Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Jean-Yves Chemin

Sur l'unicité dans le système de Navier-Stokes tridimensionnel

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° XXIV, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A24_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Sur l'unicité dans le système de Navier-Stokes tridimensionnel

Jean-Yves CHEMIN
Analyse Numérique, Tour 55-65, 5ème étage, BP 187
Université Pierre et Marie CURIE, 4 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France
Télécopie: 01 44 27 72 00, adresse éléctronique: chemin@ann.jussieu.fr

Introduction

Il s'agit d'étudier sous quelles conditions il existe au plus une solution au problème

$$(NS_\nu)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t v+\operatorname{div}(v\otimes v)-\nu\Delta v+\nabla p &=& 0\\ \operatorname{div} v &=& 0\\ v_{|t=0} &=& v_0.\end{array}\right.$$

où $\operatorname{div}(v\otimes v)^j \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(v^j v) = \sum_k \partial_k(v^j v^k)$, v désignant un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^d$ (ou sur $\mathbf{T}^d$), le scalaire p étant la pression. Il est bien connu que la condition de divergence nulle détermine la pression par la formule

$$-\Delta p=\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(v^j v^k). \tag{1}$$

Nous "oublierons" donc la pression dans toute la suite.

L'immense littérature consacrée à ce système a pour origine l'article de J. Leray publié en 1933 (voir [11]), où sont en particulier démontrés les résultats suivants.

Théorème 0.1 *Si v_0 appartient à L^2, il existe alors une solution v du système (NS_ν) dans l'espace $L^\infty(\mathbf{R}_+;L^2)\cap L^2(\mathbf{R}_+;H^1)$ telle que*

$$(IE)\qquad \|v(t)\|^2_{L^2}+2\nu\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}d\tau\leq\|v_0\|^2_{L^2}.$$

Si $d=2$, cette solution est unique, appartient de plus à $C(\mathbf{R}_+;L^2)$ et enfin vérifie

$$(E_2)\qquad \|v(t)\|^2_{L^2}+2\nu\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}d\tau=\|v_0\|^2_{L^2}.$$

Dorénavant, nous supposerons toujours la dimension d strictement supérieure à 2. L'un des problèmes posés par l'étude de ce système en trois dimensions d'espace consiste en la recherche des espaces aussi grands que possible de données intiales pour lesquels on pourra résoudre de manière unique localement en temps, ou bien globalement en temps si la norme dans ces espaces est suffisamment petite. C'est ce type de problème que nous allons étudier dans ce texte. Le travail fondateur dans ce domaine est le travail H. Fujita et T. Kato (voir [7]) où est démontré le théorème suivant.

Théorème 0.2 *Si v_0 appartient à l'espace $H^{\frac{d}{2}-1}$, il existe un unique réel strictement positif $T^\star$ tel qu'il existe une unique solution v dans l'espace*

$$C([0,T^\star[;H^{\frac{d}{2}-1})\cap\{u\,/\,t^{\frac14}u(t)\in C([0,T^\star[;H^{\frac{d-1}{2}})\}.$$

Il existe une constante c telle que, si $|v_0|_{\frac{d}{2}-1}\leq c\nu$, alors $T^\star=+\infty$.

Ici, comme dans toute la suite de ce texte, on a défini l'espace homogène H^s comme étant l'adhérence de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact pour la (semi)-norme

$$|u|_s\stackrel{\text{déf}}{=}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|\xi|^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac12}.$$

Remarquons que c'est bien une norme si $s<d/2$.

L'une des idées fondamentales de l'article de H. Fujita et T. Kato est le concept d'espace critique, c'est-à-dire d'espace invariant par changement d'échelle. Voici ce dont il s'agit; si v est une solution de (NS_ν) associée à une donnée initiale v_0, alors $v_\lambda(t,x)\stackrel{\text{déf}}{=}\lambda v(\lambda^2t,\lambda x)$ est solution de (NS_ν) pour la donnée initiale $v_{0,\lambda}(x)\stackrel{\text{déf}}{=}\lambda v(\lambda x)$. Un rapide calcul convaincra le lecteur que

$$|v_{0,\lambda}|_{\frac{d}{2}-1}=|v_0|_{\frac{d}{2}-1}.$$

Il est dès lors commode de définir le concept d'espace critique.

Définition 0.1 *On appelle espace critique tout espace invariant par le changement d'échelle $u(x)\mapsto\lambda u(\lambda x)$.*

Pour un développement sur cette définition, nous renvoyons le lecteur au livre de M. Cannonne (voir [2]). Il est tentant de rechercher des théorèmes analogues au théorème 0.2 pour des espaces critiques plus grands. En 1972, T. Kato démontre le théorème suivant.

Théorème 0.3 *Si v_0 appartient à L^d, alors il existe un unique réel strictement positif maximal $T^\star$ tel qu'il existe une unique solution de (NS_ν) dans l'espace*

$$C([0,T^\star[;L^d)\cap\{u\,/\,t^{\frac14}u(t)\in C([0,T^\star[;L^{2d})\}.$$

De plus, il existe une constante c ne dépendant que de d telle que l'on ait

$$\|v_0\|_{L^d}\leq c\nu\Longrightarrow T^\star=+\infty.$$

Remarquons que l'appartenance de la solution v à l'espace $\{u\,/\,t^{\frac14}u(t)\in C([0,T^\star[;L^{2d})\}$ est essentielle dans la démonstration de Kato de l'unicité. Nous allons nous attacher ici à généraliser ce type de résultat d'unicité, à la fois en prenant des espaces de données initiales plus grands et en relaxant la condition d'appartenance à des espaces du type $\{u\,/\,t^{\frac14}u(t)\in C([0,T^\star[;L^{2d})\}$, espace lié à l'effet régularisant de l'opérateur de la chaleur. Nous le ferons essentiellement grâce une hypothèse de type énergie sur la solution, nous inspirant du résultat remarquable suivant, démontré en 1985 par W. von Wahl dans [12].

Théorème 0.4 *Soit v_0 une donnée initiale dans l'espace $L^2\cap L^d$. On considère deux solutions de (NS_ν) vérifiant (IE) sur l'intervalle $[0,T]$. Si l'une d'elles appartient à $L^\infty([0,T];L^d)$, alors elles coïncident sur l'intervalle $[0,T]$.*

Dans le même esprit, citons un résultat récent d'I. Gallagher dans le cadre des conditions aux limites périodiques, voir [8].

Théorème 0.5 *Soit v_0 une donnée initiale dans $L^2(\mathbf{T}^2)$, alors toute solution de (NS_ν) sur $\mathbf{T}^3$ associée à cette donnée initiale et qui vérifie l'inégalité d'énergie (IE) est égale à la solution sur $\mathbf{T}^2$.*

Il convient de remarquer que, contrairement au théorème de Leray 0.1 et aux théorèmes 0.4 et 0.5 ci-dessus, les théorèmes de H. Fujita et T. Kato 0.2 et de T. Kato 0.3 n'utilisent pas la forme particulière du système de Navier-Stokes, mais sont vrais pour des système généraux de type "Navier-Stokes". Voici ce dont il s'agit. La formule (1) permet d'écrire le système (NS_ν) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v - \nu\Delta v & = & q(v,v) \\ v_{|t=0} & = & v_0 \end{array}\right.$$

avec

$$q(v,v) \stackrel{\text{déf}}{=} -\operatorname{div}(v\otimes v) + \sum_{j,k} \nabla\Delta^{-1}\partial_j\partial_k(v^j v^k).$$

Dans toute la suite, nous étudierons des systèmes généraux du type Navier-Stokes, c'est-à-dire les systèmes définis comme suit.

$$(NSG_\nu)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v - \nu\Delta v & = & Q(v,v) \\ v_{|t=0} & = & v_0 \end{array}\right.$$

où l'opérateur quadratique Q est la forme

$$Q(v,v) = \sum_{j,k} A_{j,k}(D)(v^j v^k),$$

les opérateurs $A_{j,k}$ étant des multiplicateurs de Fourier homogènes de degré 1, indéfiniment différentiable en dehors de l'origine, que l'on peut, sans perte de généralité aucune, supposer symétriques en (j,k).

Le lecteur épris de généralité pourra y voir un avantage, le lecteur familié avec le système de Navier-Stokes n'y verra qu'une incapacité à utiliser la forme particulière de ce système.

1 Énoncé des résultats

L'énoncé des théorèmes nouveaux de ce texte nécessite l'introduction des espaces de Besov. Introduisons pour les définir le découpage dyadique, base de la théorie de Littlewood-Paley. La proposition suivant est tout à fait classique, voir par exemple [3].

Proposition 1.1 *Désignons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon $3/4$ et de grand rayon $8/3$. Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $C_0^\infty(B(0,4/3))$ et à $C_0^\infty(\mathcal{C})$ telles que :*

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1, \tag{2}$$

$$|p-q|\geq 2 \Rightarrow \operatorname{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot)\cap \operatorname{Supp}\ \varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset, \tag{3}$$

$$q\geq 1 \Rightarrow \operatorname{Supp}\ \chi\cap \operatorname{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot) = \emptyset, \tag{4}$$

si $\widetilde{\mathcal{C}} = B(0,2/3)+\mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$|p-q|\geq 5 \Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}}\cap 2^q\mathcal{C} = \emptyset, \tag{5}$$

Notations

$$h = \mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et} \quad \widetilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi,$$
$$\Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u = 2^{qd}\int h(2^q y)u(x-y)dy,$$
$$S_q u = \sum_{p\leq q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u = \int \widetilde{h}(2^q y)u(x-y)dy.$$

Commençons par définir les espaces de Besov inhomonogènes.

Définition 1.1 *Soit s un nombre réel et p et r deux éléments de $[1,\infty]$. L'espace de Besov $\widetilde{B}^s_{p,r}$ est l'adhérence des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'espace des distributions tempérées pour la norme $\|\cdot\|_{B^s_{p,r}}$ définie par*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\|(2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p})_{q\in\ell^r(\mathbf{N}^\star)}\right\|_{\ell^r(\mathbf{N}^\star)} + \|S_0 u\|_{L^p} < +\infty.$$

Remarque L'espace $\widetilde{B}^s_{p,\infty}$ est l'espace des distributions tempérées telles que

$$S_0 u \in L^p \quad \text{et} \quad \lim_{q\to+\infty} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} = 0.$$

Définissons maintenant les espaces de Besov homogènes.

Définition 1.2 *Soit s un nombre réel, p et r deux éléments de $[1,+\infty]$. On pose*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\|(2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p})_{q\in\mathbf{Z}}\right\|_{\ell^r(\mathbf{N})}.$$

Lorsque $s < d/p$, la quantité ci-dessus est une norme, ce qui autorise la définition suivante.

Définition 1.3 *Soient (s,p,r) un triplet comme dans la définition 1.2 ci-dessus. Si s est srictement supérieur à d/p, on définit l'espace $B^s_{p,r}$ comme étant l'adhérence dans $\mathcal{S}'$ des fonctions régulières pour la norme $\|\cdot\|_{B^s_{p,r}}$ définie ci-dessus.*

Remarques

Lorsque $r=\infty$, l'espace $B^s_{p,\infty}$ ci-dessus ne coïncide pas avec l'espace des distributions tempérées u telles que

$$\sup_{q\in\mathbf{Z}} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} < \infty.$$

C'est l'espace des distributions tempérées telles que

$$\sup_{q\in\mathbf{Z}} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{q\to+\infty} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} = 0.$$

Lorsque $s = \dfrac{d}{p} - 1$, l'espace $B^s_{p,r}$ est invariant par changement d'échelle et la norme par tout changement d'échelle discrétisé, c'est-à-dire du type $\lambda = 2^p$.

Enfin, il est à noter que, lorsque s est strictement positif, l'espace $\widetilde{B}^s_{p,r}$ est continûment inclus dans $B^s_{p,r}$ alors que, si s est négatif ou nul, c'est l'espace $B^s_{p,r}$ qui est continûment inclus dans $\widetilde{B}^s_{p,r}$.

Notations On désignera par B_p (resp. $\widetilde{B}_p$) l'espace $B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}$ (resp. $\widetilde{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}$) et lorsque $p=\infty$, on désignera par C^{-1} (resp. $\widetilde{C}^{-1}$) l'espace $B^{-1}_{\infty,\infty}$ (resp. $\widetilde{B}^{-1}_{\infty,\infty}$).

Remarque Les espaces B_p et $\widetilde{B}_p$ forment deux familles strictement croissante (en p) d'espaces. La pertinence de leur choix comme espace de données initiales est mise en évidence par les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.1 *Soit $p<d$, on considère une donnée intiale v_0 appartenant à B_p; il existe alors un unique $T^\star$ maximal tel qu'il existe une unique solution v de (NSG_ν) dans l'espace $C([0,T^\star[;B_p)$.*

Théorème 1.2 *Soit p un réel supérieur ou égal à d, on considère une donnée initiale appartenant à l'espace $\widetilde{B}_p$. Il existe un réel strictement positif T tel qu'il existe une unique solution dans l'espace affine $v_L+X_{p,T}$ où $X_{p,T}$ est l'adhérence des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'espace des distributions tempérées pour la norme*

$$\|u\|_{X_{p,T}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{q\in\mathbf{Z}}\Big(2^{q(-1+\frac{d}{p})}\|\Delta_q u\|_{L^\infty_T(L^p)}+\nu 2^{q(1+\frac{d}{p})}\|\Delta_q u\|_{L^1_T(L^p)}\Big).$$

Dans le cas où $p<d$, l'unicité est obtenue sans qu'il soit nécessaire de faire d'autre hypothèse sur la régularité sur la solution, ce qui n'est a priori pas le cas lorsque $p\geq d$. Les théorèmes d'unicité concerne des solutions qui, outre leur continuité en temps à valeurs B_p, sont dans "l'espace d'énergie" $L^2([0,T];H^1)$. Une hypothèse de ce type est impérative pour que les produits $v^j v^k$ aient un sens.

Théorème 1.3 *Soit p un réel supérieur ou égal à d, on considère une donnée initiale v_0 appartenant à $\widetilde{B}_p\cap L^2$. Il existe au plus une solution de (NSG_ν) dans l'espace*

$$C([0,T];\widetilde{B}_p)\cap L^2([0,T];H^1).$$

Nous allons maintenant supposer que $d=3$. Nous aurons alors le théorème suivant.

Théorème 1.4 *Soit p un réel supérieur ou égal à d, on considère une donnée initiale v_0 appartenant à $\widetilde{B}_p\cap L^2$. Il existe au plus une solution de (NSG_ν) dans l'espace*

$$C([0,T];\widetilde{C}^{-1})\cap L^2([0,T],H^1).$$

Remarque Le fait de devoir supposer que la donnée initiale appartient à $\widetilde{B}_p$ avec p réel n'épuise pas l'ensemble des espaces de données initiales possibles pour lesquelles l'existence et l'unicité sont connues (voir les travaux [9] de D. Iftimie).

2 Espaces de Besov et effet régularisant dans l'équation de la chaleur.

On peut mesurer de deux manières l'effet régularisant de l'équation de la chaleur. Tout d'abord, on peut observer que, si $u(t)$ désigne la solution de

$$(EC)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t u-\nu\Delta u &=& 0\\ u_{|t=0} &=& u_0,\end{array}\right.$$

alors la fonction $t^k u(t)$ est d'autant plus régulière que k est grand. C'est l'idée exploitée par H. Fujita et T. Kato et par tous les travaux inspirés par leur article.

Comme dans notre article en collaboration avec N. Lerner (voir [6]), nous utiliserons ici un autre effet régularisant, l'effet de moyenne en temps.

Définition 2.1 *Soient* $(\rho, p, r) \in [1, +\infty]$ *et* s *un réel, on définit alors la famille de semi-normes suivantes*

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_{p,r})} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left\| \left(2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^{\rho}_T(L^p)} \right)_{q \in \mathbf{Z}} \right\|_{\ell^r(\mathbf{Z})} \quad \textit{et} \\
\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\widetilde{B}^s_{p,r})} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left\| \left(2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^{\rho}_T(L^p)} \right)_{q \in \mathbf{N}^\star} \right\|_{\ell^r(\mathbf{N}^\star)} + \|S_0 u\|_{L^{\rho}_T(L^p)}.
\end{aligned}
$$

Remarque Les fonctionnelles $\|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\widetilde{B}^s_{p,r})}$ sont des normes, mais les semi-normes $\|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_{p,r})}$ ne sont des normes que si $s < d/p$; on définit alors les espaces $\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_{p,r})$ et $\widetilde{L}^{\rho}_T(\widetilde{B}^s_{p,r})$ comme suit.

Définition 2.2 *Soient* $(\rho, p, r) \in [1, +\infty]$ *et* s *un réel, on définit* $\widetilde{L}^{\rho}_T(\widetilde{B}^s_{p,r})$ *(resp.* $\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_{p,r})$ *si* $s < d/p$*) comme étant l'adhérence dans les distributions tempérées des fonctions indéfiniment différentiables à support compact pour la norme*

$$
\|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\widetilde{B}^s_{p,r})} \ (\textit{resp.}\ \|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_{p,r})}).
$$

Tous les effets régularisants sont basés sur le classique lemme suivant, démontré par exemple dans [4].

Lemme 2.1 *Il existe une constante* c *telle que, pour tout entier* q *et tout réel positif* λ*, on ait*

$$
\|\Delta_q e^{\lambda \Delta} u\|_{L^p} \leq \frac{1}{c} e^{-c\lambda 2^{2q}} \|\Delta_q u\|_{L^p}.
$$

Du lemme ci-dessus, on déduit immédiatement la proposition ci-dessous.

Proposition 2.1 *Il existe une constante* C *telle que*

$$
\|e^{\nu t \Delta} u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})} \leq \frac{C}{\nu} \|u_0\|_{B^s_{p,r}}.
$$

En outre, si u_0 *appartient à* $B^s_{p,r}$ *et si* ρ *est réel, alors*

$$
\lim_{T \to 0} \|e^{\nu t \Delta} u_0\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})} = 0.
$$

De plus, si u *est solution de*

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \nu \Delta u &=& f \\ u_{|t=0} &=& 0, \end{array} \right.
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{s+2\alpha}_p)} &\leq \frac{C}{\nu^{\alpha}} T^{1-\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_p)} \quad \textit{et} \\
\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T\left(B_p^{s+2\left(1+\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)}\right)} &\leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^s_p)} \quad \textit{pour} \quad \rho_1 \geq \rho_2.
\end{aligned}
$$

Enfin, si f *appartient à* $\widetilde{L}^{\rho}_T(B^s_p)$*, si* u_0 *appartient à* $B_p^{s+2\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}$*, et si* u *est solution de*

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \nu \Delta u &=& f \\ u_{|t=0} &=& u_0, \end{array} \right.
$$

alors u *appartient à* $C([0,T]; B_p^{s+2\left(1-\frac{1}{\rho}\right)})$.

3 Estimations de produit

Les estimations de produit utiliseés ici sont basés sur un découpage suivant les tailles relatives des fréquences de a et de b. Ce découpage est une version appauvrie du paraproduit introduit par J.-M. Bony dans [1]. Les démonstrations de ces inégalités reposent sur des techniques standard de calcul paradifférentiel. La seule originalité de la démonstration tient au fait que l'on prend les normes en temps *avant* le supremum en q. Nous omettons les preuves. Le lecteur intéressé pourra consulter [5]. On pose

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(a,b) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\geq 0} Q(S_q a, \Delta_q b)\,,\quad \widetilde{\mathcal{Q}}'(a,b) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\geq 0} Q(S_{q+1} a, \Delta_q b) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_0(a,b) \stackrel{\text{déf}}{=} Q(S_0 a, S_0 b).$$

Il est clair que l'on a

$$Q(a,b) = \mathcal{Q}(a,b) + \mathcal{Q}'(b,a) = \widetilde{\mathcal{Q}}(a,b) + \widetilde{\mathcal{Q}}'(b,a) + \widetilde{\mathcal{Q}}_0(a,b).$$

Tous les résultats démontrés sur Q se déduisent du lemme suivant.

Lemme 3.1 *Soient (p,p_1,p_2) et (ρ,ρ_1,ρ_2) deux triplets de réels tels que*

$$p \geq \max\{p_1,p_2\}\,,\quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}\cdot$$

On considère deux réels s_1 et s_2 tels que s_1+s_2 soit strictement positif. On pose

$$s_{1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} s_1+s_2-d\Big(\frac{1}{p_{1,2}}-\frac{1}{p}\Big) \quad \textit{avec} \quad p_{1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p_1p_2}{p_1+p_2}\cdot$$

Si $s_{1,2}$ est positif et s_1 strictement négatif, on a

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}(w,w')\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^{s_{1,2}-1}_p)} \leq C\|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p_1})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}\cdot \tag{6}$$

De plus, pour tout couple $(\rho,s)\in[1,+\infty]\times]0,+\infty[$, il existe une constante C telle que, pour tout réel p supérieur ou égal à 1, on ait

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}(a,b)\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^{s-1}_p)} \leq C\|a\|_{L^\infty_T}\|b\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_p)} \tag{7}$$

les mêmes estimations étant naturellement vraies pour les opérateurs $\mathcal{Q}'$ et $\widetilde{\mathcal{Q}}'$. Enfin, pour tout réel $s\geq -1$, pour tout $p\in]1,+\infty[$, et pour tout couple de réels (s_1,s_2), il existe une constante C telle que

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}_0(a,b)\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_p)} \leq C\|a\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})}\|b\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}\cdot \tag{8}$$

Du lemme 3.1, nous peut aisément déduire la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soient (p,p_1,p_2) et (ρ,ρ_1,ρ_2) deux triplets de réels tels que*

$$p \geq \max\{p_1,p_2\} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}\cdot$$

On considère deux réels s_1 et s_2 tels que s_1+s_2 soit strictement positif. En posant

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} s_1+s_2-d\Big(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}\Big),$$

on a les inégalités suivantes.

Si $s_j < \dfrac{d}{p_j}$, *alors*

$$\|Q(w,w')\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{\sigma-1}_p)} \leq C\|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}. \tag{9}$$

Si $s_1 < 0$ *et si* $s_2 < \dfrac{d}{p_2}$, *alors*

$$\|Q(w,w')\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{\sigma-1}_p)} \leq C\|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p_1})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}. \tag{10}$$

Si $s_1 < \dfrac{d}{p_1}$, *alors*

$$\|Q(w,w')\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{\sigma-1}_p)} \leq C(\|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})} + \|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})}). \tag{11}$$

Si $s_1 < 0$, *alors*

$$\|Q(w,w')\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{\sigma-1}_p)} \leq C(\|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p_1})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})} + \|w\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}\|w'\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p_1})}). \tag{12}$$

4 Les théorèmes d'existence et d'unicité locales.

Le but de cette section est la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2. Commençons par le cas plus simple où $p < d$. On recherche la solution sous la forme

$$v = v_L + w$$

où v_L désigne, comme dans toute la suite du texte, la solution libre de l'équation de la chaleur. Le système (NSG_ν) s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w - \nu\Delta w & = & Q(w,w) + 2Q(v_L,w) + Q(v_L,v_L) \\ w_{|t=0} & = & 0. \end{array}\right.$$

La donnée initiale apparaît alors au travers d'un terme de force extérieure, le terme $Q(v_L,v_L)$, et d'un terme linéaire en w, le terme $Q(v_L,w)$. On résout alors par une méthode itérative classique. Définissons la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w_{n+1} - \nu\Delta w_{n+1} & = & Q(w_n,w_n) + 2Q(v_L,w_n) + Q(v_L,v_L) \\ w_{n+1|t=0} & = & 0, \end{array}\right.$$

avec $w_0 = 0$. Dans un premier temps, nous allons démontrer que, pour T assez petit, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $C([0,T],B_p)$, puis qu'elle est de Cauchy dans ce même espace.

D'après l'inégalité (9) de la proposition 3.1, on a

$$\|Q(w_n,w_n)\|_{L^\infty_T(B^{\frac{d}{p}-3}_p)} \leq C\|w_n\|^2_{L^\infty_T(B_p)} \tag{13}$$

$$\|Q(v_L,w_n)\|_{\widetilde{L}^4_T(B^{\frac{d}{p}-\frac{5}{2}}_p)} \leq C\|v_L\|_{\widetilde{L}^4_T(B^{\frac{d}{p}-\frac{1}{2}}_p)}\|w_n\|_{L^\infty_T(B_p)} \quad \text{et} \tag{14}$$

$$\|Q(v_L,v_L)\|_{\widetilde{L}^2_T(B^{\frac{d}{p}-2}_p)} \leq C\|v_L\|^2_{\widetilde{L}^4_T(B^{\frac{d}{p}-\frac{1}{2}}_p)}. \tag{15}$$

En appliquant la proposition 2.1, on trouve que

$$\|w_{n+1}\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq C\left(\|w_n\|_{L^\infty_T(B_p)} + \|v_L\|_{\widetilde{L}^4_T(B_p^{\frac{d}{p}-\frac{1}{2}})}\right)^2. \tag{16}$$

Soit η un réel strictement positif quelconque; d'après le proposition 2.1, on peut choisir T tel que

$$\|v_L\|_{\widetilde{L}^4_T(B_p^{\frac{d}{p}-\frac{1}{2}})} \leq \eta. \tag{17}$$

Il vient alors, par définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ que

$$\|w_1\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq (C\eta)\eta.$$

Supposons que $4C\eta \leq 1$ et faisons l'hypothèse de récurrence que

$$\forall k \leq n\,,\ \|w_k\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq \eta.$$

D'après l'inégalité (16), il vient

$$\|w_{n+1}\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq (4C\eta)\eta.$$

Ainsi donc, pour tout η, il existe un réel T strictement positif tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ \|w_n\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq \eta.$$

Démontrons maintenant que l'on peut choisir T tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit de Cauchy dans $C([0,T],B_p)$. Par différence, on a, en posant $\delta w_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} w_{n+1} - w_n$,

$$\partial_t \delta w_{n+1} - \nu\Delta\delta w_n = 2Q(v_L,\delta w_n) + Q(w_n + w_{n-1},\delta w_n).$$

En utilisant à nouveau l'inégalité (9) de la proposition 3.1, il vient

$$\begin{aligned}
\|Q(v_L,\delta w_n)\|_{\widetilde{L}^4_T(B_p^{\frac{d}{p}-\frac{5}{2}})} &\leq C\|v_L\|_{\widetilde{L}^4_T(B_p^{\frac{d}{p}-\frac{1}{2}})}\|\delta w_n\|_{L^\infty_T(B_p)} \quad \text{et}\\
\|Q(w_n + w_{n-1},\delta w_n)\|_{L^\infty_T(B_p^{\frac{d}{p}-3})} &\leq C\Big(\|w_n\|_{L^\infty_T(B_p)} + \|w_{n-1}\|_{L^\infty_T(B_p)}\Big)\|\delta w_n\|_{L^\infty_T(B_p)}.
\end{aligned}$$

Sous la condition (17), il vient alors

$$\|\delta w_{n+1}\|_{L^\infty_T(B_p^{\frac{d}{p}-1})} \leq 4C\eta\|\delta w_n\|_{L^\infty_T(B_p^{\frac{d}{p}-1})}.$$

En choisissant η tel que $8C\eta \leq 1$, on démontre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $C([0,T];B_p)$, le fait que la limite, additionnée à v_L soit solution de (NSG_ν) est trivial.

L'unicité résulte d'un raisonnement du même type. Soient w_1 et w_2 deux fonctions de l'espace $C([0,T];B_p)$ telles que $v_L + w_j$ soit solution de (NSG_ν). En posant $\delta w \stackrel{\text{déf}}{=} w_2 - w_1$, il vient par différence,

$$\partial_t \delta w - \nu\Delta\delta w = 2Q(v_L,\delta w) + Q(w_1 + w_2,\delta w).$$

Les solutions considérées appartenant à $C([0,T];B_p)$, pour tout réel strictement positif η, il existe un réel strictement positif T tel que

$$\|w_1\|_{L^\infty_T(B_p)} + \|w_2\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq \eta.$$

On peut choisir T tel que l'inégalité (17) soit vérifiée; d'où il vient

$$\|\delta w\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq C\eta \|\delta w\|_{L^\infty_T(B_p)}.$$

Il suffit alors de choisir η assez petit pour achever la démonstration du théorème 1.1.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.2, c'est-à-dire étudier le cas où la donnée initiale n'est pas nécessairement une fonction de carré localement intégrable, ce qui impose d'utiliser l'effet régularisant de l'équation de la chaleur. Comme précédemment, on utilise un schéma itératif des plus standards, à savoir

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w_{n+1} - \nu\Delta w_{n+1} & = & Q(w_n, w_n) + 2Q(v_L, w_n) + Q(v_L, v_L) \\ w_{n+1|t=0} & = & 0 \end{array}\right. \tag{18}$$

avec $w_0 = 0$. Comme lors de la démonstration précedente, nous allons démontrer dans un premier temps que, pour T assez petit, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $X_{p,T}$, puis qu'elle est de Cauchy dans ce même espace.

D'après l'inégalité (12) de la proposition 3.1 et la proposition 2.1, on obtient

$$\|Q(v_L, v_L)\|_{\widetilde{L}^1_T(B_p^{\frac{d}{p}-1})} \leq \frac{\eta}{4C}. \tag{19}$$

On applique alors la proposition 2.1 qui implique alors que

$$\|w_1\|_{\widetilde{L}^1_T(B_p^{\frac{d}{p}+1})} \leq \frac{\eta}{2\nu} \quad \text{et} \quad \|w_1\|_{L^\infty_T(B_p)} \leq \frac{\eta}{2},$$

ce qui s'écrit, vu la définition de la norme sur $X_{p,T}$,

$$\|w_1\|_{X_{p,T}} \leq \eta. \tag{20}$$

Supposons maintenant que, pour tout η strictement positif, il existe un réel strictement positif T vérifiant (19) et tel que, pour tout entier $k \leq n$, on ait $\|w_k\|_{X_{p,T}} \leq \eta$.

Des applications répétées des propositions 2.1 et 3.1 combinées avec l'inégalité (19) impliquent que, pour T assez petit, on a

$$\begin{array}{rcl} \|w_{n+1}\|_{X_{p,T}} & \leq & \dfrac{\eta}{2} + \dfrac{C}{\nu}\|w_n\|_{X_{p,T}} + (\mathcal{V}_{0,N}(T) + \|w_n\|_{X_{p,T}}) \quad \text{avec} \\ \mathcal{V}_{0,N}(T) & \stackrel{\text{déf}}{=} & (\nu T)^{\frac{1}{2}}\|S_N v_0\|_{L^\infty_T}(1 + C_N\nu T) + \|(\mathrm{Id} - S_N)v_0\|_{B_p}. \end{array}$$

De plus, comme v_0 appartient à $\widetilde{B}_p$, on peut, par définition de $\widetilde{B}_p$, choisir N tel que l'on ait

$$\|(\mathrm{Id} - S_N)v_0\|_{B_p} \leq \frac{\nu}{8C}.$$

Une fois choisi cet entier N, on impose sur T la condition

$$(\nu T)^{\frac{1}{2}}\|S_N v_0\|_{L^\infty_T}(1 + C_N\nu T) \leq \frac{\nu}{8C}.$$

Ainsi donc, on peut choisir un entier N puis un réel T, *ne dépendant tous deux que de la donnée intiale* v_0, tels que

$$\mathcal{V}_{0,N}(T) \leq \frac{\nu}{4C}. \tag{21}$$

En supposant que $\eta \leq \dfrac{\nu}{4C}$, il vient, grâce à l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\|w_{n+1}\|_{X_{p,T}} &\leq \frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}\|w_n\|_{X_{p,T}}\\ &\leq \eta. \end{aligned} \tag{22}$$

Démontrons maintenant que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $X_{p,T}$. En effet, par définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il vient, comme précedemment,

$$\|w_{n+1}-w_n\|_{X_{p,T}} \leq \frac{C}{\nu}(\|w_{n+1}\|_{X_{p,T}}+\|w_n\|_{X_{p,T}}+\mathcal{V}_{0,N}(T))\|w_n-w_{n-1}\|_{X_{p,T}}.$$

D'où le théorème en appliquant l'inégalité (21) et en choisissant η assez petit dans l'inégalité (22).

La démonstration de l'unicité est bien évidemment tout à fait semblable. Soient w et $\widetilde{w}$ deux solutions de (NSG_ν) appartenant à $v_L+X_{p,T}$, alors on a, en posant $\delta w \stackrel{\text{déf}}{=} w-\widetilde{w}$, il vient, comme ci-dessus,

$$\|\delta w\|_{X_{p,T}} \leq \frac{C}{\nu}(\|w\|_{X_{p,T}}+\|\widetilde{w}\|_{X_{p,T}}+\mathcal{V}_{0,N}(T))\|\delta w\|_{X_{p,T}}.$$

Par définition des espaces B_p et $X_{p,T}$, on peut choisir T tel que $\|w\|_{X_{p,T}}+\|\widetilde{w}\|_{X_{p,T}}$ soit arbitrairement petit. D'où l'unicité en utilisant l'inégalité (21) pour η assez petit.

5 Démonstration des théorèmes d'unicité

Ces deux théorèmes d'unicité vont résulter d'une part d'un théorème d'unicité plus général qui contient le théorème 1.3 et qui, modulo le lemme 5.1 qui décrit un effet régularisant propre à la dimension trois, contient aussi le théorème 1.4. Énonçons ce théorème.

Théorème 5.1 *Soient $p_0\in[1,+\infty[$, $(\rho_1,p,p_1)\in[1,+\infty]^2$ et s_1 un réel vérifiant*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\leq 1\,,\quad p\geq p_0\,,\quad s_1<\frac{d}{p_1}\quad \textit{et}\quad s_1\geq 1\quad \textit{si}\quad p<+\infty\,,\quad s_1>1\quad \textit{sinon.}$$

On considère un élément v_0 de $\widetilde{B}_{p_0}\cap\widetilde{B}_{p_1}^{s_1-\frac{2}{\rho_1}}$. Il existe au plus une solution de (NSG_ν) associée à la donnée initale v_0 dans l'espace

$$C([0,T];\widetilde{B}_p)\cap\widetilde{L}_T^{\rho}(B_{p_1}^{s_1}).$$

Le fait que le théorème ci-dessus contienne le théorème 1.3 est immédiat une fois remarqué que

$$L^2([0,T],H^1)=\widetilde{L}_T^2(B_{2,2}^1)\subset\widetilde{L}_T^2(B_2^1).$$

Les hypothèses du théorème 1.4 ne permettent pas d'appliquer directement le théorème ci-dessus car $p=+\infty$ et $s_1=1$. Mais, on a le lemme suivant.

Lemme 5.1 *Supposons que la dimension d'espace d soit 3. Alors, si la donnée initiale v_0 appartient à $\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}$ et v est une solution de (NSG_ν) appartenant à $L^2([0,T];H^1)$, alors v appartient à $\widetilde{L}_T^1(\widetilde{H}^{\frac{3}{2}})=\widetilde{L}_T^1(\widetilde{B}_{2,2}^{\frac{3}{2}})$.*

Admettons ce lemme un instant. Soit v une solution vérifiant les hypothèses du théorème 1.4; d'après le lemme 5.1, on peut appliquer le théorème 5.1 avec

$$p=+\infty\,,\ p_1=2\,,\ s_1=\frac{3}{2}-\epsilon\quad\text{et}\quad\rho=1.$$

Démontrons maintenant le lemme 5.1 ci-dessus. Pour ce faire, appliquons l'opérateur Δ_q au système (NSG_ν). Les lois de produit dans les espaces de Sobolev implique que $Q(v,v)$ appartient à $L^1_T(\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}})$. On peut écrire que

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_q v(t)\|^2_{L^2}+c\nu 2^{2q}\|\Delta_q v(t)\|^2_{L^2}\leq C2^{\frac{q}{2}}c_q(t)|v(t)|^2_{H^1}\|\Delta_q v(t)\|_{L^2}\quad\text{avec}\quad\sum_q c_q(t)^2=1.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\|\Delta_q v(t)\|_{L^2}\leq\|\Delta_q v_0\|_{L^2}e^{-c\nu 2^{2q}t}+C2^{\frac{q}{2}}\int_0^t e^{-c\nu 2^{2q}(t-\tau)}c_q(\tau)|v(\tau)|^2_{H^1}d\tau.$$

En prenant la norme L^1 en temps de cette inégalité, il vient

$$\|\Delta_q v(t)\|_{L^1_T(L^2)}\leq\frac{C}{\nu}2^{-2q}\|\Delta_q v_0\|_{L^2}+\frac{C}{\nu}\|v\|_{L^2_T(H^1)}\left(\int_0^T c_q^2(\tau)|v(\tau)|^2_{H^1}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant par $2^{\frac{3}{2}q}$, en élevant au carré, puis en sommant pour q positif, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{q\geq 0}2^{3q}\|\Delta_q v(t)\|^2_{L^1_T(L^2)}&\leq\frac{C}{\nu}\sum_{q\geq 0}2^{-q}\|\Delta_q v_0\|^2_{L^2}+\frac{C}{\nu}\|v\|^2_{L^2_T(H^1)}\sum_{q\geq 0}\int_0^T c_q^2(\tau)|v(\tau)|^2_{H^1}d\tau\\&\leq\frac{C}{\nu}|v_0|^2_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}}+\frac{C}{\nu}\|v\|^4_{L^2_T(H^1)}.\end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'opérateur S_0 au système (NSG_ν). Comme v appartient à $L^2_T(H^1)$, on a

$$\partial_t S_0\in L^2_T(L^2)+L^1_T(L^2).$$

Comme S_0v_0 appartient à L^2, il en résulte immédiatement que S_0v appartient à $L^1_T(L^2)$. D'où le lemme.

Pour démontrer le théorème 5.1, nous allons en fait démontrer un théorème de régularité qui va affirmer que toute solution de (NSG_ν) vérifiant les hypothèses du théorème 5.1 est en fait beaucoup plus régulière. Plus précisement, on a le théorème suivant.

Théorème 5.2 *Soient $p_0\in[1,+\infty[$, $(\rho_1,p,p_1)\in[1,+\infty]^2$ et s_1 un réel vérifiant*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\leq 1\,,\quad p\geq p_0\,,\quad s_1<\frac{d}{p_1}\quad\text{et}\quad s_1\geq 1\quad\text{si}\quad p<+\infty\,,\quad s_1>1\quad\text{sinon.}$$

On considère un élément v_0 de $B_{p_0}\cap\widetilde{B}_{p_1}^{s_1-\frac{2}{\rho_1}}$ et l'on suppose qu'il existe une solution de (NSG_ν) associée à la donnée initale v_0 dans l'espace

$$C([0,T];\widetilde{B}_p)\cap\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1}).$$

Alors la solution v appartient à $v_L+X_{p_0,T}$.

Ce théorème va bien sûr entraîner l'unicité puisque, d'après le théorème 1.2, les solutions sont uniques dans l'espace $v_L + X_{p_0,T}$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder à une "paralinéarisation" de l'équation en utilisant les opérateurs $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{Q}'$ définis au début de la section 3. Soit v une solution de (NSG_ν) vérifiant les hypothèses du théorème 5.2, on peut écrire, en posant $w \stackrel{\text{déf}}{=} v - v_L$

$$\begin{aligned}
\partial_t v - \nu\Delta v &= Q(v,v)\\
&= \widetilde{Q}(v,v) + \widetilde{Q}'(v,v) + \widetilde{Q}_0(v,v)\\
&= \widetilde{Q}(v,w) + \widetilde{Q}'(v,w) + \widetilde{Q}(v,v_L) + \widetilde{Q}'(v,v_L) + \widetilde{Q}_0(v,v).
\end{aligned}$$

Ainsi donc, comme v_L est solution libre de l'équation de la chaleur, on a

$$(PLNSG_\nu)\left\{\begin{aligned} \partial_t w - \nu\Delta w &= \widetilde{Q}(v,w) + \widetilde{Q}'(v,w) + f_v\\ w_{|t=0} &= 0\end{aligned}\right.$$

$$\text{avec} \quad f_v \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{Q}(v,v_L) + \widetilde{Q}'(v,v_L) + \widetilde{Q}_0(v,v). \tag{23}$$

Le théorème de régularité 5.2 va alors résulter d'un théorème d'existence et d'unicité sur le système *linéaire* $(PLNSG_\nu)$.

Lemme 5.2 *Soient $(\rho_1,\rho_2) \in [1,+\infty]$, $(p,p_1,p_2) \in [1,+\infty]$ et $(s_1,s_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} \leq 1\,, \quad p \geq p_0\,, \quad s_1 < \frac{d}{p_1} \quad \textit{et} \quad s_j \geq 1 \quad \textit{si} \quad p < +\infty\,, \quad s_j > 1 \quad \textit{sinon.}$$

On se donne une fonction v appartenant à $C([0,T],\widetilde{B}_p)$. Pour toute distribution f appartenant à l'espace $\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1-2}_{p_1}) \cap \widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2-2}_{p_2})$, il existe une unique solution w de

$$(PLNSG_\nu)\left\{\begin{aligned} \partial_t w - \nu\Delta w &= \widetilde{Q}(v,w) + \widetilde{Q}'(v,w) + f\\ w_{|t=0} &= 0\end{aligned}\right.$$

dans $\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1}) \cap \widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})$. De plus, cette solution appartient à $C([0,T];B^{s_1-\frac{2}{\rho_1}}_{p_1} \cap B^{s_2-\frac{2}{\rho_2}}_{p_2})$.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons montrer pourquoi il implique le théorème de régularité 5.2. Comme v_0 appartient à $\widetilde{B}^{s_1-\frac{2}{\rho_1}}_{p_1}$, v_L appartient à $L^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p_1})$. Donc, d'après l'estimation (6), on a, vu que v_0 appartient à $\widetilde{B}_{p_0}$,

$$\widetilde{Q}(v,v_L) + \widetilde{Q}'(v,v_L) \in \widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1-2}_{p_1}) \cap \widetilde{L}^1_T(B^{-1+\frac{d}{p_0}}_{p_0})$$

Donc, d'après l'inégalité (8), on a

$$f_v \in \widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1-2}_{p_1}) \cap \widetilde{L}^1_T(B^{-1+\frac{d}{p_0}}_{p_0}). \tag{24}$$

Or, $v - v_L$ est une solution $L^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})$ de $(PLNSG_\nu)$. Le lemme 5.2 ci-dessus nous dit donc

$$v - v_L \in L^{\rho_1}_T(B^{s_1-2}_{p_1}) \cap L^1_T(B^{1+\frac{d}{p_0}}_{p_0}) \cap C([0,T];B^{s_1-\frac{2}{\rho_1}}_{p_1} \cap B_{p_0}).$$

Donc en particulier que v appartient à $v_L + X_{p_0,T}$. D'où le théorème 5.2.

6 Étude de l'équation paralinéarisée

Il s'agit bien sûr de démontrer le lemme 5.2. Étant donné une distribution f dans $\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B_{p_1}^{s_1-\frac{2}{\rho_1}})\cap \widetilde{L}^{\rho_2}_T(B_{p_2}^{s_2-\frac{2}{\rho_2}})$, on définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $w_0=0$ et w_{n+1} solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w_{n+1}-\nu\Delta w_{n+1} & = & \widetilde{\mathcal{Q}}(v,w_n)+\widetilde{\mathcal{Q}}'(v,w_n)+f_v \\ w_{n+1|t=0} & = & 0. \end{array}\right.$$

Nous allons démontrer que cette suite est de Cauchy dans l'espace E défini comme étant l'adhérence des fonctions indéfiniment différentiables à support compact pour la norme

$$\|\cdot\|_E \stackrel{\text{déf}}{=} \|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p_1})}+\|\cdot\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p_2})}.$$

Que cette formule de récurrence définisse une suite dans l'espace E est immédiat, vu (24) et la proposition 2.1. Pour absorber les termes "d'ordre 1" qui apparaîtront plus tard, nous allons conjuger par l'exponantielle. Posons $w_{\lambda,n}(t)\stackrel{\text{déf}}{=}e^{-\lambda t}w_n(t)$, où λ est un paramètre strictement positif. Nous allons démontrer que, pour λ choisi suffisamment grand, la suite $(w_{\lambda,n})_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans E. En effet, la suite $(w_{\lambda,n})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie l'équation suivante.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w_{\lambda,n+1}-\nu(\Delta-\lambda) w_{n+1} & = & \widetilde{\mathcal{Q}}(v,w_{\lambda,n})+\widetilde{\mathcal{Q}}'(v,w_{\lambda,n})+f_v \\ w_{\lambda,n+1|t=0} & = & 0. \end{array}\right.$$

Par différence, on trouve, en utilisant la formule de Duhamel et le lemme 2.1 que

$$\|\Delta_q\delta_{\lambda,n+1}\|_{L^p}\leq\int_0^t e^{-c(2^{2q}+\lambda)(t-\tau)}\left(\|\Delta_q\widetilde{\mathcal{Q}}(v(\tau),\delta_{\lambda,n}(\tau))\|_{L^p}+\|\Delta_q\widetilde{\mathcal{Q}}'(v(\tau),\delta_{\lambda,n}(\tau))\|_{L^p}\right)d\tau.$$

Décomposons v suivant ses hautes et basses fréquences grâce au lemme suivant, admis.

Lemme 6.1 *Soit $p\in[1,+\infty]$; on considère une partie compacte K de l'espace $\widetilde{B}^s_p$. Pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un entier N tel que*

$$\sup_{\substack{q\geq N\\ a\in K}} 2^{qs}\|\Delta_q a\|_{L^\infty_T(L^p)}\leq\epsilon.$$

Comme v est continue à valeurs B_p, il existe un entier N tel que l'on ait

$$\|(\mathrm{Id}-S_N)v\|_{L^\infty_T(C^{-1})}\leq c\nu. \tag{25}$$

D'après les inégalités (6) et (7), on a

$$\begin{array}{rcl} \|\Delta_q\widetilde{\mathcal{Q}}((\mathrm{Id}-S_N)v(\tau),\delta_{\lambda,n}(\tau))\|_{L^{\rho_j}_T(L^{p_j})} & \leq & Cc\nu 2^{-q(s_j-2)}\|\delta_{\lambda,n}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})} \quad \text{et} \\ \|\Delta_q\widetilde{\mathcal{Q}}(S_N v(\tau),\delta_{\lambda,n}(\tau))\|_{L^{\rho_j}_T(L^{p_j})} & \leq & C2^{-q(s_j-1)}\|S_N v\|_{L^\infty_T}\|\delta_{\lambda,n}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})}, \end{array}$$

les mêmes estimations étant bien sûr vraies pour $\widetilde{\mathcal{Q}}'$. Par intégration, il vient

$$2^{q_j s}\|\Delta_q\delta_{\lambda,n+1}\|_{L^{\rho_j}_T(L^{p_j})}\leq Cc\|\delta_{\lambda,n}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})}+\frac{2^q}{2^{2q}+\lambda}\|\delta_{\lambda,n}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})}.$$

Donc, en choisissant la constante c assez petite dans l'inégalité (25), et le paramètre λ assez grand, il vient, en prenant la borne supérieure en q,

$$\|\delta_{\lambda,n+1}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})}\leq\frac{1}{4}\|\delta_{\lambda,n}\|_{\widetilde{L}^{\rho_j}_T(B^{s_j}_{p_j})};$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.2.

Références

[1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **14**, 1981, pages 209–246.

[2] M. Cannonne, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Éditeur, Arts et Sciences, 1995.

[3] J.-Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque, **230**, 1995.

[4] J.-Y. Chemin, About Navier-Stokes system, *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6.*

[5] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6.*

[6] J.-Y. Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1995, pages 314–328.

[7] H. Fujita et T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archiv for Rationnal Mechanic Analysis*, **16**, 1964, pages 269–315.

[8] I. Gallagher, The tridimensional Navier-Stokes equations with almost bidimensional data: stability, uniqueness and life span, manuscrit.

[9] D. Iftimie, La résolution du système quasi-géostrophique de Navier-Stokes sur les domaines minces et la limite quasi-géostrophique, *Thèse de l'Université Paris 6.*

[10] T. Kato, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$, *Journal of functionnal Analysis*, **9**, 1972, pages 296–305.

[11] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Matematica*, **63**, 1933, pages 193–248.

[12] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations*, Aspect der Mathematik, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.