend pas aux solutions faibles. On a pu mettre en évidence des solutions faibles qui ne conservent pas l'énergie (Scheffer [9], Shnirelman [8]).

Les considérations précédentes sur la dissipation dans l'équation de Navier-Stokes s'appliquent de la même manière aux solutions faibles d'Euler, pour lesquelles on a également une équation locale de l'énergie :

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) + \mathrm{div}(\mathbf{u}(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)) + D(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \ .$$

Onsager avait conjecturé que des solutions faibles d'Euler satisfaisant une condition de régularité hölderienne d'ordre $> 1/3$ devaient conserver l'énergie cinétique. On doit à Eyink [2] d'avoir mis l'accent sur l'intérêt de cette question, il a également donné une preuve de la conservation de l'énergie sous l'hypothèse plus forte que le champ de vitesse est höldérien d'ordre $> 1/2$. Constantin, E et Titi [1] ont ensuite donné une preuve simple et élégante de la conservation d'énergie sous l'hypothèse plus naturelle et plus faible que $\mathbf{u}$ est dans l'espace de Besov $B_3^{\alpha,\infty}$ avec $\alpha > 1/3$.

La forme explicite du terme $D(\mathbf{u})$ nous permet de donner une preuve de la conjecture d'Onsager sous une hypothèse de régularité un peu plus faible.

On aborde ensuite le problème de distinguer parmi les solutions faibles d'Euler ou Navier-Stokes celles qui sont physiquement acceptables. On constate tout d'abord que les solutions faibles de Navier-Stokes construites par Leray vérifient $D(\mathbf{u}) \geq 0$. On montre également que toute solution faible d'Euler qui est limite forte de solutions régulières des équations de Navier-Stokes vérifie cette même condition. Ceci nous conduit à définir des solutions faibles dissipatives : celles qui vérifient $D(\mathbf{u}) \geq 0$.

2 Equation locale de l'énergie pour des solutions faibles de Navier-Stokes et Euler

L'essentiel de notre démarche est exprimé par les deux résultats qui suivent.

Proposition 1 *Soit $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^1) \cap L^\infty(0,T;L^2)$, une solution faible de l'équation de Navier-Stokes sur le tore $\mathcal{T}$:*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_i(u_i \mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad (1) \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Pour toute fonction φ indéfiniment dérivable à support compact sur $\mathbb{R}^3$, positive, paire et d'intégrale 1, on note

$$\varphi^\varepsilon(\xi) = (\frac{1}{\varepsilon^3})\varphi(\frac{\xi}{\varepsilon})$$

et

$$D_\varepsilon(\mathbf{u})(x) = \frac{1}{4}\int \nabla\varphi^\varepsilon(\xi).\delta\mathbf{u}(\delta\mathbf{u})^2 d\xi, \text{ où } \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(x+\xi) - \mathbf{u}(x) \ .$$

Alors, quand ε tend vers 0, les fonctions $D_\varepsilon(\mathbf{u})$ (qui sont dans $L^1(]0,T[\times\mathcal{T})$) convergent au sens des distributions sur $]0,T[\times\mathcal{T}$ vers une distribution $D(\mathbf{u})$, indépendante de φ, et on a l'équation locale de l'énergie :

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) + \text{div}(\mathbf{u}(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)) - \nu\Delta\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \nu(\nabla\mathbf{u})^2 + D(\mathbf{u}) = 0 \ .$$

Preuve. En utilisant l'inclusion de Sobolev de H^1 dans L^6 on voit facilement que $\mathbf{u}$ est dans $L^3(0,T;L^3)$ et donc u_iu_k est dans $L^{3/2}(0,T;L^{3/2})$ de même que p puisque en prenant la divergence de l'équation (1), on obtient :

$$-\Delta p = \partial_k\partial_i(u_iu_k),$$

si on désigne par p l'unique solution périodique de moyenne nulle, l'opérateur linéaire qui à u_iu_k fait correspondre p est fortement continu sur L^q pour tout $1 < q < \infty$, et donc $p \in L^{3/2}(0,T;L^{3/2})$.

Maintenant régularisons l'équation (1) (on convole par φ^ε), en posant $\mathbf{u}^\varepsilon = \varphi^\varepsilon * \mathbf{u}$, il vient :

$$\partial_t\mathbf{u}^\varepsilon + \partial_i(u_i\mathbf{u})^\varepsilon - \nu\Delta\mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \ ,$$

on multiplie scalairement cette équation par $\mathbf{u}$ et (1) par $\mathbf{u}^\varepsilon$ puis on fait la somme, on obtient :

$$\partial_t(\mathbf{u}.\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathrm{div}((\mathbf{u}.\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u} + p^\varepsilon\mathbf{u} + p\mathbf{u}^\varepsilon) + E_\varepsilon - \nu\Delta(\mathbf{u}.\mathbf{u}^\varepsilon) + 2\nu\nabla\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \ ,$$

où on note

$$E_\varepsilon(t,x) = \partial_i(u_iu_j)^\varepsilon u_j - u_iu_j\partial_iu_j^\varepsilon \ .$$

Puisque $\mathbf{u} \in L^3(0,T;L^3)$, $\mathbf{u}.\mathbf{u}^\varepsilon$ converge vers $\mathbf{u}^2$ et $(\mathbf{u}.\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u} + p^\varepsilon\mathbf{u} + p\mathbf{u}^\varepsilon$ converge vers $(\mathbf{u}^2 + 2p)\mathbf{u}$ au sens des distributions sur $]0,T[\times\mathcal{T}$.

Comme de plus $\nabla\mathbf{u}^\varepsilon$ tend vers $\nabla\mathbf{u}$ fortement dans $L^2(]0,T[\times\mathcal{T})$, $E_\varepsilon(t,x)$ converge au sens des distributions vers

$$-\partial_t(\mathbf{u}^2) - \mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{u}^2 + 2p)) + \nu\Delta\mathbf{u}^2 - 2\nu(\nabla\mathbf{u})^2 \ .$$

Par ailleurs, un calcul direct donne

$$\int \nabla\varphi^\varepsilon(\xi).\delta\mathbf{u}(\delta\mathbf{u})^2 d\xi = -\partial_i(u_iu_ju_j)^\varepsilon + 2\partial_i(u_iu_j)^\varepsilon u_j + \partial_i(u_ju_j)^\varepsilon u_i - 2u_iu_j\partial_iu_j^\varepsilon \ .$$

Or $\partial_i(u_ju_j)^\varepsilon u_i = \partial_i(u_i(u_ju_j)^\varepsilon)$, à cause de l'incompressibilité de $\mathbf{u}$.

De plus $\partial_i(u_i(u_ju_j)^\varepsilon - (u_iu_ju_j)^\varepsilon)$ tend vers 0 au sens des distributions sur $]0,T[\times\mathcal{T}$ et donc $\int \nabla\varphi^\varepsilon(\xi).\delta\mathbf{u}(\delta\mathbf{u})^2 d\xi$ a la même limite que $2E_\varepsilon$. ■

Le même raisonnement s'applique intégralement pour une solution faible de l'équation d'Euler ($\nu = 0$) et donne.

Proposition 2 *Soit* $\mathbf{u} \in L^3(0,T;L^3)$ *une solution faible de l'équation d'Euler. Alors les fonctions* $D_\varepsilon(\mathbf{u})$ *convergent, au sens des distributions, vers* $D(\mathbf{u})$*, distribution indépendante de* φ *et on a l'équation locale de l'énergie :*

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) + \mathrm{div}(\mathbf{u}(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)) + D(\mathbf{u}) = 0 \ .$$

Remarque. Dans les deux propositions précédentes, le terme $D(\mathbf{u})$ mesure une éventuelle dissipation (ou création) d'énergie liée à un défaut de régularité du champ $\mathbf{u}$, ce terme est sans rapport avec la présence ou non d'une viscosité.

Enonçons maintenant une condition de régularité simple impliquant $D(\mathbf{u}) = 0$.

Proposition 3 *Supposons* $\|\mathbf{u}(t,x+\xi) - \mathbf{u}(t,x)\|_{L^3(dx)} \leq C(t)|\xi|^{1/3}\sigma(|\xi|)$*, où* $\sigma(a)$ *tend vers 0 avec* a*, et* $\int_0^T C(t)^3 dt < +\infty$*.*

Alors $D(\mathbf{u}) = 0$.

Preuve. On a $|\int \nabla\varphi^\varepsilon(\xi).\delta\mathbf{u}(\delta\mathbf{u})^2 d\xi| \leq \int |\nabla\varphi^\varepsilon(\xi)||\delta\mathbf{u}|^3 d\xi$, intégrons sur $]0,T[\times\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}\int dt \int |D_\varepsilon(\mathbf{u})| dx &\leq \int dt \int |\nabla\varphi^\varepsilon| \|u(x+\xi) - u(x)\|_{L^3}^3, d\xi \ , \\ &\leq \int_0^T C(t)^3 dt \int \tfrac{1}{\varepsilon^4}|\nabla\varphi(\tfrac{\xi}{\varepsilon})||\xi|\sigma^3(|\xi|) d\xi \ ,\end{aligned}$$

et en posant $\xi = \varepsilon\eta$ on voit que ce terme tend vers 0 avec ε. ■

Remarque. Si $\mathbf{u}$ vérifie la condition de régularité ci-dessus on obtient donc, en intégrant en x l'équation locale de l'énergie, que l'énergie cinétique est conservée pour une telle solution faible de l'équation d'Euler. Ceci donne une preuve de la conjecture d'Onsager [1, 2, 7] sous une hypothèse un peu plus faible que $\mathbf{u}$ dans l'espace $L^3(0,T;B_3^{\alpha,\infty}(\mathcal{T}))$ avec $\alpha > 1/3$ et où $B_3^{\alpha,\infty}$ désigne de manière standard l'espace de Besov.

3 Un modèle de turbulence physiquement acceptable ?

La question est toujours posée de savoir si des solutions faibles peu régulières de l'équation de Navier-Stokes, pour lesquelles l'unicité n'est pas connue, ou bien d'hypothétiques solutions faibles de l'équation d'Euler pourraient décrire de façon pertinente les écoulements turbulents à grand nombre de Reynolds. Il semble raisonnable de demander à ces solutions des conditions supplémentaires : l'une d'elles peut être que le défaut de régularité ne puisse pas conduire (même localement) à de la création d'énergie. Autrement dit, on devrait avoir $D(\mathbf{u}) \geq 0$ sur $]0, T[\times \mathcal{T}$.

Il est tout à fait remarquable que cette condition soit satisfaite par toute solution faible de Navier-Stokes, obtenue comme limite d'une sous suite de la suite $\mathbf{u}^\varepsilon$ des solutions de l'équation régularisée introduite par J. Leray [4,5] :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \partial_i((\varphi^\varepsilon * u_i^\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon) - \nu\Delta\mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \ , \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^\varepsilon) = 0 \ , \mathbf{u}^\varepsilon(0) = \varphi^\varepsilon * \mathbf{u}_0 \ . \end{cases}$$

Pour tout $\mathbf{u}_0$ donné dans L^2 et tout $\varepsilon > 0$, cette équation a une solution C^∞ unique $\mathbf{u}^\varepsilon$. La suite $\mathbf{u}^\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1) \cap L^\infty(0,T;L^2)$ et, modulo l'extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\mathbf{u}^\varepsilon$ converge vers $\mathbf{u}$, solution faible de Navier-Stokes, faiblement dans $L^2(0,T;H^1)$ et fortement dans $L^3(0,T;L^3)$. Or pour cette équation régularisée, on a l'équation locale de l'énergie :

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\varepsilon 2}) + \operatorname{div}((\varphi^\varepsilon * \mathbf{u}^\varepsilon)\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\varepsilon 2} + p^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) - \nu\Delta\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\varepsilon 2} + \nu(\nabla\mathbf{u}^\varepsilon)^2 = 0 \ ,$$

on en déduit que $\nu(\nabla\mathbf{u}^\varepsilon)^2$ converge au sens des distributions vers

$$-\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) - \operatorname{div}(\mathbf{u}(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)) + \nu\Delta\frac{1}{2}\mathbf{u}^2.$$

Pour toute fonction $\psi(t,x)$ indéfiniment dérivable à support compact et positive, la fonctionnelle $\iint(\nabla\mathbf{u})^2\psi(t,x)dxdt$ est convexe et faiblement s.c.i. sur $L^2(0,T;H^1)$, et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint(\nabla\mathbf{u}^\varepsilon)^2\psi(t,x)dxdt \geq \iint(\nabla\mathbf{u})^2\psi(t,x)dxdt \ ,$$

d'où $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\nu(\nabla\mathbf{u}^\varepsilon)^2 - \nu(\nabla\mathbf{u})^2 = D(\mathbf{u}) \geq 0$.

Remarque. A ce stade deux questions naturelles se posent.

1) Existe-il des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes dans $L^2(0,T;H^1) \cap L^\infty(0,T;L^2)$ telles que $D(\mathbf{u})$ soit non nul ?

2) La condition $D(\mathbf{u}) \geq 0$ redonne la condition d'entropie usuelle si on l'applique au cas de l'équation de Burgers à une dimension d'espace (condition de

sauts négatifs). Cette condition suffit-elle à assurer l'unicité pour les solutions faibles de Navier-Stokes ?

Nous appellerons dissipative une telle solution faible.

La proposition suivante montre que la condition $D(\mathbf{u}) \geq 0$ apparaît naturellement pour des solutions faibles d'Euler.

Proposition 4 *Soit* $\mathbf{u}$ *dans* $L^3(0,T;L^3)$ *une solution faible de l'équation d'Euler qui est limite forte dans cet espace d'une suite de solutions dissipatives de Navier-Stokes (lorsque la viscosité tend vers 0). Alors* $D(\mathbf{u}) \geq 0$.

Preuve. Les solutions faibles de Navier-Stokes $\mathbf{u}^\nu$ vérifient :

$$\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\nu 2}) + \mathrm{div}((\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\nu 2} + p^\nu)\mathbf{u}^\nu) - \nu\Delta\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\nu 2} + \nu(\nabla\mathbf{u}^\nu)^2 + D(\mathbf{u}^\nu) = 0 \ .$$

Comme $\mathbf{u}^\nu$ tend vers $\mathbf{u}$ fortement dans $L^3(0,T;L^3)$, on en déduit :

$$\lim_{\nu\to 0}(\nu(\nabla\mathbf{u}^\nu)^2 + D(\mathbf{u}^\nu)) = -\partial_t(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2) - \mathrm{div}((\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + p)\mathbf{u}) = D(\mathbf{u}),$$

au sens des distributions, et donc $D(\mathbf{u}) \geq 0$. ∎

Remarque.

Soit $\mathbf{u}$ dans $L^3(0,T;L^3)$ une solution faible d'Euler, dissipative au sens $D(\mathbf{u}) \geq 0$. Alors c'est une solution dissipative au sens de P.L. Lions [6] ; en effet, il est facile de voir que toute solution faible telle que $\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 dx \leq 0$ est une solution dissipative au sens de Lions. En fait cette dernière condition est beaucoup moins exigeante puisqu' elle n'empêche pas a priori la création locale d'énergie dans certaines régions de l'écoulement mais concerne seulement le bilan global.

4 Le cas bidimensionel.

En dimension deux la situation est plus claire en ce qui concerne l'équation de Navier-Stokes. Pour toute donnée initiale $\mathbf{u}_0$ dans L^2 on a une solution faible unique dans $L^2(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;L^2)$ et cette solution vérifie l'égalité de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\int\mathbf{u}^2(T,x)dx + \nu\int_0^T dt\int(\nabla\mathbf{u})^2 dx = \frac{1}{2}\int\mathbf{u}_0^2(x)dx \ .$$

On a même un peu mieux.

Proposition 5 *Soit* $\mathbf{u}$ *la solution faible unique de Navier-Stokes décrite ci-dessus, alors* $D(\mathbf{u}) = 0$.

Preuve. Partons de l'inégalité d'interpolation

$$\|\mathbf{u}(t,x,+\xi) - \mathbf{u}(t,x)\|_{L^3(dx)} \leq C\|\delta u\|_{L^2}^{2/3}\|\delta u\|_{H^1}^{1/3} \ ,$$

en utilisant $\|\delta u\|_{L^2} \leq |\xi| \ \|u\|_{H^1}$, il vient

$$\|\delta u\|_{L^3}^3 \leq C|\xi| \ \|u\|_{H^1}^2 \|\delta u\|_{L^2} \leq C|\xi| \|u\|_{H^1}^2 \ . \tag{2}$$

D'autre part, on obtient immédiatement

$$\|D_\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^1(dx)} \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int |\nabla\varphi(\xi)| \ \|\mathbf{u}(t,x+\varepsilon\xi) - \mathbf{u}(t,x)\|_{L^3(dx)}^3 d\xi \ ,$$

donc en utilisant (2)

$$\|D_\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^1(dx)} \leq \frac{C}{4}\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \int |\nabla\varphi(\xi)||\xi| d\xi \ ,$$

est donc majoré presque partout sur $[0,T]$ par une fonction intégrable fixe.

De plus, pour presque tout t dans $[0,T]$ on a

$$\|\mathbf{u}(t,x+\varepsilon\xi) - \mathbf{u}(t,x)\|_{L^3(dx)}^3 \leq C\varepsilon^2|\xi|^2\|u\|_{H^1}^3 \ ,$$

et donc, pour presque tout t, $\|D_\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^1(dx)} \to 0$ quand ε tend vers 0. Et en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient $D(\mathbf{u}) = 0$. ■

Examinons maintenant le cas des solutions faibles d'Euler 2D.

Pour $\mathbf{u}_0$ dans L^2 telle que $\omega_0 = \text{rot } \mathbf{u}_0 \in L^r, r > 1$, on sait qu'il existe une solution faible $\mathbf{u}$ dans $C([0,\infty[;W^{1,r})$ (cas $r < \infty$) [6]. D'après l'inclusion de Sobolev, pour $r \geq 6/5$, on a $W^{1,r} \subset L^3$, alors $D(\mathbf{u})$ existe et on a l'équation locale de l'énergie avec $D(\mathbf{u})$. On a également

Proposition 6 *Soit* $\mathbf{u}$ *une solution faible d'Euler comme ci-dessus avec* $r > 3/2$, *alors* $D(\mathbf{u}) = 0$.

Preuve. Appliquons l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(x+\xi) - \mathbf{u}(x)\|_{L^3(dx)} &\leq \|\delta\mathbf{u}\|_{L^r}^\alpha \|\delta\mathbf{u}\|_{L^q}^{1-\alpha}, \text{ où } \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{q} \\ &\leq c|\xi|^\alpha \|u\|_{W^{1,r}}^\alpha \|\delta u\|_{L^q}^{1-\alpha} \ ,\end{aligned}$$

prenons $q = \frac{2r}{2-r}$, de sorte que $\| \ \|_{L^q} \leq c\| \ \|_{W^{1,r}}$, il vient

$$\|\delta \mathbf{u}\|_{L^3} \leq c|\xi|^\alpha \|\mathbf{u}\|_{W^{1,r}} \ ,$$

avec $\alpha = \frac{5}{3} - \frac{2}{r}$.

Si $r > 3/2$, on peut toujours trouver $\alpha > 1/3$ et donc appliquer la proposition 3. ■

5 Explicitation de $D(u)$ et loi du $4/5$.

On a vu que $D(\mathbf{u})$ ne dépend pas de φ, on va l'exprimer à partir de fonctions à symétrie radiale $\varphi(|\xi|)$. Un rapide calcul donne

$$D_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^\infty \varphi'(r)r^2 dr \int_{|\xi|=1} (\mathbf{u}(x+\varepsilon r\xi) - \mathbf{u}(x))^2 \delta\mathbf{u}.\xi d\sigma(\xi),$$

Notons

$$S(\mathbf{u})(x,r) = \int_{|\xi|=1} (\mathbf{u}(x+r\xi) - \mathbf{u}(x))^2 \delta\mathbf{u}.\xi d\sigma(\xi) \ ,$$

il faut bien sûr supposer un peu de régularité sur $\mathbf{u}$ (par exemple $\mathbf{u}$ continu) pour que cette expression ait un sens. Écrivons

$$D_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \varphi'(r)r^3 \frac{S(\mathbf{u})(x,\varepsilon r)}{\varepsilon r} dr \ ,$$

supposons maintenant que lorsque $\varepsilon \to 0$, $\frac{S(\mathbf{u})(x,\varepsilon)}{\varepsilon}$ tende vers une limite notée $s(\mathbf{u})(x)$, alors $D_\varepsilon(\mathbf{u}) \to \frac{1}{4}s(\mathbf{u}) \int_0^\infty \varphi'(r)r^3 dr = -\frac{3}{16\pi}s(\mathbf{u})$.

La loi du 4/5 exprime que pour un champ turbulent aléatoire stationnaire homogène et isotrope $\mathbf{u}$ on doit avoir

$$\langle(\delta\mathbf{u}.\frac{\xi}{|\xi|})^3\rangle = -\frac{4}{5}D|\xi| \ ,$$

où D est le taux de dissipation d'énergie par unité de masse et $\langle \ \rangle$ la moyenne statistique.

Sans hypothèse d'isotropie, on peut montrer (cf. Frisch [3])

$$D = -\frac{1}{4}\mathrm{div}_\xi \langle(\delta\mathbf{u})^2\delta\mathbf{u}\rangle|_{\xi=0} \ ,$$

d'où en intégrant par rapport à ξ sur la boule $|\xi| \leq \varepsilon$ on obtient :

$$D = -\frac{3}{16\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \langle \int_{|\xi|=1} (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u}.\xi d\sigma(\xi) \rangle \ .$$

On voit que notre expression de $s(\mathbf{u})$:

$$s(\mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|\xi|=1} (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u}.\xi d\sigma(\xi) \ ,$$

donne tout simplement une forme déterministe locale de cette expression de la dissipation.

Références

[1] P. CONSTANTIN, W. E, E.S. TITI . Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation. Commun. Math. Phys. 165, 207-209 (1994).

[2] G. EYINK. Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics I Fourier analysis and local energy transfer. Physica D, V.78 (1994), n° 3-4, 222-240.

[3] U. FRISCH. Turbulence. Cambridge University Press (1995).

[4] J. LERAY. Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J.Math.Pures Appl. 12 (1933), 1-82.

[5] J. LERAY. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math. 63 (1934), 193-248.

[6] P.L. LIONS. Mathematical topics in fluid mechanics. Volume 1 incompressible models. Clarendon Press, Oxford 1996.

[7] L. ONSAGER. Statistical hydrodynamics. Nuovo Cimento (supplemento), 6, 279 (1949).

[8] A.I. SHNIRELMAN. Weak solutions of incompressible Euler equations with decreasing energy. Séminaire EDP,Ecole Polytechnique, exposé n° XVI (1996-97).

[9] V. SCHEFFER. An inviscid flow with compact support in space-time. J. Geom.Anal. V.3 (1993), n°4, 343-401.

[10] V.I. YOUDOVITCH. Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid. Zh. Vych. Mat. 3 (1963) 1032-1066.