Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Marco Cannone et Fabrice Planchon

Fonctions de Lyapunov pour les équations de Navier-Stokes

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XI, 7 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A11_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Fonctions de Lyapunov pour les équations de Navier-Stokes

Marco Cannone
U.F.R. Mathématiques, Université Paris 7,
75251 Paris Cedex 05, France,

Fabrice Planchon
Laboratoire d'Analyse Numérique, URA CNRS 189,
Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu BP 187,
75 252 Paris Cedex

Introduction

On s'intéresse au système de Navier-Stokes incompressible tridimensionnel dans l'espace tout entier,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla\cdot(u\otimes u) - \nabla p, \\ \nabla\cdot u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x\in\mathbb{R}^3,\ t\geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Il est bien connu qu'il existe une unique solution globale en temps pour ce système, sous une hypothèse convenable de petitesse pour la donnée initiale ([12, 11, 3, 14]). Un exemple classique est l'existence d'une solution $u\in C_t(\dot{H}^{\frac{1}{2}})$. Par ailleurs, on dispose de résultats de persistence : si en outre $u_0\in H^1$, alors la solution u est (globalement) continue en temps à valeurs dans H^1. Une façon de prouver un tel résultat consiste à montrer que la norme H^1 de la solution est en fait une fonction de Lyapunov, c'est-à-dire une fonction décroissante du temps. Par exemple, dans [12] l'inégalité suivante est prouvée :

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 \leq -2\|\nabla u\|_2^2(1 - C\|u\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}), \tag{2}$$

ce qui entraîne immédiatement la décroissance de la norme homogène $\|u\|_{\dot{H}^1}$, pourvu que $\|u\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ reste petit. Par ailleurs la norme L^2 de la solution u décroit grâce à l'inégalité d'énergie, ce qui permet de conclure. En 1989, T. Kato a étendu ce type de résultat au cas des données $u_0 \in L^3$. Plus précisément, il a montré l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}\|J^s u\|_p^p \lesssim -(1 - C\|u\|_3)\, Q_p(J^s u), \tag{3}$$

où $J = (I - \Delta)^{\frac{1}{2}}$, $s \geq 0$, $2 \leq p < \infty$ et Q_p une quantité dépendant de u et de ses dérivées. On obtient ainsi une famille de fonctions de Lyapunov, qui ne proviennent pas d'une norme d'énergie.

Nous nous proposons d'étendre ce type de résultats au cas des espaces de Besov, qui se sont révélés comme un cadre naturel pour les équations de Navier-Stokes depuis les travaux de [3]. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour une discussion sur l'intérêt de disposer de telles fonctions de Lyapunov, et à [5] pour une présentation plus détaillée des résultats qui vont suivre.

Rappelons, pour terminer cette introduction, la définition des espaces de Besov à l'aide de l'analyse de Littlewood-Paley [1, 15] :

Définition 1

Soit $\psi \in \mathcal{S}$ telle que $\hat{\psi} \equiv 1$ pour $1 < \xi < 2$ et nulle en dehors de $\frac{1}{2} < \xi < \frac{5}{2}$. On définit $\Delta_j f = 2^{nj}\psi(2^j\cdot) * f$. Alors une distribution tempérée f est dite appartenir à l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ si d'une part $\sum_j \Delta_j f$ converge vers f "en un sens raisonnable" et si d'autre part

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_p = \varepsilon_j \in l^q, \tag{4}$$

cette dernière quantité servant à définir la norme, soit $\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = (\sum_j \varepsilon_j^q)^{\frac{1}{q}}$.

1 Résultats et démonstrations

Nous allons démontrer le théorème suivant,

Théorème 1

Soit u_0 une donnée initiale dans $\dot{B}_p^{s,q}$, avec $s = \frac{3}{p} - 1$, $p, q \geq 2$, tels que

$$\frac{3}{p} + \frac{2}{q} > 1. \tag{5}$$

Alors, il existe une constante $C(p,q)$ telle que, si une solution u de (1) vérifie l'estimation

$$\sup_t \|u(x,t)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} < C(p,q), \tag{6}$$

la norme $\|u(x,t)\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$ est une fonction de Lyapunov, c'est-à-dire une fonction décroissante du temps.

Il importe à ce stade de faire plusieurs remarques : des exemples d'espaces vérifiant les conditions du théorème sont $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, $\dot{B}_3^{0,3}$ qui est légèrement plus grand que L^3, ou encore $\dot{B}_4^{-\frac{1}{4},4}$. L'existence de solutions dans les espaces considérés est par ailleurs garantie par les résultats connus d'existence à donnée petite dans l'espace BMO^{-1} [12] ; sachant que $\|u(x,t)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \lesssim \|u(x,t)\|_{BMO^{-1}}$, la condition (6) peut être interprétée comme une condition de petitesse sur la donnée initiale venant s'ajouter à celle nécessaire pour obtenir l'existence. Il est bon de noter que la constante $C(p,q)$ tend vers zéro lorsqu'on se rapproche de l'égalité dans la condition (5). Enfin, la démonstration du théorème repose de façon cruciale sur l'utilisation des normes dyadiques définies dans l'introduction.

L'idée de la démonstration est simple et s'inspire de la démarche de Kato [13]. On cherche à établir une inégalité différentielle du type (3) mais pour les normes construites à partir des blocs dyadiques $\Delta_j u$. Pour ce faire, on applique l'opérateur de localisation en fréquence Δ_j à l'équation (1), puis on multiplie par $|\Delta_j u|^{p-2}\Delta_j u$:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_j u\|_p^p + c_p \int |\Delta_j u|^{p-2}|\nabla \Delta_j u|^2 dx \lesssim \int |\Delta_j u|^{p-1}|\Delta_j \mathbb{P}\nabla(u\otimes u)|dx, \tag{7}$$

où l'on a intégré par parties le terme contenant le laplacien, $\mathbb{P}$ désignant le projecteur sur les champs à divergence nulle. A ce stade, il convient de remarquer que lorsque $p=2$, l'estimation précédente n'est rien d'autre que l'estimation d'énergie, et que ce type d'estimation permet par exemple de construire des solutions dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ [6, 7]. Cependant, lorsque $p \neq 2$, le second terme à gauche de l'inégalité (7) ne paraît pas facile à traiter. L'intérêt de la localisation fréquencielle réside alors dans le lemme suivant, qui constitue une espèce de lemme de Poincaré [16]:

LEMME 1

Soit f une fonction de la classe de Schwartz, dont la transformée de Fourier est à support en dehors de la boule $B(0,1)$. Alors, pour tout réel $p \geq 2$,

$$\int |f|^p \leq C_p \int |\nabla f|^2 |f|^{p-2}. \tag{8}$$

Nous renvoyons le lecteur à [16] pour une version plus générale du lemme ainsi qu'une preuve complète, qui repose sur une intégration par parties dans chaque direction x_i, après découpage en secteurs coniques autour de ξ_i. Ce lemme trouve son origine dans les travaux de R. Danchin [9], où il est énoncé sous des hypothèses plus restrictives ($p \in 2\mathbb{N}$, restriction de la localisation du support de $\hat{f}$), et il trouve d'autres applications dans un travail récent du même auteur [10].

En appliquant le lemme précédent, il vient (où il est entendu que les constantes numériques peuvent varier d'une ligne à l'autre)

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_j u\|_p^p + c_p 2^{2j}\|\Delta_j u\|_p^p \lesssim \int |\Delta_j u|^{p-1}|\Delta_j \mathbb{P}\nabla(u\otimes u)|dx. \tag{9}$$

Il s'agit désormais d'évaluer le terme de droite. A cette fin, on utilise les techniques de paraproduit ([2]) : notons $S_j = \sum_{k<j}\Delta_k$, alors $\Delta_j(u^2)$ est la somme de deux types de termes, $S_{j-2}u\Delta_j u$ et $\Delta_j(\sum_{k>j}(\Delta_k u)^2)$ (les termes ayant $\Delta_k u \Delta_{k+1} u$ se traitent comme ce dernier). Considérons le premier terme :

$$\begin{aligned}\int |\Delta_j u|^{p-1}|\mathbb{P}\nabla(S_{j-2}u\Delta_j u)|dx &\lesssim \|\Delta_j u\|_p^{p-1}\|\mathbb{P}\nabla(S_{j-2}u\Delta_j u)\|_p \\ &\lesssim \|\Delta_j u\|_p^{p-1}2^j\|S_{j-2}u\Delta_j u)\|_p \\ &\lesssim 2^{2j}\|\Delta_j u\|_p^p \sup_t(2^{-j}\|S_{j-2}u\|_\infty),\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de $\mathbb{P}$ sur L^p ainsi que l'inégalité de Bernstein. Sachant que

$$\|u(x,t)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \approx \sup_j 2^{-j}\|S_j u\|_\infty \approx \sup_j 2^{-j}\|\Delta_j u\|_\infty, \tag{10}$$

il vient, sous la condition que $\sup_t \|u(x,t)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} < \varepsilon_0$,

$$\int |\Delta_j u|^{p-1}|\mathbb{P}\nabla(S_{j-2}u\Delta_j u)|dx \lesssim \varepsilon_0 2^{2j}\|\Delta_j u\|_p^p, \tag{11}$$

et l'on peut absorber ce terme par le second terme à gauche dans (9).

Il reste donc à étudier la contribution des termes diagonaux du paraproduit :

$$\begin{aligned}\int |\Delta_j u|^{p-1}|\mathbb{P}\nabla(\Delta_j(\sum_{k>j}(\Delta_k u)^2))|dx &\lesssim \|\Delta_j u\|_\infty \|\Delta_j u\|_p^{p-2}\|\mathbb{P}\nabla(\Delta_j(\sum_{k>j}(\Delta_k u)^2))\|_p \\ &\lesssim \|\Delta_j u\|_\infty \|\Delta_j u\|_p^{p-2} 2^j \sum_{k>j}\|\Delta_k u\|_p^2 \\ &\lesssim 2^{2j}\varepsilon_0 \|\Delta_j u\|_p^{p-2}\sum_{k>j}\|\Delta_k u\|_p^2,\end{aligned}$$

où l'on a procédé comme précedemment. Nous avons donc obtenu l'inégalité suivante, (après simplification)

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_j u\|_p^2 + c_p 2^{2j}\|\Delta_j u\|_p^2 \lesssim 2^{2j}\varepsilon_0 \sum_{k>j}\|\Delta_k u\|_p^2, \tag{12}$$

qui, en multipliant par $2^{jqs}\|\Delta_j u\|_p^{q-2}$, devient (ici $r = 2/q + s > 0$)

$$\frac{d}{dt}(2^{jqs}\|\Delta_j u\|_p^q) + c_p 2^{rqj}\|\Delta_j u\|_p^q \lesssim \varepsilon_0 2^{(q-2)rj}\|\Delta_j u\|_p^{q-2} 2^{2rj}\sum_{k>j}\|\Delta_k u\|_p^2. \tag{13}$$

Notons $f_j = 2^{js}\|\Delta_j u\|_p$ et $g_j = 2^{jr}\|\Delta_j u\|_p$, l'inégalité devient (après sommation sur j)

$$\frac{d}{dt}(\sum_j f_j^q) + c_p \sum_j g_j^q \lesssim \sum_{k>j}\varepsilon_0 g_j^{q-2} 2^{2rj} 2^{-2rk} g_k^2. \tag{14}$$

Sachant que, à k fixé, $\sum_{k>j} g_j^{q-2}2^{2rj} = 2^{2rk}\mu_k^{q-2}$ et $\sum_k \mu_k^q \lesssim \sum_j g_j^q$ (comme convolution $l^1 - l^{\frac{q}{q-2}}$), il vient

$$\frac{d}{dt}(\sum_j f_j^q) + c_p \sum_j g_j^q \lesssim \sum_k \varepsilon_0 \mu_k^{q-2} g_k^2, \tag{15}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\frac{d}{dt}(\sum_j f_j^q) + c_{p,q}(1-\varepsilon_0)\sum_j g_j^q \lesssim 0. \tag{16}$$

Remarquons qu'une solution u de condition initiale $u_0 \in \dot{B}_p^{s,q}$ vérifie la propriété suivante ([8])

$$2^{qrj} \int_0^t \|\Delta_j u\|_p^q ds = \eta_j(t) \text{ et } \sum_j \eta_j \lesssim \|u_0\|^q_{\dot{B}_p^{s,q}}. \tag{17}$$

De telles quantités peuvent d'ailleurs être utilisées directement pour construire des solutions par point fixe ([7]). En ce qui nous concerne, on peut donc intégrer (16) pour obtenir

$$\|u(x,t)\|^q_{\dot{B}_p^{s,q}} + c_{p,q}(1-\varepsilon_0) \int_0^t \|u(x,s)\|^q_{\dot{B}_p^{r,q}} ds \leq \|u_0\|^q_{\dot{B}_p^{s,q}}, \tag{18}$$

qui exprime bien la décroissance de la norme Besov. Ceci termine la démonstration.

Références

[1] J. Bergh and J. Löfstrom. *Interpolation Spaces, An Introduction.* Springer-Verlag, 1976.

[2] J.-M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités dans les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 14:209–246, 1981.

[3] M. Cannone. *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes.* Diderot Editeurs, Paris, 1995.

[4] M. Cannone. Nombres de Reynolds, stabilité et Navier-Stokes. A paraître, Banach Center Publications, 2000.

[5] M. Cannone and F. Planchon. More Lyapunov functions for the Navier-Stokes equations. Preprint, 2000.

[6] J.-Y. Chemin. Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible. *SIAM Journal Math. Anal.*, 23:20–28, 1992.

[7] J.-Y. Chemin. About Navier-Stokes system. prépublication du laboratoire d'analyse numérique R 96023, 1996.

[8] J.-Y. Chemin and N. Lerner. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. *J. Differential Equations*, 121(2):314–328, 1995.

[9] R. Danchin. Poches de tourbillon visqueuses. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76:609–647, 1997.

[10] R. Danchin. Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases. Preprint, 1999.

[11] T. Kato. Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^m$ with applications to weak solutions. *Math. Zeit.*, 187:471–480, 1984.

[12] T. Kato and H. Fujita. On the non-stationary Navier-Stokes system. *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, 32:243–260, 1962.

[13] T. Kato. Liapunov functions and monotonicity in the Navier-Stokes equation. In *Functional-analytic methods for partial differential equations (Tokyo, 1989)*, pages 53–63. Springer, Berlin, 1990.

[14] H. Koch and D. Tataru. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. Preprint, 1999.

[15] J. Peetre. *New thoughts on Besov Spaces.* Duke Univ. Math. Series. Duke University, Durham, 1976.

[16] F. Planchon. Sur une inégalité de type poincaré. A paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris, 2000.