Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Georgi Popov et Georgi Vodev

Distribution des résonances et décroissance de l'énergie locale pour le problème de transmission

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XIV, 5 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A14_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Distribution des résonances et décroissance de l'énergie locale pour le problème de transmission

G. Popov et G. Vodev
UMR 6629, Université de Nantes - CNRS
Département de Mathématiques,
2, rue de la Houssinière, B.P. 92208,
44322 Nantes-Cedex 03, France

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n, n \geq 2$, un domaine strictement convexe à bord C^∞, Γ, et on pose $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}$. Soit $c, \alpha > 0$ des constantes. Sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathcal{O}; \alpha^{-1}c^{-2}dx) \oplus L^2(\Omega; dx)$ on considère l'opérateur

$$Pu := (c^2\Delta u_1, \Delta u_2), \qquad u = (u_1, u_2) \in D(P),$$

où le domaine de définition de P est donné par

$$D(P) := \{(u_1, u_2) \in H : u_1 \in H^2(\mathcal{O}), u_2 \in H^2(\Omega), u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma, \partial_{\nu'} u_1|_\Gamma = -\alpha \partial_\nu u_2|_\Gamma\},$$

où ν' est la normale intérieure à Γ et $\nu = -\nu'$ est la normale extérieure. On définie les résonances associées à P comme étant les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante tronquée:

$$R_\chi(\lambda) := \lambda \chi (P + \lambda^2)^{-1} \chi : H \to H$$

du demi-plan $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ au plan complexe $\mathbf{C}$ si la dimension n est impaire et à la surface de Riemann de logarithme si la dimension n est paire. Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi = 1$ sur $\mathcal{O}$. Une autre définition équivalante est la suivante: λ est une résonance s'il existe $0 \neq (u_1, u_2) \in H^2(\mathcal{O}) \oplus H^2(\Omega)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (c^2\Delta + \lambda^2)u_1 & = & 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ (\Delta + \lambda^2)u_2 & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 - u_2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\nu'} u_1 + \alpha \partial_\nu u_2 & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_2 & - & \lambda - \text{sortant}. & \end{array} \right. \tag{1}$$

Il est clair que λ est une résonance si et seulement si le problème suivant a une solution non triviale:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (c^2\Delta + \lambda^2)u & = & 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_{|\Gamma} & = & f, & \\ \partial_{\nu'} u_{|\Gamma} & = & -\alpha \mathcal{N}(\lambda) f, & \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ désigne l'opérateur de Neumann sortant associé au problème de Helmholtz $(\Delta + \lambda^2)u_2 = 0$ dans Ω.

Soit B une boule dans $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{O} \subset B$. Pour tout $m \geq 0$ on définit les quantités

$$p_m(t) = \sup\{\frac{\|\nabla_x u\|_{L^2(B)} + \|\partial_t u\|_{L^2(B)}}{\|\nabla_x f_1\|_{H^m(B)} + \|f_2\|_{H^m(B)}},$$

$$(0,0) \neq (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \times C^\infty(\mathbf{R}^n), \operatorname{supp} f_j \subset B\},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - P)u(t) & = & 0 \\ u(0) = f_1, & & \partial_t u(0) = f_2. \end{array} \right. \tag{3}$$

On a $C \geq p_0(t) \geq ... \geq p_{m_1}(t) \geq p_{m_2}(t) > 0$ si $0 < m_1 \leq m_2$. De plus, si $m \neq 0$, $p_m(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (voir [8]). Il se trouve que la manière dont $p_m(t)(m \neq 0)$ décroit vers zéro dépend du comportement de $\|R_\chi(\lambda)\|_{H \to H}$ sur l'axe réel. On a d'abord la proposition suivante:

Proposition 1. *Supposons que*

$$\|R_\chi(\lambda)\|_{H \to H} \leq M(\lambda) \tag{4}$$

pour $\operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda \gg 1$. *Alors,* $R_\chi(\lambda)$ *est holomorphe dans le domaine* $\operatorname{Im} \lambda \leq C_1 M(|\lambda|)^{-1}$ *et*

$$\|R_\chi(\lambda)\|_{H \to H} \leq C_2 M(|\lambda|) \tag{5}$$

pour $|\operatorname{Im} \lambda| \leq C_1 M(|\lambda|)^{-1}$.

Notons qu'on ne peut pas avoir dans (4) une meilleure borne que celle qu'on a dans le cas de la résolvante libre ou bien dans le cas des perturbations non captives, c'est-à-dire $M(\lambda) = Const.$ D'autre part, d'après Burq [1], on a toujours (4) avec $M(\lambda) = C \exp(C\lambda)$ pour certaine constante $C > 0$.

Proposition 2. *Si* $M(\lambda) = Ce^{C\lambda}$, *alors*

$$p_m(t) \leq C_m (\log t)^{-m}, \quad \forall m > 0. \tag{6}$$

Si $M(\lambda) = C$, *alors*

$$p_m(t) \leq \left\{ \begin{array}{cc} C_m \exp\left(-\frac{\gamma m}{m+1} t\right), & n - \text{impair}, \\ C_m t^{-n}, & n - \text{pair}, \end{array} \right. \tag{7}$$

pour tout $m > 0$, *où* $\gamma > 0$ *ne dépend ni de* t *ni de* m.

Supposons que $M(\lambda) = C\lambda^k, k > 0$. *Si* n *est impair on a*

$$p_m(t) \leq C_m (t^{-1} \log t)^{m/k}. \tag{8}$$

Si n *est pair on a*

$$p_m(t) \leq \left\{ \begin{array}{ccc} C_m (t^{-1} \log t)^{m/k} & \text{pour} & 0 < m \leq nk, \\ C_m t^{-n} & \text{pour} & m > nk. \end{array} \right. \tag{9}$$

La question qui se pose maintenant est de savoir laquelle de toutes ces situations se produit dans le cas de l'opérateur P. Pour y répondre il faut distinguer deux cas: $c < 1$ et $c > 1$. Dans le premier cas il y a ce qu'on appelle des rayons intérieurs de réflexion totale qui vivent près de la région *gliding* $\mathcal{K} = \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : |\xi| = c^{-1}\}$ du problème intérieur. L'existence de tels rayons et le fait que l'obstacle soit strictement convexe fait en sorte qu'une grande quantité d'énergie reste piegée à l'intérieur de l'obstacle. On peut s'attendre dans ce cas à ce qu'il existe des résonances près de l'axe réel. Par contre, dans le cas $c > 1$ de tels rayons n'existent plus mais il y a des rayons extérieurs de réflexion totale. Cela fait en sorte que beaucoup moins d'énergie entre à l'intérieur de l'obstacle, et dans ce cas on s'attend à ce que l'énergie locale décroit assez vite. Notre premier résultat est le théorème suivant:

Théorème 1. *Si $c < 1$, il existe une suite infinie $\{\lambda_j\}$ de résonances de P telles que*

$$0 < \operatorname{Im}\lambda_j \leq C_N|\lambda|^{-N}, \quad \forall N.$$

Corollaire. Si $c < 1$, $M(\lambda) \neq O(\lambda^k), \forall k$.

Théorème 1 découle de la proposition suivante

Proposition 3. *Si $c < 1$, $\forall N \gg 1$, il existe $\{k_j\} \subset \mathbf{C} : |\operatorname{Im} k_j| \leq C, |k_j| \to +\infty$, tels que*

$$\|(c^2\Delta + k_j^2)u_1^{(j)}\|_{L^2(\mathcal{O})} = O(|k_j|^{-N}),$$

$$\|(\Delta + k_j^2)u_2^{(j)}\|_{L^2(\Omega)} = O(|k_j|^{-N}),$$

$$\|u_1^{(j)}|_\Gamma - u_2^{(j)}|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} = O(|k_j|^{-N}),$$

$$\|\partial_{\nu'}u_1^{(j)}|_\Gamma + \alpha\partial_\nu u_2^{(j)}|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} = O(|k_j|^{-N}),$$

où les fonctions $u_1^{(j)}, u_2^{(j)}$ sont à support compact (qui ne dépend pas de j), $\|u_1^{(j)}|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} = 1$,

$$\widetilde{WF}(u_1^{(j)}|_\Gamma), \widetilde{WF}(u_2^{(j)}|_\Gamma) \subset \mathcal{K} = \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : |\xi| = c^{-1}\}.$$

Dans le cas de dimension impaire l'implication Proposition 3 $\Longrightarrow$ Théorème 1 se démontre de la même façon que dans [6], tandis que dans le cas de dimension paire, elle résulte de l'analyse de [7].

Théorème 2. *Si $c > 1$, on a (4) avec $M(\lambda) = O(\lambda)$. En particulier, dans le domaine $\operatorname{Im}\lambda \leq C_1|\lambda|^{-1}, |\operatorname{Re}\lambda| \geq C_2$, il n'y a pas de résonances.*

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est une boule on peut trouver une suite $\{\lambda_j\}$ de résonances telles que $\operatorname{Im}\lambda_j \to \gamma > 0$, et donc on ne peut pas espérer avoir une région libre de résonances meilleure qu'une bande. On fait les conjuctures suivantes.

Conjecture 1. *Si $c > 1$, on a (4) avec $M(\lambda) = C$.*

Conjecture 2. *Si $c > 1$, on a*

$$p_0(t) \leq \begin{cases} C\exp(-\gamma t), & n - \text{impair}, \\ Ct^{-n}, & n - \text{pair}, \end{cases} \tag{10}$$

Il est facile de voir que la Conjecture 2 entraine la Conjecture 1. Considérons le problème

$$\begin{cases} (c^2\Delta + \lambda^2)u &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_{|\Gamma} &= f, \\ \partial_{\nu'} u_{|\Gamma} + \alpha \mathcal{N}(\lambda) f &= g. \end{cases} \tag{11}$$

Le Théorème 2 découle de la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit $u \in H^2(\mathcal{O}), g \in L^2(\Gamma)$ vérifiant (11). Alors, pour tout $\lambda \in \{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}\, z| \leq C_1|z|^{-1}, |\mathrm{Re}\, z| \geq C_2\}$, pour certaines constantes $C_1, C_2 > 0$, on a*

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C|\lambda|^{-1/2}\|g\|_{L^2(\Gamma)}, \tag{12}$$

avec une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de λ.

Idée de la preuve: montrant que si $c > 1$, dans la région $\mathrm{Im}\, \lambda \leq C_1|\lambda|^{-1}$, $\mathrm{Re}\, \lambda \geq C_2$, il n'y a pas de résonances de P:

Soit $\lambda, |\mathrm{Im}\, \lambda| \leq 1, \mathrm{Re}\, \lambda \gg 1$, une résonance et soit u, f vérifiant (2). On a

$$(N_1(\lambda) + \alpha\mathcal{N}(\lambda))f = 0, \tag{13}$$

où $N_1(\lambda)$ est l'opérateur de Neumann associé au problème $(c^2\Delta + \lambda^2)u = 0$ dans $\mathcal{O}$. Il est bien connu (par exemple, voir [2]) que $\mathcal{N}(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel à grand paramétre $\mathrm{Re}\, \lambda$ dont le symbole principal s'écrit en coordonnées locales de la forme $-i\mathrm{Re}\, \lambda\sqrt{1 - |\xi|^2}$ dans $|\xi| < 1$, $-\mathrm{Re}\, \lambda\sqrt{|\xi|^2 - 1}$ dans $|\xi| > 1$, et $\mathcal{N}(\lambda) = J\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda)J^{-1}$ dans $|\xi| = 1$, où $\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda) \in L^{2/3,0}_{0,0}(\Gamma)$ et J est un opérateur de Fourier elliptique d'ordre zéro à grand paramétre $\mathrm{Re}\, \lambda$. On ne peut pas faire la même analyse sur l'opérateur $N_1(\lambda)$, mais dans la zone elliptique $|\xi| > c^{-1}$ pour le problème intérieur on peut approcher $N_1(\lambda)$ par un opérateur pseudodifférentiel à grand paramétre dont le symbole principal est $-\mathrm{Re}\, \lambda\sqrt{|\xi|^2 - c^{-2}}$. En utilisant cela on peut déduire de (13) que le front d'ondes semiclassique de f vérifie

$$\widetilde{WF}(f) \subset \{|\xi| \leq c^{-1} + \varepsilon\}, \forall\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Auterement dit, on a le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit $\eta \in C^\infty(T^*\Gamma)$, $\mathrm{supp}\, \eta \subset \{|\xi| \leq c^{-1} + 2\varepsilon\}$, $\eta = 1$ sur $\{|\xi| \leq c^{-1} + \varepsilon\}$. Si f vérifie (13), on a*

$$\|f - \mathrm{Op}_\lambda(\eta)f\|_{H^s(\Gamma)} = O(|\lambda|^{-\infty}), \forall s. \tag{14}$$

Par la formule de Green et le Lemme 1 on a

$$\operatorname{Im}\lambda^2\|u\|^2_{L^2(\mathcal{O})} = -\alpha \operatorname{Im}\langle \mathcal{N}(\lambda)f, f\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

$$= -\alpha \operatorname{Im}\langle \mathcal{N}(\lambda)\mathrm{Op}_\lambda(\eta)f, \mathrm{Op}_\lambda(\eta)f\rangle_{L^2(\Gamma)} + O(|\lambda|^{-\infty})\|f\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Comme $\operatorname{supp}\eta \subset \{|\xi| < 1\}$, on a que le symbole principal de l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)\mathrm{Op}_\lambda(\eta)$ est égal à $-i\operatorname{Re}\lambda\sqrt{1-|\xi|^2}\eta$. Donc, on obtient

$$\operatorname{Im}\lambda\|u\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \geq C'\|f\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{15}$$

D'autre part, on a

$$u = -\partial_{\nu'}R_0(\lambda)\gamma^* f - \alpha R_0(\lambda)\gamma^*\mathcal{N}(\lambda)f,$$

où γ désigne la restriction sur Γ et $R_0(\lambda)$ est la résolvante libre. Ceci entraine

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C_1|\lambda|^{1/2}\|f\|_{L^2(\Gamma)}. \tag{16}$$

En combinant (15) et (16) on arrive au résultat désiré.

References

[1] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur*, Acta Math., to appear.

[2] C. Gérard, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convex*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n. 31, **116**, 1988.

[3] G. Lebeau, *Equation des ondes amorties*, In: A. Boutet de Montvel and V. Marchenko editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73-109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[4] G. Popov and G. Vodev, *Resonances near the real axis for transparent obstacles*, submitted.

[5] P. Stefanov and G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677-714.

[6] P. Stefanov and G. Vodev, *Neumann resonances in linear elasticity for an arbitrary body*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 645-659.

[7] S.-H. Tang and M. Zworski, *From quasimodes to resonances*, Res. Math. Notes, to appear.

[8] H. Walker, *Some remarks on the local energy decay of solutions of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded domains*, J. Diff. Equations **23** (1977), 459-471.