



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz

**X** ECOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**1997-1998**

Alain Grigis

**Points tournants et résonances de Stark-Wannier**

*Séminaire É. D. P.* (1997-1998), Exposé n° XI, 11 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_1997-1998\\_\\_\\_\\_A11\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A11_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Points tournants et résonances de Stark-Wannier

Alain GRIGIS

Université de Paris-Nord, Département de Mathématiques

CNRS - UMR 7539, 93430 Villetaneuse, France

grigis@math.univ-paris13.fr

20 janvier 1998

# 1 Introduction

Dans cet exposé nous présentons les résultats de l'article à paraître [B-G]. Il s'agit donc d'un travail en collaboration avec Vladimir Buslaev. Une grande partie du matériel présenté se trouve aussi dans l'article de V.Buslaev et L.A. Dimitrieva. La nouveauté est la détermination précise de la partie imaginaire des résonances de Stark-Wannier.

Les résonances de Stark-Wannier sont liées à l'étude spectrale de l'opérateur  $P_\epsilon$  défini par :

$$(1.1) \quad P_\epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x) - \epsilon x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le paramètre  $\epsilon$  est positif et on le fait tendre vers 0. On introduira aussi la variable  $\xi = \epsilon x$ . La fonction  $p$  est réelle, périodique,  $p(x+a) = p(x)$ , et on suppose :

$$(1.2) \quad \int_0^a p(x)dx = 0.$$

L'opérateur  $P_\epsilon$  est autoadjoint sur  $L^2(\mathbb{R})$  avec son domaine naturel. Il a un spectre absolument continu qui coïncide avec tout l'axe réel  $\mathbb{R}$ .

Au paragraphe 2 on définit les résonances comme des pôles d'un prolongement d'une résolvante à travers l'axe réel. L'étude de la partie réelle des résonances dans le cas où  $p(x)$  est un potentiel à  $N$  gaps a été faite dans [B-D]. Ici nous étudions les développements asymptotiques de la partie imaginaire de ces résonances.

Une des techniques de base de l'étude est la méthode adiabatique introduite par Buslaev dans [B1, B3], qui est une généralisation de la méthode WKB. Nous la présentons au paragraphe 5. Une notion essentielle est celle de point tournant. Nous donnons au paragraphe 6 l'étude près d'un point tournant simple.

La question de l'existence des résonances et leur description a été l'objet de nombreux travaux. On peut voir la liste de références et [B1] pour des commentaires.

## 2 Définition des résonances

On construit certaines solutions de l'équation :

$$(2.1) \quad -u''(x) + (p(x) - \epsilon x)u(x) = Eu(x),$$

Il existe une solution  $g_- = g_-(x, E)$  qui a le comportement asymptotique suivant quand  $x \rightarrow -\infty$

$$(2.2) \quad g_- \sim \frac{1}{2|\xi + E|^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3\epsilon}|\xi + E|^{\frac{3}{2}}}, \quad \xi = \epsilon x.$$

Une telle fonction est définie pour tout  $E \in \mathbb{C}$  et c'est une fonction entière de  $E$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$  les solutions de l'équation sont de type oscillant. En particulier il existe une solution  $f_+ = f_+(x, E)$  qui a le comportement suivant pour  $x \rightarrow +\infty$  :

$$(2.3) \quad f_+ \sim \frac{1}{\sqrt{2}|\xi + E|^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{2}{3\epsilon}|\xi + E|^{\frac{3}{2}}}, \quad \xi = x\epsilon.$$

C'est une fonction continue de  $E$  pour  $ImE \geq 0$  et holomorphe pour  $ImE > 0$ .

Comme l'équation est linéaire du second ordre on a la relation :

$$(2.4) \quad g_- = \bar{M}f_+ + M\bar{f}_+,$$

Le coefficient de reflexion  $M = M(E)$  est continu pour  $ImE \geq 0$  et est holomorphe dans  $ImE > 0$ . La fonction  $M$  est périodique :

$$(2.5) \quad M(E + \epsilon a) = M(E).$$

La résolvante est l'opérateur intégral de noyau :

$$(2.6) \quad R(x, y, E) = iN(x, y, E)/M(E), \quad ImE > 0,$$

$$(2.7) \quad N(x, y, E) = g_-(x, E)f_+(y, E), \quad x \leq y.$$

**Hypothèse** : On suppose que  $p(x)$  se prolonge en une fonction holomorphe dans la bande  $|Imx| < \alpha$ .

Alors la solution  $f_+$  et la fonction  $M$  admettent un prolongement analytique à la bande  $ImE > -\epsilon\alpha$ . La fonction  $M$  n'a pas de racines dans  $ImE \geq 0$ , mais elle peut en avoir dans la bande  $-\epsilon\alpha < ImE < 0$ .

**Definition 2.1** *Les résonances de Stark-Wannier sont les zéros de la fonction  $M(E)$  dans la bande  $-\epsilon\alpha < ImE < 0$ .*

Comme la fonction  $M$  est  $\epsilon a$ -périodique, on voit que les résonances forment des échelles c'est-à-dire des réseaux de période  $\epsilon a$ . D'autre part les résonances peuvent être aussi définies comme les pôles du prolongement de la résolvante du demi-plan  $ImE > 0$  à la bande  $-\epsilon\alpha < ImE < 0$ .

Nous allons donner un développement asymptotique de ces résonances quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 3 Rappels sur l'équation de Hill

Soit l'équation de Hill :

$$(3.1) \quad -u'' + p(x)u = Eu.$$

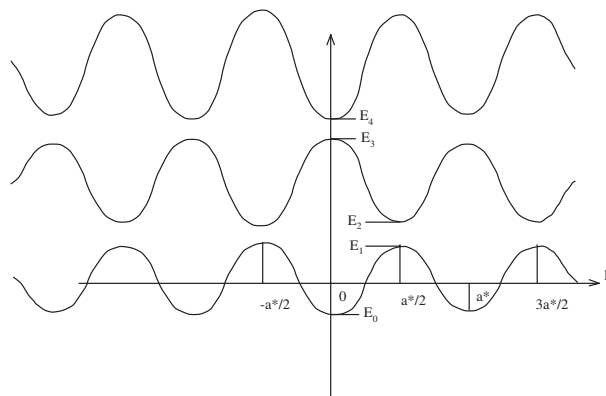


Figure 1

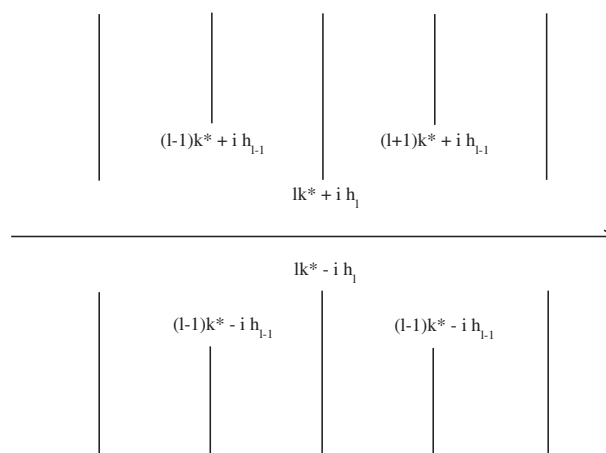


Figure 2

On cherche des solutions de la forme :

$$(3.2) \quad u(x) = e^{ikx} \varphi(x), \varphi(x+a) = \varphi(x).$$

Le paramètre de Floquet  $k$  est appelé aussi quasimoment. Pour  $k$  réel on trouve une suite  $\mathcal{E}_l(k)$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$  de valeurs de  $E$  pour lesquelles une telle solution existe.

Les bandes spectrales sont les ensembles des valeurs des fonctions  $\mathcal{E}_l(k)$  pour  $k$  réel. La fonction  $\mathcal{E}_l(k)$  a pour période  $a^* = 2k^* = \frac{2\pi}{a}$ . On note  $u_l(x, k) = e^{ikx} \varphi_l(x, k)$  la fonction propre associée.

$$(3.3) \quad \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + k \right)^2 + p(x) - \mathcal{E}_l(k) \varphi_l(x, k) = 0$$

On peut étendre au domaine complexe les fonctions  $\mathcal{E}_l(k)$  (voir la figure 2) et en fait toutes ces fonctions peuvent être définies sur différentes branches d'une unique surface de Riemann.

Par exemple on peut définir la fonction  $\mathcal{E}(k)$  sur le domaine de la figure 3 en posant  $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_l(k)$  pour  $k$  appartenant à l'intervalle réel  $((l-1)k^*, lk^*)$ .

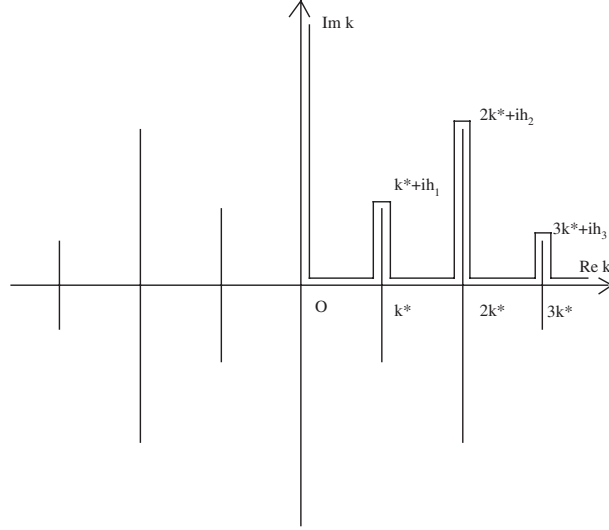


Figure 3

On doit normaliser les fonctions  $\varphi_l(x, k)$  et comme  $\mathcal{E}_l(k)$  et  $\mathcal{E}(k)$  présentent des points de branchements on introduit les formes :

$$(3.4) \quad \omega_l = -\frac{\int_0^a \varphi_l(x, -k) d_k \varphi_l(x, k) dx}{\int_0^a \varphi_l(x, -k) \varphi_l(x, k) dx}, \quad \omega = -\frac{\int_0^a \varphi(x, -k) d_k \varphi(x, k) dx}{\int_0^a \varphi(x, -k) \varphi(x, k) dx}.$$

## 4 La courbe d'isoénergie

On considère la courbe d'équation, pour  $E$  fixé :

$$(4.1) \quad \mathcal{E}(k) - \xi = E.$$

Les points tournants sont les points  $\xi$  tels que  $\mathcal{E}'(k) = 0$  au couple  $(k, \xi)$  correspondant. Ils existent pour  $\xi = a_l - E$  ou  $\xi = b_l - E$ , où  $a_l$  et  $b_l$  sont les extrémités de la bande  $B_l$ . La courbe d'isoénergie joue le rôle de la courbe caractéristique dans la méthode WKB.

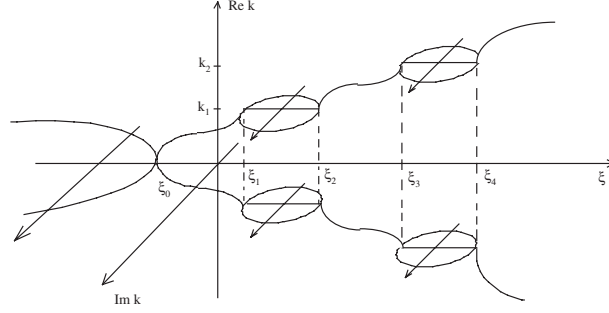


Figure 4

La courbe a une topologie non triviale. On définit  $\gamma_l$  comme le lacet réel au dessus de la bande  $B_l$  et  $\bar{\gamma}_l$  comme le lacet dans la partie complexe au dessus du  $l$ -ième gap.

## 5 Le résultat

On peut maintenant énoncer le principal résultat.

**Theorem 5.1** *Soit  $p(x)$  un potentiel périodique tel que le spectre de l'équation de Hill correspondante ait  $Q$  intervalles d'instabilité. Dans un domaine où  $E$  et  $\epsilon$  vérifient :*

$$(5.1) \quad |\sin \varphi_m| > \nu > 0, \quad m \neq 2l - 2,$$

*il existe une échelle  $E_{l,n}$  associée à la bande  $B_l$ . Le développement asymptotique de  $E_{l,n}$  est donné par*

$$(5.2) \quad \sin \varphi_{2l-2} = 0$$

*soit*

$$(5.3) \quad E_{l,n} \sim \frac{a}{2\pi} \int_0^{k^*} \mathcal{E}_l(k) dk + n\epsilon a + \frac{\epsilon a}{2\pi} \int_{\gamma_l} \omega_l + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

*La partie imaginaire de  $E_{l,n}$  admet dans les mêmes conditions le développement asymptotique :*

$$(5.4) \quad \text{Im} E_{l,n} \sim -\frac{\epsilon a}{\pi} \frac{1}{(\sin \varphi_{2l} \dots \sin \varphi_{2Q-2} Z_{2l-1} \dots Z_{2Q-1})^2}$$

*où*

$$(5.5) \quad \varphi_m = \frac{\pi}{\epsilon a} E - \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{k^*} \mathcal{E}_l(k) dk + \frac{1}{2} \int_{\gamma_l} \omega_l + \mathcal{O}(\epsilon),$$

*et  $Z_m = 2e^{z_m}$  avec*

$$(5.6) \quad z_m = \frac{1}{2\epsilon} S_l + \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}_l} \omega_l + \mathcal{O}(\epsilon)$$

*et  $S_l$  est l'action  $S_l = -\int_{\bar{\gamma}_l} \xi(idk)$ .*

On constate donc que la partie imaginaire est exponentiellement petite puisque dans le développement asymptotique apparaît dans l'exponentielle avec un coefficient  $-1$  la somme des actions à travers les barrières séparant la bande  $B_l$  de la bande infinie.

## 6 La méthode WKB adiabatique

On cherche une solution asymptotique de l'équation (1.1) sous la forme

$$(6.1) \quad F(x, \xi, \epsilon) = e^{\frac{i}{\epsilon}\theta(\xi)} f(x, \xi, \epsilon)$$

où

$$(6.2) \quad f(x, \xi, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n f_n(x, \xi),$$

et  $f_n$  est périodique en  $x$ ,  $f_n(x + a, \xi) = f_n(x, \xi)$ . Ici  $\theta(\xi)$  est une primitive de la forme différentielle  $k d\xi$  sur une branche de la courbe d'isoénergie.

On obtient la suite d'équations :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} & [(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \theta')^2 + p(x) - \xi - E] f_n - \\ & -i[2(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \theta') \frac{\partial}{\partial \xi} + \theta''] f_{n-1} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

et en particulier

$$(6.4) \quad [(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \theta')^2 + p(x) - \xi - E] f_0 = 0$$

On voit que l'on obtient une équation de Floquet et que la condition pour que cette équation ait une solution est que  $k = \theta'(\xi)$  et  $\xi$  doivent être reliés par

$$(6.5) \quad \mathcal{E}(k) - \xi = E.$$

On retrouve l'équation de la courbe d'isoénergie.

Si cette condition est vérifiée, on peut prendre

$$(6.6) \quad f_0(x, \xi) = N(\xi) \varphi(x, k)$$

Le coefficient  $N(\xi)$  est déterminé par la condition pour que l'équation suivante portant sur  $f_1$  ait une solution périodique. On obtient :

$$(6.7) \quad N(\xi) = |\mathcal{E}'(k)|^{-\frac{1}{2}} e^{\int \omega}$$



On peut résoudre successivement toutes les équations et déterminer  $F$  à un facteur près de la forme :

$$(6.8) \quad C = e^{\frac{i}{\epsilon}\theta_0} \sum_{n \geq 0} \epsilon^n c_n$$

Une grande partie du travail est de montrer l'existence d'une vraie solution de l'équation initiale, ayant ce développement asymptotique.

## 7 Asymptotique uniforme près d'un point tournant

L'une des innovations de [B-G] est constituée par des formules asymptotiques uniformes au voisinage d'un point tournant simple. Celles-ci sont, au voisinage d'un point tournant  $(k_m, \xi_m)$  de la forme :

$$(7.1) \quad G = (\epsilon^{-\frac{1}{6}} w A + \epsilon^{\frac{1}{6}} w' B) e^{ik_m x}$$

où  $w = w(\epsilon^{-\frac{2}{3}} \zeta)$ ,  $A = \sum \epsilon^n A_n(x, \xi)$ ,  $B = \sum \epsilon^n B_n(x, \xi)$ . La fonction  $w$  est une solution quelconque de l'équation d'Airy  $w'' = zw$ . Les fonctions  $A_n$  et  $B_n$  sont périodiques ou antipériodiques en  $x$  pour la période  $a$ . Enfin  $\zeta$  est la fonction de  $\xi = \epsilon x$  déterminée par

$$(7.2) \quad \mathcal{E}(k_m - i\sqrt{\zeta} \zeta') - \xi = E.$$

Là encore il est possible de montrer l'existence de vraies solutions ayant ce développement asymptotique.

Le choix de la solution de l'équation d'Airy est loisible et on va sélectionner les solutions suivantes. Soit

$$(7.3) \quad w_1 \sim (-z)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-z)^{\frac{3}{2}}} \sum i^n \alpha_n (-z)^{-\frac{3n}{2}}, \quad \alpha_0 = 1, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Alors  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{\pi}{4}} w_1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{w}_1)$  est la solution unique à un facteur près qui décroît quand  $z \rightarrow +\infty$ , communément appelée fonction d'Airy. Une autre solution réelle, mais qui croît quand  $z \rightarrow +\infty$  est  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}} w_1 + e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{w}_1)$ .

On a les wronskiens  $\{v, u\} = 2$  et  $\{w_1, \bar{w}_1\} = 2i$  et par suite :

$$(7.4) \quad \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix},$$

$T$  est unitaire,  $\det T = -i$ .

Près de chaque point tournant on peut construire des solutions  $f_m, \bar{f}_m, g_m, h_m$  qui vérifient exactement cette relation :

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_m \\ \bar{f}_m \end{pmatrix}.$$

## 8 Les formules de connexion

Il est donc possible de construire sur toute la droite réelle des solutions asymptotiques. Dans ce paragraphe nous donnons des formules de connexion qui vont permettre de relier la solution  $g_-$  définie au voisinage de  $-\infty$  et les solutions  $f_+$  et  $\bar{f}_+$  définies au voisinage de  $+\infty$ . Les solutions introduites sont schématisées dans la figure 5

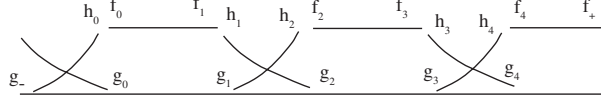


Figure 5

Nous avons pour  $m = 2l - 2$  pair la formule qui donne le saut de la bande  $B_l$  :

$$(8.1) \quad \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ g_{m+1} \end{pmatrix} = U_m \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix},$$

avec

$$(8.2) \quad U_m \sim \begin{pmatrix} \cos \varphi_m & -\sin \varphi_m \\ \sin \varphi_m & \cos \varphi_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_m} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_m} \end{pmatrix} T^{-1}$$

et

$$(8.3) \quad \varphi_m = \frac{\pi}{\epsilon a} E - \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{k^*} \mathcal{E}_l(k) dk + \frac{1}{2} \int_{\gamma_l} \omega_l + \frac{1}{\epsilon} \sum_{n \geq 2} \epsilon^n \varphi_{m,n}$$

D'autre part nous avons pour  $m = 2l - 1$  la formule de connexion à l'intérieur du  $l$ -ième gap :

$$(8.4) \quad \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ g_{m+1} \end{pmatrix} = V_m \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix}$$

avec

$$(8.5) \quad V_m \sim \begin{pmatrix} 0 & -Z_m^{-1} \\ Z_m & 0 \end{pmatrix}$$

De plus on a  $g_- = Z_- h_0$  et  $f_{2Q} \sim \alpha_+ f_+ + \beta_+ \bar{f}_+$  où  $\alpha_+ = e^{i\varphi_+}$  et  $\beta_+ = \mathcal{O}(\epsilon^N), \forall N$ .

Ces formules permettent par un calcul astucieux d'exprimer la fonction  $M(E)$  et en séparant bien partie réelle et partie imaginaire de prouver le théorème. Dans le cas d'un gap ( $Q = 1$ ), l'équation  $M(E) = 0$  se ramène à

$$(8.6) \quad \sin \varphi_0 + i Z_1^{-2} \cos \varphi_0 = 0$$

d'où on tire le résultat dans ce cas. Le développement asymptotique de  $E$  est donné par  $\sin \varphi_0 = 0$  et la partie imaginaire est équivalente à  $-i \frac{\epsilon a}{\pi} Z_1^{-2}$ .

## 9 Remarques finales

La principale critique que l'on peut faire sur le résultat est qu'il ne concerne que les potentiels à un nombre fini de gaps. C'est une hypothèse très restrictive car un potentiel générique a tous ses gaps ouverts. Pour un potentiel analytique la largeur du  $n$ -ième gap décroît exponentiellement avec  $n$ . Dans le but d'étudier les résonances pour le cas d'un potentiel générique il convient donc de donner le développement asymptotique des solutions au voisinage de deux points tournants proches. C'est l'objet d'un travail en cours.

D'autre part, Fumitsuna Maruyama a étudié dans une partie de sa thèse ([M]) les résonances pour une équation du type :

$$(9.1) \quad -u''(x) + (p(x) - E - q(\xi))u(x) = 0, \quad \xi = \epsilon x,$$

où  $q$  est une fonction non linéaire croissante. Il a montré l'existence de résonances; celles-ci sont rangées en échelles distordues car la fonction  $M(E)$  n'est plus périodique dans ce cas.

## Références

- [A] J. Avron : *The lifetime of Wannier ladder state*, Ann. Phys. **143**, (1982), 33-53.
- [A-B] J. Asch and P. Briet : *Lower bounds on the width of Stark-Wannier type resonances*, Commun. in Math. Phys. **179** (1996), 725-736
- [A-F] J. Agler and R. Froese : *Existence of Stark ladders resonances*, Commun. Math. Phys. **100**, (1985), 161-171.
- [B 1] V. S. Buslaev : *Quasiclassical approximation for equations with periodic coefficients*, Uspekhi Mat. Nauk **42** (1987), no. 6, 77-98.
- [B 2] V. S. Buslaev : *Adiabatic perturbation of a periodic potential*, Teoret. Mat. Fiz. **58** (1984), no. 2, 223-243.
- [B 3] V. S. Buslaev : *On spectral properties of adiabatically perturbed Schrödinger operators with periodic potentials*, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique (1990-91), exposé no. 23.
- [B-D] V. S. Buslaev and L. A. Dimitrieva : *A Bloch electron in an external field*, Algebra i Analiz **1** (1989), no **23**, 1-29, traduit dans Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 2, 287-320.

- [**B-G**] V. Buslaev et A. Grigis : *Imaginary parts of Stark-Wannier resonances*, à paraître à Journal of Mathematical Physics (1998)
- [**Be-G**] F. Bentosela and V. Grecchi : *Stark-Wannier ladders*, Commun. Math. Phys. **142**, (1991), 169-192.
- [**C-H**] J.M. Combes and P.D. Hislop : *Stark ladders resonances for small electric fields*, Commun. Math. Phys. **140**, (1991), 291-320.
- [**Fe**] M. V. Fedoryuk : *Asymptotic analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1993)
- [**F-M**] M. V. Fedoryuk and V. P. Maslov : *Quasi-Classical Approximation for the Equations of Quantum Mechanics*, Reidl, Dordrecht, (1981).
- [**Fi**] N. E. Firsova : *The Riemann surface of quasimomentum and scattering theory for the perturbed Hill operator*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **51** (1975), 183-196.
- [**G-M-S**] V. Grecchi, M. Majoli and A. Sacchetti : *Stark resonances in disordered systems*, Commun. Math. Phys. **146**, (1992), 231-241.
- [**G-S**] V. Grecchi and A. Sacchetti : *Lifetime of the Wannier-Stark resonances and perturbation theory*, Commun. Math. Phys., to appear
- [**M**] F. Maruyama : thèse Université Paris 13, (1997).
- [**M-O**] V. A. Marchenko and I. V. Ostrovskii : *Characteristics of the spectrum of the Hill operator*, Mat. Sb. **97** (1975), no. 4, 540-606.
- [**N**] G. Nenciu : *Adiabatic theorem and spectral concentration. I. Arbitrary order spectral concentration for the Stark effect in atoms physics*, Commun. Math. Phys. **82**, (1981), 121-135.