Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Christian Gérard

Théorie de la diffusion pour le modèle $P(\varphi)_2$ en théorie des champs

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° XIX, 16 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Théorie de la diffusion pour le modèle $P(\varphi)_2$ en théorie des champs

Christian Gérard

Centre de Mathématiques, UMR 7640 CNRS,
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex, France

1 Introduction

Nous décrivons dans cet exposé un travail en collaboration avec Jan Dereziński, de l'université de Varsovie.

Dans cette section nous allons décrire rapidement les motivations qui ont conduit les physiciens théoriciens à s'intéresser au modèle $P(\varphi)_2$ dans les années soixante. La construction du modèle $P(\varphi)_2$ s'inscrivait dans le cadre du programme constructif de Wightman, dont le but était de construire rigoureusement des modèles de la théorie des champs relativistes, en allant du simple au compliqué, avec l'espoir (malheureusement déçu) de construire finalement une théorie relativiste en dimension d'espace-temps 4. Mentionnons enfin que nous décrivons dans cet exposé le modèle $P(\varphi)_2$ *tronqué en espace*, qui décrit un champ de bosons en une dimension d'espace avec une interaction localisée dans une région compacte de l'espace. Cette théorie ne possède donc pas l'invariance relativiste (elle n'est même pas invariante par translation), mais c'est une théorie locale, (au sens que l'interaction ne dépend que de la valeur des champs en un point).

Les considérations de cette section font partie du folklore de la théorie des champs (voir par exemple [Sch]).

1.1 Quantification d'une dynamique hamiltonienne

Le problème que l'on se pose consiste à 'quantifier' un système classique dont l'évolution est décrite par une équation des ondes non linéaire. De ce point de vue, le terme de seconde quantification, souvent utilisé en relation avec la théorie des champs, n'est pas correct: la différence entre les systèmes quantiques obtenus par 'première' et 'seconde' quantification est uniquement que dans le second cas le système classique que l'on quantifie possède une infinité de degrés de liberté, ou pour parler plus clairement, son espace de phase est une variété symplectique de dimension infinie.

On considère donc l'équation des ondes

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\partial_t^2\varphi - \Delta_x\varphi + m^2\varphi + 2ng\varphi^{2n-1} = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^{d+1}, \\
\varphi_{|t=0} = \varphi_0, \\
\partial_t\varphi_{|t=0} = \pi_0.
\end{array}
\right.
\tag{1.1}
$$

La fonction $g = g(x)$ est typiquement une fonction de troncature dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En introduisant le champ conjugué $\pi = \partial_t \varphi$, on peut interpréter (1.1) comme une équation hamiltonienne, l'espace de phase étant

$$M := \{(\varphi, \pi) | \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap L^{2n}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \pi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})\},$$

la forme symplectique

$$\sigma((\varphi, \pi), (\varphi', \pi')) = \int \varphi\pi' - \varphi'\pi dx$$

et le hamiltonien

$$H = \int \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\varphi^2 + g\varphi^{2n} dx.$$

Les coordonées symplectiques sur l'espace M sont les fonctions $\varphi(x), \pi(x)$ définies par l'évaluation en un point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &: (\varphi, \pi) \mapsto \varphi(x), \\ \pi(x) &: (\varphi, \pi) \mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$. Ces fonctions vérifient formellement les relations

$$\begin{aligned} &\{\varphi(x), \varphi(x')\} = \{\pi(x), \pi(x')\} = 0, \\ &\{\pi(x), \varphi(x')\} = \delta(x - x'). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Une façon plus rigoureuse d'introduire ces coordonnées consiste à considérer les fonctions sur M

$$\begin{aligned} \varphi(f) &: (\varphi, \pi) \mapsto \textstyle\int \varphi f dx, \\ \pi(f) &: (\varphi, \pi) \mapsto \textstyle\int \pi f dx, \end{aligned}$$

pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et à interpréter les relations (1.2) au sens distributions.

L'évolution donnée par (1.1) étant hamiltonienne, les relations (1.2) sont encore vérifiées à tout temps t:

$$\begin{aligned} &\{\varphi(t, x), \varphi(t, x')\} = \{\pi(t, x), \pi(t, x')\} = 0, \\ &\{\pi(t, x), \varphi(t, x')\} = \delta(x - x'). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quantifier l'équation des ondes consiste à construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, des distributions à valeurs dans les opérateurs autoadjoints $\varphi(t, x), \pi(t, x)$ qui vérifient l'analogue quantique de (1.3):

$$\begin{aligned} &[\varphi(t, x), \varphi(t, x')] = [\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0, \\ &[\pi(t, x), i\varphi(t, x')] = \delta(x - x')\mathbb{1}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

au sens distributions en x, x' et (dans un sens à préciser)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi = \pi, \\ \partial_t^2 \varphi - \Delta_x \varphi + m^2 \varphi + 2ng\varphi^{2n-1} = 0. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Formellement, la solution est la suivante: on part d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur lequel existent des distributions à valeur opérateurs autoadjoints $\varphi(x), \pi(x)$ (les opérateurs de champ) qui vérifient les *relations de commutation canoniques* (CCR)

$$\begin{aligned} &[\varphi(x), \varphi(x')] = [\pi(x), \pi(x')] = 0, \\ &[\pi(x), i\varphi(x')] = \delta(x - x')\mathbb{1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

On essaie ensuite de donner un sens à l'expression

$$H = \int \pi(x)^2 + \nabla\phi(x)^2 + g(x)\phi(x)^{2n} dx,$$

comme opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$. Les opérateurs

$$\varphi(t,x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH},$$
$$\pi(t,x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\pi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH},$$

vérifient alors formellement les équations (1.5), (1.6).

Le problème le plus difficile est celui du choix de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et des opérateurs $\varphi(x), \pi(x)$ (qui est lié à la non unicité, à équivalence unitaire près, des représentations des relations de commutation, quand le nombre de degré de liberté est infini). Faute de mieux, on procède par perturbation à partir de la situation 'libre' où $g \equiv 0$, qui est plus facile. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est alors un espace de Fock.

1.2 Le modèle $P(\varphi)_2$

Dans le cas $g \equiv 0$, le problème précédent est relativement facile à résoudre. On considére l'espace à une particule

$$\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^d, dk),$$

(l'observable k représentant le moment d'une particule) et on construit l'espace de Fock bosonique sur $\mathfrak{h}$

$$\mathcal{H} = \Gamma(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}.$$

Ici $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}$ désigne l'espace des tenseurs symétriques de degré n sur $\mathfrak{h}$, aussi appelé *secteur à n particules*. Le vecteur $\Omega = (1, 0, \dots,)$ est appelé *vide*.

L'opérateur N défini par

$$N_{|\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}} = n\mathbb{1}$$

est appelé *opérateur de nombre*. On note par

$$S : \otimes^{n}\mathfrak{h} \to \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}$$

l'opérateur de symétrisation

$$Su_1 \otimes \cdots \otimes u_n := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} u_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma_n},$$

et on introduit les *opérateurs de création*

$$a^*(f)u := \sqrt{n+1}Su \otimes f, \text{ pour } u \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h},\ f \in \mathfrak{h},$$

et les *opérateurs d'annihilation*

$$a(f)u := \sqrt{n}(f, u)_{\mathfrak{h}} \text{ pour } u \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h},\ f \in \mathfrak{h},$$

qui vérifient les relations de commutation

$$[a(f), a^*(g)] = (f|g)_{\mathfrak{h}} \mathbb{1},$$
$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0.$$

On aura aussi besoin des *opérateurs de champ*

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f)),$$

qui sont essentiellement autoadjoints sur $\mathcal{D}(N^{\frac{1}{2}})$.

Les opérateurs

$$W(f) := \mathrm{e}^{i\phi(f)}$$

sont appelés *opérateurs de Weyl.*

Si b est un opérateur sur $\mathfrak{h}$, on note $\mathrm{d}\Gamma(b)$ l'opérateur sur $\Gamma(\mathfrak{h})$ défini par:

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\Big|_{\bigotimes_{\mathrm{s}}^n \mathfrak{h}} := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}^{\otimes(j-1)} \otimes b \otimes \mathbb{1}^{\otimes(n-j)}$$

Si q est un opérateur sur $\mathfrak{h}$, on note $\Gamma(q)$ l'opérateur

$$\Gamma(q)\Big|_{\bigotimes_{\mathrm{s}}^n \mathfrak{h}_1} = q \otimes \cdots \otimes q.$$

On a $\Gamma(\mathrm{e}^{a}) = \mathrm{e}^{\mathrm{d}\Gamma(a)}$.

Finalement, on introduit les expressions $a(k), a^*(k)$ définies par

$$a(f) =: \textstyle\int a(k)\overline{f}(k)dk,$$
$$a^*(f) =: \textstyle\int a^*(k)f(k)dk.$$

On considère maintenant l'énergie cinétique relativiste d'une particule

$$\omega(k) = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}},$$

et l'énergie cinétique du champ de bosons

$$H_0 = \mathrm{d}\Gamma(\omega) = \int \omega(k)a^*(k)a(k)dk,$$

qui s'écrit simplement sur le secteur à n particules comme

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(k_i).$$

Enfin on introduit les opérateurs de champ

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-ikx}(a^*(k) + a(-k))\frac{dk}{\omega(k)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.7}$$

qui ne sont pas définis comme opérateurs (car $\omega(k)^{-\frac{1}{2}} \notin L^2$) mais comme distributions à valeurs opérateur: pour $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d dx)$, l'expression

$$\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) dx \tag{1.8}$$

a un sens comme opérateur non borné sur $\mathcal{H}$.

On introduit maintenant l'expression

$$\int g(x)\varphi(x)^{2n} dx,$$

et on cherche à donner un sens comme opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ à

$$H_0 + \int g(x)\varphi(x)^{2n} dx.$$

On rencontre ici la difficulté de donner un sens à $\varphi(x)^p$, $\varphi(x)$ n'étant défini qu'au sens distributions. Ce problème bien connu de la multiplication des distributions porte en physique le nom de 'divergence ultraviolette'. Pour résoudre cette difficulté, on effectue une opération appelée *ordre de Wick*.

Elle consiste à insérer l'expression (1.7) dans (1.8) et à déplacer les créateurs $a^*(k_i)$ à gauche des annihilateurs $a(k_j)$, (sans appliquer les relations de commutation). Précisement, on remplace l'expression formelle $\int g(x)\varphi(x)^p dx$ par

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int g(x) :\varphi(x)^p: dx \\
&:= \sum_{r=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \textstyle\int w_p(k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_p) \times \\
&a^*(k_1) \cdots a^*(k_r) a(-k_{r+1}) \cdots a(-k_p) \mathrm{d}k_1 \cdots \mathrm{d}k_p,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

pour

$$w_p(k_1, \cdots, k_p) = \hat{g}(\sum_1^p k_i)\Pi_1^p \hat{\chi}(\frac{k_i}{\kappa})\omega(k_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Une expression formelle généralisant (1.9) de la forme

$$W_{q,p} := \int w(k_1, \dots, k_q, k'_p, \dots, k'_1) a^*(k_1) \cdots a^*(k_q) a(k'_p) \cdots a(k'_1) \mathrm{d}k_1 \cdots \mathrm{d}k_q \mathrm{d}k'_p \cdots \mathrm{d}k'_1,$$

pour un noyau $w \in S'(\mathbb{R}^{dq} \times \mathbb{R}^{dp})$ s'appelle un *monôme de Wick*. L'expression $W_{p,q}$ a toujours un sens comme forme quadratique sur l'espace $\Gamma_{\mathrm{fin}}(S(\mathbb{R}^d))$ des vecteurs à un nombre fini de composantes construit sur $S(\mathbb{R}^d)$.

On montre facilement (cf [GJ1]) que si $w \in L^2(\mathbb{R}^{dq} \times \mathbb{R}^{dp})$, $W_{q,p}$ est défini comme opérateur non borné sur $\mathcal{D}(N^{(p+q)/2})$. Un petit calcul montre que si $d = 1$, le noyau w_p dans (1.9) est dans $L^2(\mathbb{R}^p)$, si $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Il en résulte que si la dimension d'espace est égale à 1, l'expression $\int g(x) : \varphi(x)^p : dx$ est bien définie comme opérateur non borné sur $\mathcal{D}(N^{p/2})$. Il est aussi facile de voir, en utilisant que g est une fonction à valeurs réelles, que cet opérateur est symétrique. En dimension 1, l'ordre de Wick est suffisant pour enlever la divergence ultraviolette. Ce n'est plus le cas en dimension supérieure, où on a besoin de faire une renormalisation qui revient à changer l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

2 Le hamiltonien du modèle $P(\varphi)_2$

2.1 Construction du hamiltonien

Un modèle $P(\varphi)_2$ tronqué en espace est défini par les données suivantes:

1) un polynôme $P(\lambda)$ réel, borné inférieurement (et donc de degré pair). On notera $\deg P =: 2n$.

2) une fonction positive g.

Nous énonçons maintenant les hypothèses qui seront imposées dans la suite:

$$(A)\ \ g \geq 0, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx).$$

L'hypothèse *(A)* est une condition standard nécessaire pour construire H comme opérateur autoadjoint. (On peut affaiblir cette condition en $g \geq 0$, $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dx) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}, dx)$ $\epsilon > 0$, voir [Si1]).

$$(C)\ \ g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}).$$

L'hypothèse *(C)* sera nécessaire si $\deg P = 4$ pour assurer que $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$. On peut alors donner un traitement plus simple de la théorie de Mourre.

$$(Mm)\ \ (x \cdot \partial_x)^j g \in L^2(\mathbb{R}, dx),\ \ j = 1, \ldots, m.$$

L'hypothèse *(Mm)* est nécessaire pour définir les commutateurs $\mathrm{ad}^m_{\mathrm{d}\Gamma(a)} V$ où a est le générateur des dilatations sur $\mathfrak{h}$ comme opérateurs à domaine dense (a priori ils ne sont définis que comme formes quadratiques).

$$(Is)\ \ \langle x \rangle^s g \in L^2(\mathbb{R}, dx),\ s \geq 0.$$

L'hypothèse *(Is)* est nécessaire pour la théorie de la diffusion des modèles $P(\varphi)_2$. En particulier (*Is*) pour $s > 1$ est une condition de courte portée, sous laquelle les champs asymptotiques et les opérateurs d'onde peuvent être construits.

$$(Bm)\ \ g(x) \leq C g(y) \langle x - y \rangle^N, \quad |(x \cdot \partial_x)^j g(x)| \leq C g(x),\ \ 0 \leq j \leq m.$$

L'hypothèse *(Bm)* sera nécessaire pour controler le commutateur $\mathrm{ad}^m_{\mathrm{d}\Gamma(a)} V$. Remarquons que *(Bm)* implique *(Mm)*.

Le lecteur familier avec la théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger remarquera une analogie suggestive avec les hypothèses que l'on fait dans ce cas sur le potentiel d'interaction.

On supposera toujours l'hypothèse *(A)*.

Il suit alors de la discussion précédente que l'opérateur

$$H = H_0 + V$$

pour

$$V = \int g(x) :P(\varphi(x)): dx$$

est symétrique sur $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(N^n)$.

La construction d'une extension autoadjointe de H, est l'un des premiers résultats importants du programme constructif et est due à Glimm-Jaffe [GJ1] pour $\deg P = 4$, et à Nelson [Ne], Segal [Se1], Rosen [Ro1] dans le cas général. Nous allons brièvement rappeler la construction de Segal, dans la présentation de Simon-Hoegh-Krohn [S-H.K].

L'idée consiste à interpréter l'opérateur V comme un opérateur de multiplication. On introduit pour cela la *$Q-$représentation* de l'espace de Fock $\Gamma(\mathfrak{h})$. Soit $c : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ la conjuguaison

$$c : h(k) \mapsto \overline{h}(-k),$$

qui correspond à la conjuguaison complexe usuelle par transformation de Fourier. Soit $\mathfrak{h}_c := \{h \in \mathfrak{h} | ch = h\}$. Soit $\mathfrak{M}_c \subset B(\Gamma(\mathfrak{h}))$ l'algèbre de Von Neumann abélienne engendrée par les opérateurs de Weyl $W(h)$ pour $h \in \mathfrak{h}_c$. Le résultat suivant suit du fait que Ω est un vecteur cyclique pour $\mathfrak{M}_c$ (voir par exemple [S-H.K]).

Théorème 2.1 *Il existe un espace compact séparé Q, une mesure de probabilité μ sur Q et un opérateur unitaire R tel que*

$$R : \Gamma(\mathfrak{h}) \to L^2(Q, d\mu),$$

$$R\Omega = 1,$$

$$R\mathfrak{M}_c R^* = L^\infty(Q, d\mu).$$

où $1 \in L^2(Q, \mathrm{d}\mu)$ est la fonction constante égale à 1 sur Q. De plus

$$R\Gamma(c)u = \overline{Ru},\ u \in \Gamma(\mathfrak{h}).$$

Les propriétés suivantes de H_0 et V dans la $Q-$représentation sont importantes pour construire une extension autoadjointe à $H_0 + V$.

1) V est un opérateur de multiplication dans la $Q-$représentation par une fonction réelle (notée encore V) avec $V \in \cap_{p<\infty} L^p(Q, d\mu)$ et $\mathrm{e}^{-tV} \in L^1(Q, d\mu)$ pour tout $t > 0$.

La première propriété est une simple conséquence du fait que Ω appartient au domaine de V^p pour tout p. La deuxième est plus subtile, et utilise le fait que le polynôme P est borné inférieurement et la fonction g est positive.

2) Le semigroupe e^{-tH_0} est *hypercontractif*: ceci signifie que

i) e^{-tH_0} est une contraction sur $L^1(Q, d\mu)$ pour tout $t > 0$,

ii) $\exists\, T, C$ tels que

$$\|\mathrm{e}^{-TH_0}\psi\|_{L^4(Q,d\mu)} \leq C\|\psi\|_{L^2(Q,d\mu)}.$$

On peut utiliser alors la théorie abstraite des perturbations des semi-groupes hypercontractifs due à Segal [Se1], Simon-Hoegh-Krohn, pour obtenir le théorème suivant:

Théorème 2.2 *L'opérateur $H_0 + V$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$. Sa fermeture, notée encore H est bornée inférieurement.*

La construction de H se fait de la manière suivante: soit $V_n = V \mathbb{1}_{\{|V| \leq n\}}$. Alors les semigroupes $\mathrm{e}^{-t(H_0+V_n)}$ convergent quand $n \to \infty$ vers un semigroupe autoadjoint fortement continu $T(t)$. Son générateur défini par $T(t) =: \mathrm{e}^{-tH}$ est alors la fermeture de $H_0 + V$.

Le hamiltonien H est appelé un *hamiltonien $P(\varphi)_2$*.

Pour revenir à la motivation heuristique de la soussection 1.1, il faut noter que les opérateurs $\varphi(t, x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ ne vérifient pas exactement l'équation (1.5): la non linéarité $g(x)P'(\varphi)$ est remplacée par une non linéarité $: Q(x, \varphi) :$ où $Q(x, \lambda)$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est celui de $g(x)P'(\lambda)$, et où l'ordre de Wick $: :$ est effectué par rapport à l'état fondamental de H plutôt que par rapport au vide Ω (cf [Se2]).

2.2 Théorie spectrale des hamiltoniens $P(\varphi)_2$

Nous rassemblons dans cette section des résultats connus sur la théorie spectrale de H. Un des problèmes que l'on rencontre est que le domaine de H n'est pas connu, sauf si $\deg P = 4$ et l'hypothèse *(C)* est vérifiée, dans quel cas on sait que $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ ([GJ2]). Dans le cas général l' identité $H = H_0 + V$ n'a pas de sens sur $\mathcal{D}(H)$.

Un substitut pour la connaissance du domaine de H réside dans des estimations de résolvante: un premier résultat qui suit facilement de l'hypercontractivité est le suivant ('first order estimates')

Proposition 2.3 *Il existe $C, b > 0$ tels que*

$$H_0 \leq C(H + b). \tag{2.10}$$

Le résultat plus difficile suivant ('higher order estimates') est dû à Rosen [Ro2] si $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (une adaptation de la preuve pour couvrir le cas $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est donnée dans [DG2]).

Proposition 2.4 *Il existe $b > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on a*

$$\begin{aligned} &\|N^\alpha (H + b)^{-\alpha}\| < \infty, \\ &\|H_0 N^\alpha (H + b)^{-n-\alpha}\| < \infty, \\ &\|N^\alpha (H + b)^{-1} (N + 1)^{1-\alpha}\| < \infty. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Notons une conséquence très utile de ce résultat: on a $\mathcal{D}(H^n) \subset \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ et donc l'identité $H = H_0 + V$ a un sens sur $\mathcal{D}(H^n)$. Enfin le résultat suivant (théorème HVZ) décrit le spectre essentiel de H. La partie $\subset$ est montrée dans [GJ1], [S-H.K]. Une démonstration plus géométrique est donnée dans [DG2].

Théorème 2.5 *On a*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\inf \sigma(H) + m, +\infty[.$$

Par conséquent $\inf \sigma(H)$ *est une valeur propre discrète de H et H admet un état fondamental.*

En utilisant un argument de Perron-Frobenius, on peut montrer que l'état fondamental est unique.

3 Théorie de Mourre

Dans cette section nous allons brièvement exposer la théorie de Mourre pour les hamiltoniens $P(\varphi)_2$. La preuve d'un estimation de commutateur positif aura les conséquences usuelles (finitude locale du spectre ponctuel, absence de spectre singulier continu). Ce sera aussi un point essentiel pour montrer la complétude asymptotique.

La méthode de Mourre rencontre dans le cas du modèle $P(\varphi)_2$ la difficulté que le domaine de H n'est pas connu explicitement. La version de la théorie de Mourre due à Amrein-Boutet de Monvel-Georgescu [ABG] fournit un cadre suffisamment général pour résoudre ce problème. Cette version est basée sur la définition suivante:

Définition 3.1 *Soit H, A deux opérateurs autoadjoints sur $\mathcal{H}$. On dit que $H \in C^1(A)$ si pour un $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(H)$ l'application*

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathrm{e}^{isA}(z-H)^{-1}\mathrm{e}^{-isA} \in B(\mathcal{H})$$

est C^1 pour la topologie forte de $B(\mathcal{H})$.

Voici quelques conséquences de cette propriété: tout d'abord si $H \in C^1(A)$, $(z-H)^{-1}$ préserve $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{D}(H)$. De plus la forme quadratique

$$[H, A](u, u) := (Hu, Au) - (Au, Hu),\ u \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$$

vérifie

$$|[H, A](u, u)| \leq C\|Hu\|^2 + \|u\|^2,\ u \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A),$$

et possède donc une extension unique comme opérateur borné, noté $[H, A]_0$ de $\mathcal{D}(H)$ dans $\mathcal{D}(H)^*$. Enfin la *relation du viriel* est vérifiée:

$$\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(H)[H, A]_0\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(H) = 0,\ \lambda \in \sigma_{\mathrm{pp}}(H).$$

Nous prendrons comme opérateur conjugué le second quantifié

$$A = \mathrm{d}\Gamma(a)$$

du générateur des dilatations sur $\mathfrak{h}$, $a = -\frac{1}{2}(k.D_k + D_k.k)$. La propriété cruciale de cet opérateur est qu'il préserve l'algèbre des opérateurs de multiplication

$$\mathrm{e}^{isA}\mathfrak{M}_c\mathrm{e}^{-isA} = \mathfrak{M}_c,$$

et donc $\mathrm{e}^{isA}V\mathrm{e}^{-isA}$ est encore un opérateur de multiplication dans la $Q-$représentation. Ceci est une conséquence du fait que e^{isa} préserve l'espace des vecteurs réels $\mathfrak{h}_c$.

Le résultat suivant se montre en approchant V par une famille V_κ d'opérateurs tronqués bien choisis (la régularisation ultraviolette utilisée est connue en physique sous le nom de *régularisation de Pauli-Villars*), et en utilisant que $\mathrm{e}^{isA}V_\kappa\mathrm{e}^{-isA}$ est un opérateur de multiplication. Ceci permet d'appliquer des arguments d'hypercontractivité.

Théorème 3.2 *Supposons l'hypothèse (M1). Alors:*
i) H est de classe $C^1(A)$,
ii) l'opérateur $[H, A]_0$ est borné de $\mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}})$ dans $\mathcal{D}(H^{-\frac{1}{2}})$.

Il reste à montrer la positivité du commutateur $[H, iA]$. Ceci se fait en utilisant les arguments géométriques de [DG1], et une induction sur l'énergie. On note par τ l'ensemble des *seuils*

$$\tau := \sigma_{\mathrm{pp}}(H) + m\mathbb{N}^*.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, soit $I(\lambda, \epsilon)$ l'intervalle $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$.

Théorème 3.3 *Supposons l'hypothèse (B1) si* $\mathrm{degP} > 4$, *les hypothèses (C), (M1) si* $\mathrm{deg}P = 4$. *Alors*
i) soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\tau$. *Alors il existe* $\epsilon > 0, c_0 > 0$ *et un opérateur compact* K *tel que*

$$\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H)[H, \mathrm{i}A]\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H) \geq c_0\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H) + K.$$

ii) pour tout $[\lambda_1, \lambda_2]$ *tel que* $[\lambda_1, \lambda_2] \cap \tau = \emptyset$, *on a*

$$\dim \mathbb{1}^{\mathrm{pp}}_{[\lambda_1,\lambda_2]}(H) < \infty.$$

Par conséquent $\sigma_{\mathrm{pp}}(H)$ *ne peut s'accumuler qu'en* τ, *qui est un ensemble fermé dénombrable.*
iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash(\tau \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(H))$. *Alors il existe* $\epsilon > 0, c_0 > 0$ *tel que*

$$\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H)[H, \mathrm{i}A]\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H) \geq c_0\mathbb{1}_{I(\lambda,\epsilon)}(H).$$

Remarque 3.4 *Il existe un exemple dû à Simon [Si3] d'un modèle* $P(\varphi)_2$ *avec des valeurs propres plongées dans* $[\inf\sigma(H) + m, \inf\sigma(H) + 2m[$.

Théorème 3.5 *Supposons l'hypothèse (B2). Alors on a le principe d'absorption limite:*

$$\mathrm{w} - \lim_{\epsilon\to\pm 0}(1 + |A|)^{-r}(H - \lambda - i\epsilon)(1 + |A|)^{-r} \textit{ existe}$$

localement uniformément dans $\sigma(H)\backslash(\tau \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(H))$, *pour* $r > \frac{1}{2}$. *Par conséquent* H *n'a pas de spectre singulier continu.*

4 Théorie de la diffusion

La théorie de la diffusion en théorie des champs repose sur un cadre plus algébrique que dans le cas de l'équation de Schrödinger. Ceci rend cette théorie plus élégante, mais aussi moins intuitive au premier abord. La première étape consiste à établir l'existence des *opérateurs de Weyl asymptotiques*. On ne considèrera comme d'habitude que les objets obtenus pour $t \to +\infty$, les objets obtenus pour $t \to -\infty$ étant définis de manière analogue.

4.1 Champs asymptotiques

Pour $h \in \mathfrak{h}$ on pose $h_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega(k)}h$. On note $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$ l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

Le résultat suivant se montre à l'aide des estimations de Rosen et d'un argument de Cook.

Théorème 4.1 *i) Pour tout* $h \in \mathfrak{h}$ *les limites fortes*

$$W^+(h) := \text{s-}\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}W(h_t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \tag{4.12}$$

existent. On les appelle opérateurs de Weyl asymptotiques. *Les opérateurs de Weyl asymptotiques peuvent aussi être définis comme les limites en norme:*

$$W^+(h)(H + b)^{-n} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}W(h_t)(H + b)^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}. \tag{4.13}$$

ii) L'application

(4.14) $$\mathfrak{h} \ni h \mapsto W^+(h)$$

est fortement continue et pour $\epsilon > 0$, l'application

(4.15) $$\mathfrak{h} \ni h \mapsto W^+(h)(H+b)^{-\epsilon}$$

est continue en norme.
iii) Les opérateurs $W^+(h)$ vérifient les relations de commutation canoniques

$$W^+(h)W^+(g) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}Im(h|g)}W^+(h+g).$$

iv) le hamiltonien H préserve les opérateurs de Weyl asymptotiques:

(4.16) $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}W^+(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} = W^+(h_{-t}).$$

On construit ensuite à partir des opérateurs de Weyl asymptotiques les *champs asymptotiques* et les *créateurs-annihilateurs asymptotiques* en utilisant des arguments abstraits valables pour toute représentation régulière des relations de commutation.

Théorème 4.2 *i) Pour tout $h \in \mathfrak{h}$*

$$\phi^+(h) := -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}W^+(sh)_{|s=0}$$

definit un opérateur autoadjoint appelé champ asymptotique*, tel que*

$$W^+(h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^+(h)}.$$

ii) Les opérateurs $\phi^+(h)$ vérifient au sens des formes quadratiques sur $\mathcal{D}(\phi^+(h_1)) \cap \mathcal{D}(\phi^+(h_2))$ les relations de commutation canoniques

(4.17) $$[\phi^+(h_2), \phi^+(h_1)] = \mathrm{i}Im(h_2|h_1).$$

iii)
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\phi^+(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} = \phi^+(h_{-t}).$$

iv) Pour $h_i \in \mathfrak{h}, 1 \leq i \leq p$, $\mathcal{D}((H+\mathrm{i})^{p/2}) \subset \mathcal{D}(\Pi_1^p \phi^+(h_i))$, et

$$\prod_{i=1}^{p} \phi^+(h_i)(H+\mathrm{i})^{-p/2} = \text{s-}\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} \prod_{i=1}^{p} \phi(h_{i,t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}(H+\mathrm{i})^{-p/2}.$$

Dans le théorème suivant on note par $a^\sharp(h)$ indifféremment $a(h)$ et $a^*(h)$.

Théorème 4.3 *1) Pour tout $h \in \mathfrak{h}$, les* opérateurs de création-annihilation asymptotiques *définis sur $\mathcal{D}(a^{+\sharp}(h)) := \mathcal{D}(\phi^+(h)) \cap \mathcal{D}(\phi^+(\mathrm{i}h))$ par*

$$a^{+*}(h) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^+(h) - \mathrm{i}\phi^+(\mathrm{i}h)\right),$$
$$a^{+}(h) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^+(h) + \mathrm{i}\phi^+(\mathrm{i}h)\right).$$

sont fermés.
ii) Les opérateurs $a^{+\sharp}$ *vérifient au sens des formes quadratiques sur* $\mathcal{D}(a^{+\#}(h_1)) \cap \mathcal{D}(a^{+\#}(h_2))$ *les relations de commutation canoniques*

$$[a^+(h_1), a^{+*}(h_2)] = (h_1|h_2)\mathbb{1},$$

$$[a^+(h_2), a^+(h_1)] = [a^{+*}(h_2), a^{+*}(h_1)] = 0.$$

iii)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} a^{+\sharp}(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} = a^{+\sharp}(h_{-t}). \tag{4.18}$$

iv) Pour $h_i \in \mathfrak{h}, 1 \leq i \leq p$, $\mathcal{D}((H+\mathrm{i})^{p/2}) \subset \mathcal{D}(\Pi_1^p a^{+\sharp}(h_i))$ *et*

$$\Pi_1^p a^{+\sharp}(h_i)(H+b)^{-\frac{p}{2}} = \text{s-}\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\Pi_1^p a^\sharp(h_{i,t})(H+b)^{-\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}.$$

4.2 Opérateurs d'onde

L'étude de la théorie de la diffusion pour H consiste à analyser la nature de la représentation des relations de commutation donnée par les opérateurs de Weyl asymptotiques $W^+(h)$.

Le premier résultat, dû à l'origine à Hoegh-Krohn [HK], affirme que cette représentation est unitairement équivalente à une copie de représentations de Fock. On peut rendre la preuve plus élégante [DG2] en utilisant la notion de *opérateur de nombre* associée à une représentation.

On définit *l'espace des vides asymptotiques* comme

$$\mathcal{K}^+ := \{u \in \mathcal{H} \mid a^+(h)u = 0,\ h \in \mathfrak{h}\}.$$

L'*espace asymptotique* est défini comme

$$\mathcal{H}^+ := \mathcal{K}^+ \otimes \mathcal{H}.$$

Proposition 4.4 *i)* $\mathcal{K}^+$ *est un espace fermé* $H-$*invariant*
ii) $\mathcal{K}^+$ *est inclus dans le domaine de* $\Pi_1^p a^{+\sharp}(h_i)$ *pour* $h_i \in \mathfrak{h}$.
iii)

$$\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H) \subset \mathcal{K}^+.$$

Le *hamiltonien asymptotique* est défini comme

$$H^+ := K^+ \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathrm{d}\Gamma(\omega),$$

pour

$$K^+ := H\Big|_{\mathcal{K}^+}.$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} &\Omega^+ : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}, \\ &\Omega^+\psi \otimes a^*(h_1)\cdots a^*(h_p)\Omega := a^{+*}(h_1)\cdots a^{+*}(h_p)\psi, \quad h_1,\ldots,h_p \in \mathfrak{h}, \quad \psi \in \mathcal{K}^+. \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'opérateur Ω^+ est appelé *opérateur d'onde.*

Théorème 4.5 Ω^+ *est un opérateur unitaire de* $\mathcal{H}^+$ *dans* $\mathcal{H}$ *tel que*

$$a^{+\sharp}(h)\Omega^+ = \Omega^+ \mathbb{1} \otimes a^\sharp(h), \quad h \in \mathfrak{h},$$
$$H\Omega^+ = \Omega^+ H^+.$$

Proof. Il est facile de voir que Ω^+ est bien défini et isométrique. Montrer qu'il est unitaire revient à montrer que la représentation asymptotique $\mathfrak{h} \ni h \mapsto W^+(h)$ ne contient pas de sous-représentation non Fock. Pour cela, il suffit de montrer que cette représentation admet un opérateur de nombre à domaine dense.

Pour définir cet objet, rappelons quelques notions sur les formes quadratiques. On peut toujours supposer qu'une forme quadratique positive b est définie sur l'espace $\mathcal{H}$ entier et prend ses valeurs dans $[0, \infty]$. Son domaine est alors défini comme

$$\mathcal{D}(b) := \{u \in \mathcal{H} |\ b(u) < \infty\}.$$

Si la forme b est fermée, il existe un unique opérateur autoadjoint B tel que

$$\mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad b(u) = (u|Bu).$$

Si A est un opérateur fermé, $\|Au\|^2$ est une forme fermée. Enfin une somme finie de formes positives fermées est fermée et c'est un petit exercice de vérifier que le supremum d'une famille arbitraire de formes fermées est fermé.

On considère alors pour chaque espace de dimension finie $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h}$ la forme quadratique

$$n_\mathfrak{f}^+(u) := \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{f}} \|a^+(h_i)u\|^2,$$

où $\{h_i\}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{f}$. (Si $u \notin \mathcal{D}(a^+(h_i))$ pour un i, alors $n_\mathfrak{f}^+(u) = \infty$). La forme quadratique $n^+\mathfrak{f}$ ne dépend pas du choix de la base $\{h_i\}$ de $\mathfrak{f}$. La forme quadratique n^+ est définie par

$$n^+(u) := \sup_\mathfrak{f} n_\mathfrak{f}^+(u),\ u \in \mathcal{H}.$$

On peut montrer que $\mathrm{Im}\Omega^+ = \overline{\mathcal{D}(n^+)}$. Dans notre cas, il suit facilement du fait que $N \leq C(H+b)$ que $\mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(n^+)$. En particulier $\mathcal{D}(n^+)$ est dense ce qui entraine que Ω^+ est unitaire.

Il peut paraitre surprenant qu'il soit relativement facile de montrer l'unitarité des opérateurs d'onde. En fait, la difficulté est repoussée dans la définition implicite de l'espace $\mathcal{K}^+$. En particulier l'unitarité de $\Omega^\pm$ n'entraine pas l'unitarité de *l'opérateur de diffusion*

$$S := \Omega^{+*}\Omega^-,$$

sauf si on montre que $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^-$. Au vu de l'inclusion $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H) \subset \mathcal{K}^\pm$, on peut poser la définition suivante:

Définition 4.6 *Le hamiltonien H possède la propriété de* complétude asymptotique *si:*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H) = \mathcal{K}^\pm.$$

En particulier la complétude asymptotique entraine l'unitarité de l'opérateur de diffusion.

Le résultat principal de [DG2] est alors:

Théorème 4.7 *Supposons les hypothèses (A), (Is) pour $s > 1$ et (B1) si* $\deg P > 4$, *(C) si* $\deg P = 4$. *Alors le hamiltonien H a la propriété de complétude asymptotique.*

4.3 Une autre construction des opérateurs d'onde

Il est utile d'avoir une autre construction plus directe des opérateurs d'onde en terme de limite du produit de deux dynamiques.

On introduit l'*espace étendu*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{ext}} := \mathcal{H} \otimes \Gamma(\mathfrak{h}),$$

et le *hamiltonien étendu*

$$H^{\mathrm{ext}} = H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathrm{d}\Gamma(\omega(k)).$$

Clairement $\mathcal{H}^+$ est un sous espace de $\mathcal{H}^{\mathrm{ext}}$ et

$$H^+ = H^{\mathrm{ext}}\Big|_{\mathcal{H}^+}.$$

On introduit aussi un *opérateur d'onde étendu*, de domaine

$$\mathcal{D}(\Omega^{\mathrm{ext},+}) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{D}((H+b)^{\frac{p}{2}}) \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{p} \mathfrak{h},$$

qui est un sous espace dense de $\mathcal{H}^{\mathrm{ext}}$. On pose

$$\begin{aligned} &\Omega^{\mathrm{ext},+} : \mathcal{D}(\Omega^{\mathrm{ext},+}) \to \mathcal{H}, \\ &\Omega^{\mathrm{ext},+}\psi \otimes a^*(h_1)\cdots a^*(h_p)\Omega := a^{+*}(h_1)\cdots a^{+*}(h_p)\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}((H+b)^{\frac{p}{2}}). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Notons que $\Omega^{\mathrm{ext},+}$ est un opérateur non borné, et que

$$\Omega^{\mathrm{ext},+}\Big|_{\mathcal{H}^+} = \Omega^+. \tag{4.21}$$

Introduisons maintenant l'opérateur d'identification

$$I : \mathcal{H}^{\mathrm{ext}} \to \mathcal{H}$$

défini par

$$I \prod_{i=1}^{n} a^*(h_i)\Omega \otimes \prod_{i=1}^{p} a^*(g_i)\Omega := \prod_{i=1}^{p} a^*(g_i) \prod_{i=1}^{n} a^*(h_i)\Omega, \quad h_i, g_i \in \mathfrak{h}. \tag{4.22}$$

Théorème 4.8 *i) Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega^{\mathrm{ext},+})$. Alors la limite*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} I \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH^{\mathrm{ext}}} u$$

existe et est égale à $\Omega^{\mathrm{ext},+}u$.
ii) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Im}\chi(H^{\mathrm{ext}}) \subset \mathcal{D}(\Omega^{\mathrm{ext}})$, $I\chi(H^{\mathrm{ext}})$ et $\Omega^{\mathrm{ext},+}\chi(H^{\mathrm{ext}})$ sont des opérateurs bornés et

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} I \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH^{\mathrm{ext}}} \chi(H^{\mathrm{ext}}) = \Omega^{\mathrm{ext},+}\chi(H^{\mathrm{ext}}). \tag{4.23}$$

4.4 Complétude asymptotique géométrique

La preuve de la complétude asymptotique repose sur une analyse directe de l'évolution e^{-itH} par la construction d'observables asymptotiques. Techniquement l'existence de ces observables nécessite la preuve d'estimations de propagation que nous ne décrirons pas ici mais qui sont assez semblables à celles que l'on utilise dans le scattering pour l'équation de Schrödinger. On note par x l'observable de position $x = i\frac{\partial}{\partial k}$.

Théorème 4.9 *Supposons l'hypothèse (Is), $s > 1$. Soit $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq q \leq 1$, $q(0) = 1$. Posons $q^t(x) = q(\frac{x}{t})$. Alors la limite*

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{itH}\Gamma(q^t)e^{-itH} =: \Gamma^+(q) \tag{4.24}$$

existe. On a

$$\Gamma^+(q\tilde{q}) = \Gamma^+(q)\Gamma^+(\tilde{q}), \tag{4.25}$$

$$0 \leq \Gamma^+(q) \leq \Gamma^+(\tilde{q}) \leq 1\!\!1, \ \textit{si}\ 0 \leq q \leq \tilde{q} \leq 1, \tag{4.26}$$

$$[H, \Gamma^+(q)] = 0. \tag{4.27}$$

Théorème 4.10 *Soit $\{q_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une suite décroissante de fonctions telles que $0 \leq q_n \leq 1$, $q_n \searrow 1\!\!1_{\{0\}}$. Alors*

$$P_0^+ := \text{s-}\lim_{n\to\infty} \Gamma^+(q_n) \ \textit{existe.} \tag{4.28}$$

P_0^+ ne dépend pas du choix de la suite $\{q_n\}$.
C'est une projection orthogonale vérifiant

$$[H, P_0^+] = 0.$$

De plus

$$\mathrm{Im}P_0^+ \subset \mathcal{K}^+. \tag{4.29}$$

L'image de P_0^+ peut être interprétée comme l'espace des états qui ne contiennent asymptotiquement aucun boson loin de l'origine.

La complétude asymptotique géométrique est alors la propriété suivante, qui se montre en construisant des opérateurs d'onde inverses de $\Omega^{\mathrm{ext},+}$.

Théorème 4.11 *Supposons les hypothéses (A), (Is) pour $s > 1$. Alors on a:*

$$\mathrm{Im}P_0^+ = \mathcal{K}^+.$$

Pour montrer la complétude asymptotique, il reste à établir que $\mathrm{Im}P_0^+ = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H)$. Ceci peut se montrer comme conséquence de l'estimation de Mourre (estimation de vitesse minimale).

References

[ABG] Amrein, W., Boutet de Monvel, A., Georgescu, W.: *C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1996

[DG1] Dereziński, J., Gérard, C.: Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians, Rev. Math. Phys. 11 (4) (1999) p 383-450

[DG2] Dereziński, J., Gérard, C.: Spectral and scattering theory of spacially cut-off $P(\varphi)_2$ Hamiltonians, Preprint Ecole Polytechnque, 1998.

[GJ1] Glimm, J., Jaffe, A.: Boson quantum field theory models, in *Mathematics of Contemporary Physics* R. Streater ed. (1972) Academic Press

[GJ2] Glimm, J., Jaffe, A.: A $\lambda\phi^4$ quantum field theory without cutoffs I, Phys. Rev. **176** (1968) 1945-1951

[HK] Høgh-Krohn, R.: On the spectrum of the space cutoff : $P(\varphi)$: Hamiltonian in 2 space-time dimensions, Comm. Math. Phys. **21** (1971) 256-260

[Ne] Nelson, E.: A quartic interaction in 2 dimensions, in *Mathematical theory of elementary particles*, R. Goodman, I. Segal eds, MIT Press Cambridge 1966

[Ro1] Rosen, L.: A $\lambda\phi^{2n}$ field theory without cutoffs. Comm. Math. Phys. **16** 1970 157–183

[Ro2] Rosen, L.: The $(\phi^{2n})_2$ Quantum Field Theory: Higher Order Estimates, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 417-457

[Sch] S. Schweber: *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson and Co, 1961.

[Se1] Segal, I.: Construction of non linear local quantum processes I, Ann. Math. **92** (1970) 462-481

[Se2] Segal, I.: Construction of non linear local quantum processes II, Inv. Math. **14** (1971) 211-241

[Si1] Simon, B.: *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974

[Si2] Simon, B: Studying spatially cutoff $(\varphi)_2^{2n}$ Hamiltonians, in *Statistical Mechanics and Field Theory* R.N. Sen and C. Weil eds ,New York, Halsted Press, 1972

[Si3] Simon, B.: Continuum embedded eigenvalues in a spatially cutoff $P(\varphi)_2$ field theory, Proc. A.M.S. **35** (1972) 223-226.

[S-H.K] Simon, B., Høgh-Krohn, R.: Hypercontractive Semigroups and Two dimensional Self-Coupled Bose Fields, J. Funct. Anal. **9** (1972) 121-180.