

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**1997-1998**

Olivier Glass

**Contrôlabilité de l'équation d'Euler tridimensionnelle pour les fluides parfaits incompressibles**

*Séminaire É. D. P.* (1997-1998), Exposé n° XV, 11 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_1997-1998\\_\\_\\_\\_A15\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A15_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Contrôlabilité de l'équation d'Euler tridimensionnelle pour les fluides parfaits incompressibles

Olivier Glass  
Université Paris-Sud,  
Analyse numérique et EDP,  
91405 ORSAY  
Tel (33)-1-69-15-71-77  
Fax (33)-1-69-15-67-18  
E-mail: Olivier.Glass@lanors.math.u-psud.fr

## 1 Introduction

Dans cet exposé, nous nous proposons de montrer le traitement du problème de contrôlabilité de l'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles, dans le cas de la dimension 3.

Le problème est le suivant. On considère un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , borné et régulier, et un ouvert  $\Gamma_0$  de son bord  $\partial\Omega$ . On considère  $T$  un réel strictement positif et  $y_0, y_1$  deux champs de vecteurs définis sur  $\bar{\Omega}$ , et vérifiant de plus

$$\operatorname{div} y_0 = \operatorname{div} y_1 = 0 \text{ sur } \Omega, \quad (1)$$

$$y_0 \cdot n = y_1 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad (2)$$

où  $n$  désigne la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

Le problème de contrôlabilité est de déterminer s'il existe une solution  $u(x, t)$  de l'équation d'Euler sur  $\Omega \times [0, T]$ , i.e.

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nabla p \text{ sur } \Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ sur } \Omega \times [0, T], \quad (4)$$

où  $p$  est une certaine distribution sur  $\Omega \times ]0, T[$ , qui "relie"  $y_0$  à  $y_1$ , c'est à dire telle que

$$u|_{t=0} = y_0, \text{ et } u|_{t=T} = y_1, \quad (5)$$

en observant la contrainte

$$u(x, t).n(x) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \quad (6)$$

En d'autres termes, peut-on passer d'un point de l'espace des phases à un autre en n'agissant que sur une partie du bord ?

Le problème est ainsi posé sans contrôle explicite ; on peut considérer (voir pour cela [7]) comme contrôle la donnée de  $u.n$  sur  $\Gamma_0$  et celle de la partie tangente de la vorticité  $rot u \wedge n$  aux points du bord où le fluide pénètre le domaine i.e. sur

$$\{x \in \Gamma_0 / u(x, t).n(x) < 0\}.$$

Le problème pr ec edent est donc équivalent au fait de savoir s'il existe des données au bord de ce type, satisfaisant (6) telles que l'unique solution de l'équation d'Euler déterminée par celles-ci vérifie (5).

Ce problème a été pos e par J.-L. Lions dans [8], et résolu dans le cas de la dimension 2, par J.-M. Coron dans [3] et [4].

On observe immédiatement la même objection qu'en dimension 2 dans le cas où  $\Gamma_0$  ne rencontre pas toutes les composantes connexes du bord. En effet, plaçons-nous dans ce cas, et considérons une composante connexe du bord  $\Gamma^i$  non intersectée par  $\Gamma_0$ . On considère ensuite une courbe de Jordan  $\gamma$  dans  $\Gamma^i$ . On pose le problème de contrôlabilité pour  $y_1 = 0$  et  $y_0$  tel que

$$\int_{\gamma} y_0 d\tau \neq 0.$$

L'existence d'une solution  $u$  au problème de contrôlabilité impliquerait alors par théorème de Kelvin que

$$\int_{\gamma} y_0 d\tau = \int_{\tilde{\gamma}} y_1 d\tau = 0,$$

où  $\tilde{\gamma}$  est la courbe obtenue par transport de  $\gamma$  par le flot de  $u$ . Or ceci est rendu impossible par notre hypothèse sur  $y_0$ .

On prendra donc dans la suite comme hypothèse supplémentaire que  $\Gamma_0$  rencontre toutes les composantes connexes du bord. Dans ce cas, on a le résultat suivant :

**Théorème 1** *Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , soit  $T > 0$ , et soient  $y_0$  et  $y_1$  deux fonctions de  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ , de divergence nulle, et vérifiant (2). Alors il existe une fonction  $u \in C([0, T]; C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)) \cap L^\infty([0, T]; C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3))$  solution de (3), (4) et (6) pour un certain  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$ , et vérifiant la propriéte (5).*

Dans la suite, nous présentons la méthode utilisée.

Remarquons tout d'abord que l'on peut se ramener au problème de zéro-contrôlabilité, i.e. le cas où  $y_1 = 0$ . En effet, l'équation d'Euler étant réversible, il suffit si l'on sait résoudre le problème de zéro-contrôlabilité de suivre le chemin de  $y_0$  à 0, puis le chemin inverse de  $-y_1$  à 0 pour obtenir une solution du problème général.

Ensuite, on observe que l'on peut se ramener au cas où  $y_0$  est petit (pour la norme  $C^{2,\alpha}$ ). On utilise pour cela le fait que si  $u$  est solution de (3)-(4), alors  $\tilde{u}(x, t) := \epsilon u(x, \epsilon^2 t)$  est encore solution de (3)-(4). Si on sait résoudre le problème pour  $\epsilon y_0$  en temps  $T$ , on sait le résoudre pour  $y_0$  en temps  $\epsilon^2 T$ , donc en temps  $T$  (en imposant un contrôle nul entre les temps  $\epsilon^2 T$  et  $T$ ).

Il serait donc naturel de chercher à résoudre le problème de contrôlabilité pour l'équation linéarisée en 0. Malheureusement, celle-ci :

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

n'est de toute évidence pas contrôlable.

On utilise pour remédier à cet inconvénient la "méthode du retour", introduite par J.-M. Coron dans [1] pour des problèmes de stabilisation en dimension finie ; voir [2] pour des problèmes de contrôlabilité. Il s'agit de trouver une solution  $\bar{y}(x, t)$  du système qui part de  $\bar{y}(x, 0) = 0$  pour revenir à  $\bar{y}(x, T) = 0$  et telle que l'équation linéarisée autour de  $\bar{y}$  soit contrôlable.

On a dans ce cas l'espoir de trouver une solution du problème non linéaire proche de  $\bar{y}$ , pour  $y_0$  assez petit. À noter que cela amène à chercher une solution qui ne reste pas dans le voisinage de 0.

Nous allons à présent exhiber ce  $\bar{y}$ , puis montrer brièvement comment se résoud ensuite le problème de contrôle. Nous distinguerons pour cela deux cas, à savoir celui où  $\Omega$  est simplement connexe et celui où  $\Omega$  ne l'est pas, ce dernier cas imposant de modifier  $\bar{y}$ .

## 2 Le cas simplement connexe

On cherche  $\bar{y}$  sous une forme particulière : celle d'un écoulement potentiel, soit

$$\bar{y} := \alpha(t) \nabla \theta(x), \tag{7}$$

où  $\theta$  vérifie :

$$\Delta \theta = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, 1], \tag{8}$$

$$\partial_n \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \tag{9}$$

Dans ce cas,  $\bar{y}$  satisfait (3), (4) et (6) avec  $p(x, t) = \partial\theta/\partial t + |\nabla\theta|^2/2$ .

**Remarque 1** *En dimension 2, dans le cas où  $\Omega$  est simplement connexe, on peut choisir " $\bar{y}$ " stationnaire, mais cette méthode ne convient pas en dimension 3.*

Comme dans [5], l'idée est de trouver “ $\bar{y}$ ” tel que si l'on suit son flot  $\phi^{\bar{y}}$ , tous les points de  $\bar{\Omega}$  sortent de  $\Omega$ , à un moment ou un autre, par la “lucarne”  $\Gamma_0$ .

Pour montrer que cela est possible, on démontre le lemme suivant (voir [5]) :

**Lemme 1** Pour  $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ ,

$$\left\{ \nabla\theta(\bar{x}); \theta \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}), \Delta\theta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \right\} = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } \bar{x} \in \Omega \cup \Gamma_0, \\ T_{\bar{x}}(\partial\Omega) & \text{si } \bar{x} \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases}$$

où  $T_{\bar{x}}(\partial\Omega)$  désigne le plan tangent à  $\partial\Omega$  en  $\bar{x}$ .

**Idée de la preuve du lemme 1**

On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tel que :  $\vec{v} \cdot \nabla\theta(\bar{x}) = 0$  dès que  $\Delta\theta = 0$  dans  $\Omega$  et  $\partial_n\theta = 0$  sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$ .

On considère alors les fonctions  $\psi^{a,\bar{a}}$  définies sur un “sur-domaine”  $\Omega^*$ . Ce domaine contient  $\Omega$  et son bord coïncide avec  $\partial\Omega$  sauf le long de  $\Gamma_0$ , de telle sorte qu'il existe un ouvert  $\Omega^\#$  inclus dans  $\Omega^* \setminus \bar{\Omega}$ . Cette augmentation de domaine est décrite par la figure 1.

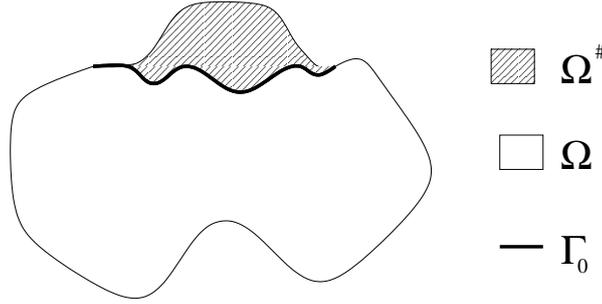


FIG. 1: Le sur-domaine  $\Omega^*$ .

Les  $\psi^{a,\bar{a}}$  sont déterminés par

$$\begin{cases} \Delta\phi^{a,\bar{a}} = 4\pi(\delta_a - \delta_{\bar{a}}) \text{ dans } \Omega^*, \\ \partial_n\phi^{a,\bar{a}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^*, \\ \int_{\Omega^*} \phi^{a,\bar{a}} = 0. \end{cases}$$

pour  $a, \bar{a} \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}$ .

Alors  $\vec{v} \cdot \nabla\psi^{a,\bar{a}}(\bar{x}) = 0$  pour tout  $a \in \Omega^* \setminus \bar{\Omega}$ , puis, par analyticité de la fonction  $a \mapsto \vec{v} \cdot \nabla\psi^{a,\bar{a}}(\bar{x})$ , pour tout  $a \in \Omega^*$ . On fait ensuite tendre  $a$  vers  $\bar{x}$ . Or  $\nabla\psi^{a,\bar{a}}(\bar{x})$  se développe en

$$\nabla\psi^{a,\bar{a}}(\bar{x}) \sim \frac{\bar{x} - a}{|\bar{x} - a|^3},$$

si  $\bar{x} \in \Omega \cup \Gamma_0$ , et en

$$\nabla \psi^{a, \bar{a}}(\bar{x}) \sim \frac{\bar{x} - P(a)}{|\bar{x} - a|^3},$$

où  $P$  est la projection orthogonale sur  $T_{\bar{x}}\partial\Omega$  si  $\bar{x} \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ ; d'où le résultat.

Ensuite, en pondérant des “ $\nabla\theta$ ” obtenus par le lemme 1 par des fonctions temporelles ad hoc, on peut obtenir le résultat suivant :  $\gamma$  étant une courbe de  $\Omega$  passant par  $x_0 = \gamma(0)$ , il existe  $\bar{y}$  défini sur  $\Omega^*$  de la forme (7) sur  $\Omega$  tel que  $\gamma(t) = \phi^{\bar{y}}(0, t, x_0)$ , où  $\phi^{\bar{y}}$  désigne le flot de  $\bar{y}$ , i.e. la fonction de  $\Omega^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\Omega^*$  telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_2} = \bar{y}(\phi, t_2), \quad (10)$$

$$\phi(x, t_1, t_1) = x. \quad (11)$$

On a bien sûr le même résultat pour une courbe du bord lorsque  $x_0 \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ .

On construit ainsi en utilisant la compacité de  $\bar{\Omega}$  un “ $\bar{y}$ ” de la forme (7) et tel que tout point de  $\bar{\Omega}$  soit à un certain moment éloigné de  $\bar{\Omega}$  par le flot de  $\bar{y}$  puis remis en place. (Rappelons que  $\Gamma_0$  rencontre toutes les composantes connexes du bord.)

Précisément, on construit un recouvrement de  $\bar{\Omega}$  par  $k$  boules  $B_i$  telles que, en suivant le flot de  $\bar{y}$  en partant de  $t_0 = 0$ ,  $B_i$  est sorti à un certain instant  $t_i$  et remis en place à un instant ultérieur  $t_{i+\frac{1}{2}}$ . Nous avons alors déterminé  $\bar{y}$ .

L'idée pour la résolution du problème linéarisé autour de  $\bar{y}$  est la suivante : on considère l'équation linéarisée “en vorticité” :

$$\partial_t w + (\bar{y} \cdot \nabla) w = (w \cdot \nabla) \bar{y}, \quad (12)$$

de telle sorte que la solution de l'équation d'Euler linéarisée soit  $\zeta$  telle que

$$\begin{cases} \text{rot } \zeta = \omega \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \text{div } \zeta = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \end{cases}$$

Par la suite, on s'intéresse uniquement au problème linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t w + (\tilde{y} \cdot \nabla) w = (w \cdot \nabla) \tilde{y} \text{ dans } \Omega^* \times [0, T], \\ \text{rot } \zeta = w \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \text{div } \zeta = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (13)$$

pour  $\tilde{y}$  proche de  $\bar{y}$ , et de divergence nulle sur  $\Omega$ .

Il dérive de la forme de (13) que le support de  $w$  suit le flot de  $\tilde{y}$ . On supposera que  $\tilde{y}$  est suffisamment proche de  $\bar{y}$  pour que la propriété “la boule  $B_i$  sort de  $\bar{\Omega}$  (assez loin) par le flot de  $\tilde{y}$  à l'instant  $t_i$ ” reste conservée.

On définit alors une partition de l'unité  $\kappa_i$  adaptée aux boules  $B_i$ , et les fonctions  $w^i$  par

$$\begin{cases} w^i(\cdot, 0) = \text{rot}(\kappa_i \pi y_0), \\ \partial_t w^l + (\tilde{y} \cdot \nabla) w^l = (w^l \cdot \nabla) \tilde{y} - (\text{div } \tilde{u}) w^l \text{ dans } \Omega^* \times [0, T], \end{cases} \quad (14)$$

où  $\pi$  est un opérateur de prolongement de  $\Omega$  à  $\Omega^*$ . Alors on vérifie que la fonction définie par

$$w(x, t) = \sum_{j=i}^k w^j(\cdot, t), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall x \in \Omega^*, \quad (15)$$

est continue en temps sur  $\Omega$  (et non sur  $\Omega^*$ ), de divergence nulle et satisfait (13) sur  $\Omega$ . De plus, elle vérifie  $w(\cdot, T) = 0$ .

Dans ce cas,  $\text{rot } \zeta = 0$ ,  $\text{div } \zeta = 0$ ,  $\zeta \cdot n = 0$  (on impose un contrôle en vitesse nul pour le temps  $T$ ) impliquent que  $\zeta(\cdot, T) = 0$  (car  $\Omega$  est simplement connexe !)

On peut alors mettre en place une suite de solutions de problèmes linéaires résolus comme précédemment :  $u_0 = \bar{y}$ ,  $u_1 = \zeta$ ,  $u_2$  est solution du problème de contrôle linéarisé autour de  $\zeta$  (qui est proche de  $\bar{y}$  si  $y_0$  est petit et de divergence nulle sur  $\Omega$ ), etc. On montre ensuite que la suite converge vers une certaine solution  $u$  qui répond au problème.

### 3 Le cas multiconnexe

Si  $\pi_1(\Omega) \neq 0$ , le problème est plus complexe. En effet, dans ce cas,

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \zeta(\cdot, T) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } \zeta(\cdot, T) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \zeta(\cdot, T) \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \right\} \not\Rightarrow \zeta = 0,$$

mais  $\zeta(\cdot, T) = \sum_{i=1}^g \lambda_i \mathcal{Q}_i$ , pour des  $\lambda_i$  réels, où  $g$  est le nombre de générateurs de  $\pi_1(\Omega)$  et où les  $\mathcal{Q}_i$  sont définis de la façon suivante (voir par exemple [9]) : on considère  $g$  hypersurfaces régulières (du type du disque)  $\Sigma_i$  de  $\bar{\Omega}$ , reposant sur  $\partial\Omega$ , et telles que

$$\Omega \setminus \left( \bigcup_{i=1}^s \Sigma_i \right) \text{ soit simplement connexe.}$$

Par exemple, dans le cas du tore, on peut choisir  $\Sigma_i$  comme décrit dans la figure 2.

On distingue les deux faces de chaque  $\Sigma_i$ , les dénotant  $\Sigma_i^+$  et  $\Sigma_i^-$ . On définit ensuite les fonctions  $q_i$  par

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma_i, \\ \partial_n q_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ q_i &= 1 \text{ sur } \Sigma_i^+, \\ q_i &= 0 \text{ sur } \Sigma_i^-. \end{aligned}$$

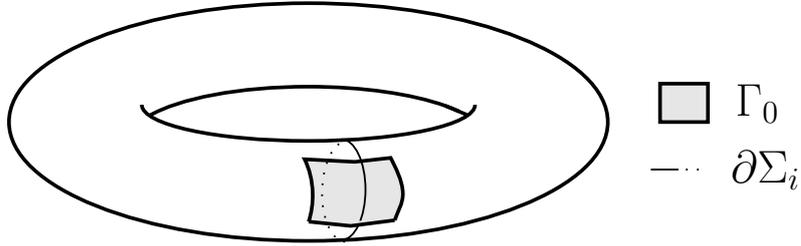


FIG. 2: Exemple de surface  $\Sigma_i$ .

Alors on a  $\partial_n q_i|_{\Sigma_i^+} - \partial_n q_i|_{\Sigma_i^-} = 0$ , et on peut introduire  $\mathcal{Q}_i := \nabla q_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

En réalisant le même type de contrôle que dans la section précédente, on parvient dans le cas multiconnexe, non pas à annuler la solution au temps  $T$ , mais à la rendre irrotationnelle. Le nouveau problème est donc de savoir éliminer les termes en ' $\mathcal{Q}_i$ '.

On introduit pour cela un nouvel ' $\bar{y}$ ' qui va compléter le précédent, et on utilise ensuite une méthode comparable. Contrairement au ' $\bar{y}$ ' de la section précédente, ce nouvel ' $\bar{y}$ ' sera déterminé non pas de telle sorte que certains points aient sous l'action de son flot la trajectoire voulue, mais de telle sorte que certaines courbes aient (approximativement) la bonne trajectoire sous l'action du flot.

Pour contrôler le flot d'une courbe, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$  une courbe lisse, injective, avec  $\gamma((0, 1)) \subset \Omega$ , et  $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial\Omega$ . Supposons également que  $\dot{\gamma}(s) \notin T_{\gamma(s)}\partial\Omega$  pour  $s = 0, 1$ .

Soit  $y \in C^\infty(\gamma, \mathbb{R}^3)$  un champ de vecteur défini sur  $\gamma$  tel que

$$y(\gamma(0)) \cdot n(\gamma(0)) = y(\gamma(1)) \cdot n(\gamma(1)) = 0. \quad (16)$$

Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  qui a les propriétés suivantes :

$$\Delta\theta = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (17)$$

$$\partial_n \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad (18)$$

$$\|\nabla\theta - y\|_{C^0(\gamma)} < \epsilon. \quad (19)$$

Autrement dit, à l'aide d'un champ de vecteurs du type  $\alpha(t)\nabla\theta(x)$ , on peut contrôler la trajectoire d'un point de façon exacte, et celle d'une courbe de manière approchée. Au demeurant, ce lemme se démontre de manière analogue au lemme 1, en répartissant la masse de Dirac sur une courbe qui se rapproche de  $\gamma$ .

Grâce à ce lemme, on considérera des fonctions  $\bar{y}^i$  pour éliminer particulièrement le terme en  $\mathcal{Q}_i$ . On en déduira ensuite la “mise bout à bout” des  $\bar{y}^i$  pour obtenir un nouvel  $\bar{y}$  adapté aux problèmes posés par des champs de vitesse initiaux  $y_0$  de la forme  $\sum \lambda_i \mathcal{Q}_i$ .

Nous exposons à présent la forme de  $\bar{y}^i$ . On peut supposer  $\Sigma_i \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ . Nous allons exposer cette trajectoire requise pour la courbe de Jordan dans le plan de coupe de  $\Sigma_i$  (voir la figure 2), les pointillés désignant  $\Gamma_0$ .

La trajectoire de la courbe se divise en trois phases.

### 1<sup>ère</sup> étape

On considère une certaine courbe de Jordan  $J$  au départ entièrement extérieure à  $\Omega$ . On exige de  $\bar{y}^i$  que son flot fasse entrer  $J$  à moitié dans  $\Omega$ , selon la figure 3.

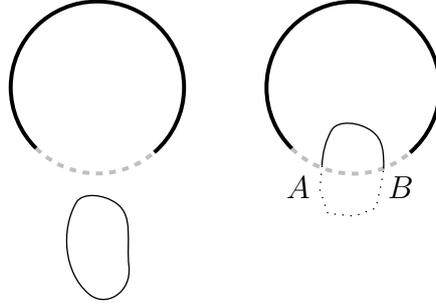


FIG. 3: Entrée dans  $\Omega$ .

### 2<sup>ème</sup> étape

On impose que la partie de  $J$  intérieure à  $\Omega$  “fasse le tour”, i.e. décrive (approximativement) la surface  $\Sigma_i$ , jusqu’à ce que les points d’intersection de  $J$  et de  $\partial\Omega$  se retrouvent dans  $\Gamma_0$ , selon la figure 4.

### 3<sup>ème</sup> étape

On fait dans cette dernière phase sortir complètement  $J$  de  $\Omega$  (en restant proche de  $\Sigma_i$ ), comme décrit dans la figure 5.

Ainsi, on choisit un  $\bar{y}_i$  qui fait parcourir à une courbe de Jordan placée au départ à l’extérieur de  $\Omega$ , une surface à l’intérieur de  $\Omega$  qui est très proche de  $\Sigma_i$  (le choix de celui-ci étant libre, on pourrait même dire que la courbe parcourt exactement  $\Sigma_i$ ). À la fin du processus, la courbe est “enroulée” autour de  $\Omega$ .

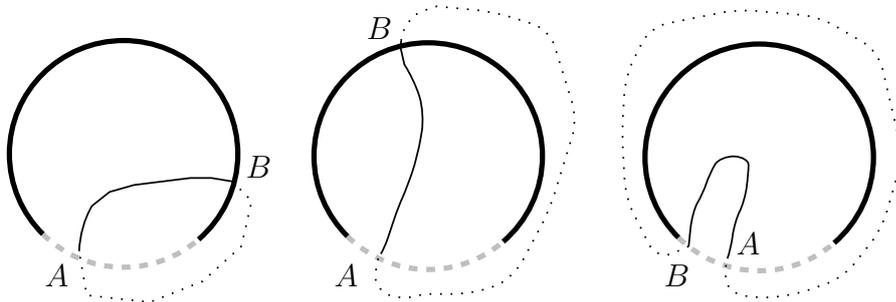


FIG. 4: Description (approximative) de  $\Sigma_i$ .

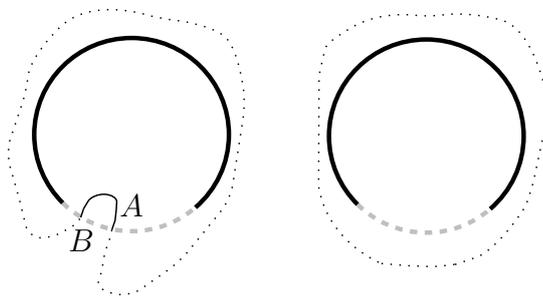


FIG. 5: Sortie hors de  $\Omega$ .

On peut maintenant décrire le contrôle en vorticité que l'on utilise pour l'équation lin aris e autour d'un  $\tilde{y}$  proche de  $\bar{y}^i$ , suffisamment pour que le support du filament de vortex plac e en  $J$  au temps 0 et transport e par le flot de  $\tilde{y}$  ne rencontre plus le domaine  $\bar{\Omega}$  au temps  $T$ .

Le principe est de placer au lieu de  $J$  à l'instant 0, un filament de vortex (ou une régularisation par convolution de ce filament, plac e proche autour de  $J$ ), d'intensité  $\mu_i$ . Par cela, nous entendons la distribution suivante :

$$\omega_0 := \mu_i \mathcal{M}_J \vec{\tau},$$

où  $\mathcal{M}_J$  est la répartition linéique de Dirac sur  $J$ , et  $\vec{\tau}$  une tangente unitaire sur  $J$ .

On montre alors que si l'on opère ainsi, on obtient comme solution de l'équation lin aris e autour de  $\tilde{y}$  un certain  $\zeta$  qui vérifie

$$\zeta(T) = \sum_{j=1}^g \lambda_j \mathcal{Q}_j + \mu_i \mathcal{Q}_i. \quad (20)$$

On peut donc ainsi "régler" correctement les intensités  $\mu_i$ , de sorte que l'on

peut passer d'une répartition irrotationnelle de vitesse à zéro en utilisant la méthode du retour autour de  $\bar{y}$ .

**Idée de la preuve de (20)**

Nous nous contenterons de donner une "explication" imprécise de (20).

Supposons que nous ayons obtenu une solution  $u$  de l'équation d'Euler sur  $\mathbb{R}^3$ , qui parte d'une répartition de vitesse  $\sum \lambda_i \mathcal{Q}_i$ , et qui soit proche de  $\bar{y}^i$  (suffisamment encore pour que le support du filament de vortex placé en  $J$  au temps 0 ne rencontre plus le domaine  $\Omega$  au temps  $T$ ).

Alors, on a la méthode suivante pour calculer les  $\lambda_i$ . On considère une courbe de Jordan  $\gamma_0^i$  à l'intérieur de  $\Omega$  à l'instant 0, qui coupe  $\Sigma_i$  (une fois), et qui ne coupe pas d'autres hypersurfaces  $\Sigma_j$ .

Alors la circulation de vitesse le long de cette courbe, soit

$$\int_{\gamma_0^i} y_0 \cdot d\vec{\tau},$$

est égale à  $\lambda_i$  (ou  $-\lambda_i$  selon nos choix de  $\vec{\tau}$  et de  $\Sigma_i^+$  et  $\Sigma_i^-$ ).

Au temps  $T$ , le champ du vecteur vitesse est irrotationnel, et on peut calculer le coefficient de  $\mathcal{Q}_i$  dans  $u(T)$  de la même façon. Ainsi, on considère une courbe  $\gamma_T^i$  qui coupe simplement  $\Sigma_i$  et ne coupe pas les autres  $\Sigma_j$ . Alors on peut faire reposer sur les courbes  $\tilde{\gamma}_0^i := \phi^u(0, T, \gamma_0^i)$  et  $\gamma_T^i$  une surface (un cylindre). Celui-ci coupe simplement l'emplacement  $J_T$  du filament de vortex à la fin du processus. Il s'ensuit que le flux de vorticit   à travers cette surface est de  $\mu_i$ .

Prenons comme exemple celui du tore, vu selon un plan de coupe orthogonal à l'axe de révolution; les courbes sont placées dans ce cas comme sur la figure 6.

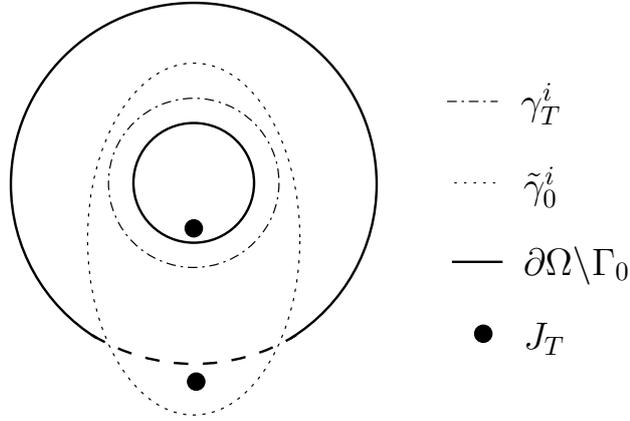


FIG. 6: Emplacement des courbes  $\gamma_T^i$  et  $\tilde{\gamma}_0^i$ .

Donc si on cherche le coefficient de  $\mathcal{Q}_i$  dans  $u(T)$ , on peut le chercher sous la

forme

$$\int_{\gamma_T^i} u(T).d\vec{\tau},$$

Or celui-ci est égal à

$$\int_{\tilde{\gamma}_0^i} u(T).d\vec{\tau} + \mu_i,$$

et l'intégrale précédente est égale à

$$\int_{\gamma_0^i} y_0.d\vec{\tau},$$

par théorème de Kelvin. On arrive ainsi à la formulation de (20).

## Références

- [1] J.-M. Coron, Global Asymptotic Stabilization for controllable systems without drift, *Math. Control Signal Systems*, 5, 1992, p. 295-312.
- [2] J.-M. Coron, Return method : Application to controllability, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles*, 1992-1993, École polytechnique, Centre de Mathématiques, exposé 14.
- [3] J.-M. Coron, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* 317 (1993), no. 3, p. 271-276.
- [4] J.-M. Coron, On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *J. Math. Pures Appl.*, 75, 1996, p. 155-188.
- [5] J.-M. Coron, On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, *ESAIM : Control Optimisation and Calculus of Variations*, <http://www.emath.fr/cocv/>, 1, 1996, p. 35-75.
- [6] O. Glass, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 325 (1997), no. 9, p. 987-992.
- [7] A. V. Kazhikov, Note on the formulation of the problem of flow through a bounded region using equations of perfect fluid, *PMM USSR*, 44, 1981, p. 672-674.
- [8] J.-L. Lions, Are there connections between turbulence and controllability ?, 9th INRIA International Conference, Antibes, June 12-15, 1990.
- [9] R. Temam, *Navier-Stokes equations and numerical analysis*, North-Holland Pub., 1979.