F. Nier

Théorie de la diffusion pour les opérateurs analytiquement décomposables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 8, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A8_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

THÉORIE DE LA DIFFUSION POUR LES OPÉRATEURS ANALYTIQUEMENT DÉCOMPOSABLES

F. NIER

Exposé n° VIII

19 Mars 1996

Théorie de la diffusion pour les opérateurs analytiquement décomposables

Francis Nier
Centre de Mathématiques
URA 169 CNRS
Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex
France

Mars 1996

1 Introduction

Nous résumons ici les résultats obtenus avec C. Gérard dans [9]. Il s'agit de théorie de la diffusion pour une classe abstraite d'opérateurs auto-adjoints, appelés opérateurs analytiquement décomposables, qui contient en particulier le cas des opérateurs de Schrödinger périodiques.

Commençons par rappeler la définition classique des opérateurs décomposables. Soit $\mathcal{H}'$ un espace de Hilbert séparable et $(M, \mathrm{d}m)$ un espace mesuré σ-fini. On note

$$\mathcal{H} := \int_M^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}m$$

l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(M, \mathrm{d}m; \mathcal{H}')$. Une fonction

$$M \ni k \to H_0(k)$$

à valeurs opérateurs auto-adjoints (non nécessairement bornés) sur $\mathcal{H}'$, est dite mesurable si les fonctions

$$M \ni k \to (\psi, (H_0(k+i))^{-1}\phi)$$

sont mesurables pour $\psi, \phi \in \mathcal{H}'$. On définit alors l'opérateur

$$H_0 = \int_M^{\oplus} H_0(k)\mathrm{d}m(k), \tag{1.1}$$

agissant sur $\mathcal{H}$ par:

$$D(H_0) := \{\psi \in \mathcal{H} | \psi(k) \in D(H_0(k))\text{p.p}\,, \textstyle\int_M \|H_0(k)\psi(k)\|^2 \mathrm{d}m(k) < \infty\},$$
$$H_0\psi(k) := H_0(k)\psi(k),\ \psi \in D(H).$$

Les opérateurs de la forme (1.1) sont appelés *opérateurs décomposables.* L'ensemble

$$\Sigma := \{(\lambda, k) \in \mathbb{R} \times M,\ \lambda \in \sigma(H_0(k))\}$$

est appelé l'*ensemble des énergies-moments* de H_0.

En général, les opérateurs décrivant des systèmes "libres", admettant un ensemble assez riche de constantes du mouvement, sont décomposables.

Nous considérons une classe particulière d'opérateurs décomposables, caractérisés par le fait que l'espace M est une variété analytique réelle et la résolvante $(H_0(k) + i)^{-1}$ est compacte sur $\mathcal{H}'$ et analytique en k.

L'exemple principal d'opérateurs analytiquement décomposables, que nous avons en tête est celui des opérateurs de Schrödinger périodiques,

$$H_0 = \frac{1}{2}D^2 + V_\Gamma(x), \text{ sur } L^2(\mathbb{R}^n),$$

où $V_\Gamma(x)$ est un potentiel réel, $\Gamma-$périodique pour un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. D'autres exemples sont donnés dans la Section 2.

Soit

$$H_0 = \int_M^\oplus H_0(k)\mathrm{d}m(k)$$

un opérateur analytiquement décomposable et

$$H = H_0 + V$$

une perturbation de H_0. La théorie de la diffusion pour la paire (H_0, H) consiste à étudier l'existence des opérateurs d'onde

$$W^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} 1_{\mathrm{c}}(H_0),$$

et à caractériser leur image, c'est à dire en général à montrer

$$W^\pm \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{c}}(H).$$

Cette propriété, la complétude des opérateurs d'onde, entraîne en particulier l'existence et l'unitarité sur $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}(H_0)$ de l'opérateur de diffusion

$$S := W^+(W^-)^*.$$

Dans le cas des opérateurs de Schrödinger périodiques, la théorie de la diffusion a déjà fait l'objet de différents travaux parmi lesquels [1][13] pour l'approche dépendant du temps qui nous intéresse et [14] pour l'approche stationnaire. Nous avons suivi la méthode abstraite introduite par Mourre [8], qui repose sur la construction d'un opérateur A sur $\mathcal{H}$ appelé *opérateur conjugué*, tel que les commutateurs locaux $1_\Delta(H)[H, iA]1_\Delta(H)$ sont positifs modulo un opérateur compact, pour tout intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ ne rencontrant pas un ensemble discret de niveaux d'énergie appelés *seuils.* La première étape consiste à construire un opérateur conjugué A pour H_0, le fait que A est aussi conjugué pour H s'obtenant par un argument de perturbation.

La construction d'un opérateur conjugué repose sur le fait que l'ensemble des énergies-impulsions d'un opérateur analytiquement décomposable peut s'écrire comme une union d'ensembles sous-analytiques indexés par la multiplicité du spectre de $H_0(k)$. On utilise alors un résultat classique sur l'existence de bonnes stratifications d'ensembles sous-analytiques (cf [7][2][3]).

Pour traiter le hamiltonien perturbé, nous supposons que l'espace M est $\mathbb{R}^n$ ou une variété (analytique réelle) compacte et que la perturbation V est un opérateur pseudodifférentiel sur M à symbole opérateur sur $\mathcal{H}'$ d'ordre négatif. La théorie de la diffusion est complètement traitée dans le cas $M = \mathbb{T}^n$, nos résultats se transposant aisément au cas $M = \mathbb{R}^n$. Nous n'avons pas développé le cas d'une variété compacte générale qui présente quelques difficultés et qui n'a pas d'application à notre connaissance.

2 Opérateurs analytiquement décomposables

2.1 Définition

Voici la définition précise des opérateurs analytiquement décomposables que nous considérons.

Definition 2.1. *On suppose que M est une variété analytique réelle et que la mesure μ est donnée par une $1-$densité C^∞ à valeurs dans $(0, +\infty)$. L'opérateur (1.1) sera dit analytiquement décomposable si*

i) *La fonction $M \ni k \to (H_0(k) + i)^{-1}$ est analytique réelle à valeurs opérateurs compacts sur $\mathcal{H}'$.*

ii) *La projection $p_{\mathbb{R}} : \Sigma \ni (\lambda, k) \to \lambda$ est propre.*

2.2 Exemples

Donnons maintenant quelques exemples d'opérateurs analytiquement décomposables.

2.2.1 Opérateurs différentiels matriciels à cœfficients constants

Notre premier exemple concerne les opérateurs différentiels matriciels à cœfficients constants. Soit

$$H_0 = P(D), \text{ agissant sur } \left(L^2(\mathbb{R}^n), \mathbb{C}^p\right),$$

où $P(\xi) = (a_{ij}(\xi)) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est une matrice auto-adjointe à cœfficients polynomiaux. On a le lemme suivant:

Lemme 2.2. *Supposons qu'il existe une fonction $\mathbb{R}^n \ni \xi \to f(\xi) \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} f(\xi) = +\infty$, et:*

$$|P(\xi)| \geq f(\xi) 1_p. \tag{2.1}$$

L'opérateur $H = P(D)$ est alors analytiquement décomposable.

2.2.2 Systèmes neutres de deux particules dans un champ magnétique

Notre deuxième exemple concerne le hamiltonien décrivant un système neutre de deux particules en interaction dans un champ magnétique constant, en dimension deux d'espace. Ce hamiltonien est de la forme:

$$H_0 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2m_i}(D_{y_i} - q_i J y_i)^2 + V(y_1 - y_2), \text{ agissant sur } L^2(\mathbb{R}^4),$$

où $m_i, q_i, i = 1, 2$ sont les masses et charges des particules, V le potentiel d'interaction et

$$J := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

où b est l'intensité du champ magnétique. Nous supposons que le potentiel V vérifie

(V1) V est un opérateur de multiplication sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ $\Delta-$borné avec borne relative 0,

(V2) $\|F(\frac{|x|}{R} \geq 1)V(-\Delta + 1)^{-1}\| = o(1)$, quand $R \to \infty$.

En utilisant l'inégalité de Kato (voir [5, lemme 3.1]), on déduit facilement de *(V1)* que H_0 est $H_{00}-$borné avec borne relative 0, pour

$$H_{00} := \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2m_i}(D_{y_i} - q_i J y_i)^2.$$

L'opérateur H_0 est donc auto-adjoint avec domaine l'espace de Sobolev magnétique,

$$D(H_0) = D(H_{00}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^4) | H_{00}u \in L^2(\mathbb{R}^4)\}.$$

L'opérateur H_0 commute avec le *pseudomoment du centre de masse*, défini par

$$K := (D_{y_1} + q_1 J y_1) + (D_{y_2} + q_2 J y_2),$$

et si $q_1 + q_2 = 0$, les deux composantes de K commutent. En utilisant les arguments de [5], on construit une transformation unitaire :

$$U : L^2(\mathbb{R}^4) \to L^2(\mathbb{R}_k^2 \times \mathbb{R}^2),$$

telle que

$$UKU^* = (k_1, k_2), \qquad UH_0U^* = \int_{\mathbb{R}_k^2}^{\oplus} H_0(k) dk.$$

L'opérateur $H_0(k)$ qui agit sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ est donné par

$$H_0(k) := \frac{1}{2M}(k - 2qJy)^2 + \frac{1}{2m}\left(D_y - q\frac{m_1 - m_2}{M} Jy\right)^2 + V(y),$$

avec $M = m_1 + m_2, m = m_1 m_2 M^{-1}$ et $q = q_1 = -q_2$. On note

$$H_{00}(k) := \frac{1}{2M}(k - 2qJy)^2 + \frac{1}{2m}(D_y - q\frac{m_1 - m_2}{M} Jy)^2.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 2.3. *On désigne toujours par Σ l'ensemble des énergies-moments de H_0 et on note τ_0 l'ensemble*

$$\tau_0 := \{\sum_1^2 \frac{|q|}{m_i} b(n_i + \frac{1}{2}), n_i \in \mathbb{N}\}.$$

Sous les hypothèses (V1) et (V2) on a les propriétés suivantes:

i) *La fonction*

$$\mathbb{R}^2 \ni k \to (H_0(k) + i)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2))$$

est analytique à valeurs opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^2)$.

ii) *La projection $p_{\mathbb{R}} : \Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\tau_0) \to \mathbb{R} \backslash \tau_0$ est propre.*

L'ensemble τ_0 représente des seuils additionnels associés au canal libre où les deux particules sont loin l'une de l'autre. La construction d'un opérateur conjugué permet de montrer la complétude asymptotique pour des systèmes à trois corps dans un champ magnétique en dimension deux, dans le cas où il existe un amas neutre de deux particules (travail en cours).

2.2.3 Opérateurs de Schrödinger périodiques

Notre troisième exemple concerne les opérateurs de Schrödinger périodiques. On considère le hamiltonien

$$H_0 = \frac{1}{2} D^2 + V_\Gamma(x), \text{ sur } L^2(\mathbb{R}^n),$$

où V_Γ est un potentiel réel, $\Gamma-$périodique pour un réseau Γ dans $\mathbb{R}^n$:

$$V_\Gamma(x + \gamma) = V_\Gamma(x), \ \gamma \in \Gamma.$$

On suppose que V_Γ satisfait l'hypothèse suivante:
(V) V_Γ est $\Delta-$borné avec borne relative strictement plus petite que 1.
L'opérateur H_0 est donc auto-adjoint avec domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$. Nous rappelons maintenant la réduction de Floquet-Bloch pour les opérateurs périodiques, en renvoyant à [11] pour les démonstrations. On associe à Γ le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$, le domaine fondamental

$$F := \{x = \sum_{j=1}^n x_j \gamma_j, 0 \le x_j < 1\},$$

où $\{\gamma_j\}_1^n$ est une base de Γ, et le réseau dual

$$\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbb{R}^n | \langle \gamma, \gamma^* \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}, \ \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

De manière symétrique, on définit le domaine fondamental F^* et le tore $\mathbb{T}^{n*}$. Enfin, on note μ_Γ (resp. μ_{Γ^*}) le volume du domaine fondamental F (resp.F^*). Avec ces notations, la transformation de Floquet-Bloch associée à Γ est définie par:

$$Uu(k,x) := \mu_{\Gamma^*}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i\langle k,\gamma\rangle} u(x+\gamma), \tag{2.2}$$

pour $u \in S(\mathbb{R}^n)$ par exemple. On a:

$$(Uu)(k+\gamma^*,x) = (Uu)(k,x), \text{ pour } \gamma^* \in \Gamma^*,$$

et U se prolonge en un opérateur unitaire

$$U : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to L^2\left(\mathbb{T}^{n*}, dk; \mathcal{H}'\right),$$

pour $\mathcal{H}' = L^2(F,dx)$, dont l'inverse est donné par

$$U^{-1}v(x+\gamma) = \mu_\Gamma^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{T}^{n*}} e^{i\langle k,\gamma\rangle} v(k,x)dk, \ x \in F.$$

L'opérateur UH_0U^{-1} vaut alors

$$UH_0U^{-1} = \int_{\mathbb{T}^{n*}}^{\oplus} H_0(k)dk, \tag{2.3}$$

avec

$$\begin{aligned} &H_0(k) = \tfrac{1}{2}D^2 + V_\Gamma(x), \\ &D(H_0(k)) = \{u = v\big|_F,\ v \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) | v(x+\gamma) = e^{i\langle k,\gamma\rangle} v(x), \forall \gamma \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des énergies-impulsions Σ est traditionnellement appelé *variété de Bloch* et les fibres $\Sigma_\lambda = \Sigma \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\{\lambda\})$ *surfaces de Fermi.*

Lemme 2.4. *Sous l' hypothèse (V), l'opérateur UH_0U^{-1} est analytiquement décomposable.*

3 Estimation de Mourre pour des opérateurs analytiquement décomposables

Dans cette section, nous donnons l'existence d'un opérateur conjgué et en indiquons les conséquences pour le hamiltonien libre H_0 et le hamiltonien perturbé H.

3.1 L'opérateur conjugué pour H_0

On se place dans le cadre défini dans la section précédente. En particulier, nous considérons un hamiltonien H_0 analytiquement décomposable. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Il existe un ensemble discret τ déterminé par H_0 tel que pour tout intervalle $I \subset\subset \mathbb{R}\backslash\tau$ il existe un opérateur A_I essentiellement auto-adjoint avec $D(A_I) = \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(M;\mathcal{H}')$ vérifiant les propriétés suivantes:*

i) *Pour tout $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(I)$, il existe une constante $c_\chi > 0$ telle que*

$$\chi(H_0)\,[H_0, iA_I]\,\chi(H_0) \geq c_\chi \chi(H_0)^2.$$

ii) *Le multi-commutateur* $\mathrm{ad}^k_{A_I}(H_0)$ *définit un opérateur borné pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Nous en rappelons tout les conséquences usuelles suivantes (voir [8], [10]).

Corollaire 3.2. a) $\sigma_{\mathrm{pp}}(H_0) \subset \tau$.

b) *Pour tout* $\Delta \subset I \subset\subset \mathbb{R}\backslash\tau$, *on a*

$$\sup_{\lambda\in\Delta,\varepsilon>0} \left\| (1+|A_I|)^{-s} (H_0 - \lambda \pm i\varepsilon)^{-1} (1+|A_I|)^{-s} \right\| < \infty, \quad s > \frac{1}{2}.$$

et le spectre singulier continu de H_0, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_0)$, *est vide.*

3.2 Perturbations d'opérateurs analytiquement décomposables

Nous précisons maintenant l'estimation de Mourre pour les perturbations d'opérateurs analytiquement décomposables. Une classe naturelle de perturbations est celle des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre négatif sur M à valeurs opérateurs bornés sur $\mathcal{H}'$. Nous nous restreignons à des variétés pour lesquelles le calcul pseudo-différentiel global est bien connu, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et les variétés compactes. Le cas $M = \mathbb{R}^n$ est le plus simple, compte tenu de l'existence d'un calcul exact (cf [6] [4]), et tout ce qui suit s'exprime aisément dans ce cadre. Nous nous restreindrons donc au cas où M est une variété compacte qui correspond à notre application principale, c'est à dire les perturbations d'opérateurs de Schrödinger périodiques, pour lesquels $M = \mathbb{T}^n$. L'adaptation des résultats de cette section au cas où $M = \mathbb{R}^n$ est d'ailleurs immédiate.

On munit M d'une métrique riemanienne C^∞ g et on suppose que μ est la $1-$densité associée à g. On note par $H^s(M), s \in \mathbb{R}$ les espaces de Sobolev sur M et par R l'opérateur auto-adjoint défini sur $L^2(M,\mu)$ par

$$R = (1-\Delta_g)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad D(R) = H^1(M). \tag{3.1}$$

On utilisera sans risque de confusion la même notation R pour le produit tensoriel $R \otimes 1'_{\mathcal{H}'}$, auto-adjoint avec le domaine $H^1(M)\hat{\otimes}\mathcal{H}'$.

On note toujours τ l'ensemble des seuils mentionné dans le Théorème 3.1 et pour tout intervalle $I \subset\subset \mathbb{R}\backslash\tau$, A_I l'opérateur conjugué. On a alors les propriétés suivantes :

$$R^{-1}A_I \text{ est borné sur } \mathcal{H}; \tag{3.2}$$
$$R^{-\varepsilon}(H_0+i)^{-1},\ \varepsilon > 0, \text{ est compact sur } \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Nous allons considérer des perturbations de H_0 de la forme

$$H = H_0 + V \text{ sur } \mathcal{H},$$

où V est symétrique de domaine dense et vérifie

(V1) V est H_0- compact.

L'opérateur H est alors auto-adjoint avec domaine $D(H) = D(H_0)$. On suppose de plus que V se décompose en

$$V = V_{s1} + V_{s2} + V_l$$

où V_{s1},V_{s2} et V_l sont symétriques de domaine dense et satisfont de plus

(V2) $R^{2-\rho}V_{s1}(H_0 + i)^{-1}R^\rho$ est borné pour $\rho = 0, 1, 2$.

(V3) $V_{s2} \in \mathrm{OpS}_{10}^{-1-\mu}(M; \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$.

(V4) $V_l = V_l(k, D_k) \otimes 1_{\mathcal{H}'}$ avec $V_l(k, D_k) \in \mathrm{OpS}_{10}^{-\mu}(M)$.

Remarque 3.3. *Il est facile de voir que cette classe de perturbations contient, dans le cas périodique, les perturbations $V(x)$ décroissant comme $\langle x\rangle^{-\mu}$ à l'infini. Pour cela, il suffit de remarquer que*

$$\begin{aligned} UxU^{-1} &= x - D_k \\ U[x]U^{-1} &= -D_k, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où U est la transformation unitaire intervenant dans (2.3) et $[x]$ désigne la "partie entière" de $x \in \mathbb{R}^n$ par rapport au réseau Γ. On a donc

$$UV(x)U^{-1} = V(x - D_k) \quad et \quad UV([x])U^{-1} = V(-D_k).$$

*Pour avoir une partie à longue portée diagonale conformément à l'hypothèse **(V4)**, on note que $V_l(x) - V_l([x])$ est une correction à courte portée.*

Théorème 3.4. *Supposons vérifiées les hypothèses (V1),(V2),(V3),(V4). Soit I un intervalle tel que $I \subset\subset \mathbb{R}\backslash\tau$. Alors on a les propriétés suivantes:*

i) *Si $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(I)$, il existe une constante $c > 0$ et un opérateur compact K sur $\mathcal{H}$ tels que*

$$\chi(H)\,[H, iA_I]\,\chi(H) \geq c\chi^2(H) + K \tag{3.5}$$

En conséquence, le spectre ponctuel $\sigma_{\mathrm{pp}}(H)$ de H ne peut s'accumuler que sur τ.

ii) *Si $\lambda \in I\backslash\sigma_{\mathrm{pp}}(H)$, il existe pour $\varepsilon > 0$ assez petit, une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que*

$$1_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H)\,[H, iA_I]\,1_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H) \geq c_\varepsilon 1_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H) \tag{3.6}$$

iii) *La fonction $B(s) = e^{isA_I}Be^{-isA_I}$, avec $B = [H, iA_I]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est hölderienne d'ordre* $\inf\{\mu, 1\}$.

iv) *Pour $\Delta \subset I\backslash\sigma_{\mathrm{pp}}$, on a*

$$\sup_{\lambda\in\Delta,\ \varepsilon>0} \left\|(1 + |A_I|)^{-s}\,(H - \lambda \pm i\varepsilon)^{-1}\,(1 + |A_I|)^{-s}\right\| < \infty \tag{3.7}$$

pour $s > \frac{1}{2}$ et le spectre singulier continu $\sigma_{\mathrm{sc}}(H)$ est vide.

3.3 Estimations de vitesse minimale

Nous terminons par une autre application des estimations de Mourre pour H_0 et H portant sur les estimations de vitesse minimale. C'est à partir de telles estimations que l'on peut développer la théorie de la diffusion. Ces estimations, dues à Sigal et Soffer [12], s'obtiennent de façon générale dans un cadre abstrait dès que l'on a un opérateur conjugué. Ici, on utilise aussi le fait que A_I est majoré par R,

$$A_I \leq cR, \quad \text{pour un certain } c > 0.$$

Proposition 3.5. *Soit $\chi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}\backslash(\tau \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(H)))$. Pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on a:*

$$\int_1^\infty \left\| F\left(\frac{R}{t} \leq \varepsilon_0\right) \chi(H) e^{-itH} u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \ \forall u \in \mathcal{H}$$

$$\text{et} \qquad \operatorname*{s-lim}_{t \to +\infty} F\left(\frac{R}{t} \leq \varepsilon_0\right) \chi(H) e^{-itH} = 0.$$

En fait, on a aussi besoin d'une estimation similaire pour le hamiltonien effectif dépendant du temps $H(t) = H_0 + V_l(t)$ où $V_l(t)$ est donné par

$$V_l(t, k, D_k) = F(\frac{R}{t} \log t \geq 1) V_l(k, D_k) F(\frac{R}{t} \log t \geq 1).$$

C'est ici qu'il est commode de se restreindre au cas $M = \mathbb{T}^n$ muni de sa métrique plate naturelle. En effet dans ce cas $R = \langle D_k \rangle$ et il est facile de voir que $V_l(t)$ est un $\frac{1}{t}$-pseudo d'ordre $-\mu + \varepsilon$. De plus on dipose sur le tore d'un calcul pseudo-différentiel exact comme sur $\mathbb{R}^n$. Les estimations de vitesse minimale pour $U_1(t) = U_1(t, 0)$ engendré $H(t)$ s'écrivent comme suit.

Proposition 3.6. *Soit $\chi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}\backslash(\tau \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(H)))$. Pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on a:*

$$\int_1^\infty \left\| F\left(\frac{\langle D_k \rangle}{t} \leq \varepsilon_0\right) \chi(H_0) U_1(t) u \right\|^2 \frac{dt}{t} \leq C \|u\|^2, \ \forall u \in \mathcal{H}$$

$$\text{et} \qquad \operatorname*{s-lim}_{t \to +\infty} F\left(\frac{\langle D_k \rangle}{t} \leq \varepsilon_0\right) \chi(H) U_1(t) = 0.$$

4 Théorie de la diffusion

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous nous restreignons maintenant au cas $M = \mathbb{T}^n$. Nous avons deux types de résultats. Les premiers concernent les observables asymptotiques. En particulier, nous montrons clairement la convergence de la vitesse moyenne vers la vitesse asymptotique. Les seconds correspondent à l'approche plus traditionnelle de la théorie de la diffusion consistant à étudier les opérateurs d'onde.

Remarque 4.1. *Les résultats suivants se traduisent facilement dans le cas périodique compte tenu de la Remarque 3.3.*

4.1 Observables asymptotiques

Le point clé, qui fournit le bon cadre pour parler d'observables asymptotiques, consiste à remarquer que l'écriture

$$g(H_0, k) := \int_{\mathbb{T}^n}^{\oplus} g(H_0(k), k) dk.$$

prend un sens non seulement pour $g \in C_0^0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n)$ mais plus précisément pour $g \in C_0^0(\Sigma)$ (l'espace des énergies-moments Σ est un fermé de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$ de telle sorte qu'il est localement fermé pour la topologie induite). La notation précédente est justifiée dans la mesure où $g(H_0, k) = g_{\mathbb{R}}(H_0)$ si $g = (p_{\mathbb{R}}^* g_{\mathbb{R}})\Big|_{\Sigma}$ et où $g(H_0, k) = g_{\mathbb{T}^n}(k)$ si $g = (p_{\mathbb{T}^n}^* g_{\mathbb{T}^n})\Big|_{\Sigma}$. On voit alors que

$$\mathcal{U}_0 := \left\{ g(H_0, k) | g \in C_0^0(\Sigma) \right\}.$$

est une C^*-algèbre commutative de spectre Σ.

Théorème 4.2. *Pour toute fonction $g \in C_0^0(\Sigma)$, la limite forte*

$$\underset{t \to +\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} g(H_0, k) e^{-itH} 1_c(H) =: g(H, k^+)_c \tag{4.1}$$

existe. L'ensemble de ces limites pour $g \in C_0^0(\overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))})$ forme une C^*-algèbre commutative, notée $\mathcal{U}^+$, de spectre $\overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))}$. Enfin la limite (4.1) vaut $g_{\mathbb{R}}(H) 1_c(H)$ si $g(\lambda, k) = g_{\mathbb{R}}(\lambda) \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Remarque 4.3. *L'indice $_c$ est là pour rappeler que notre définition de $g(H, k^+)_c$ contient la projection sur le spectre continu de H.*

Quand H_0 n'a pas de spectre purement ponctuel alors Σ ne peut avoir de composante horizontale. On a alors $\overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))} = \Sigma$ et on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.4. *Si $\sigma_{\mathrm{pp}}(H_0)$ est vide, alors l'ensemble des limites fortes (4.1) pour $g \in C_0^0(\Sigma)$ est une C^*-algèbre commutative de spectre Σ tout entier.*

De façon classique, on construit à partir du Théorème 4.2 une mesure à valeurs projections $d\mu^+$ sur $\overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))}$, que l'on prolonge par 0 sur le complémentaire dans Σ de $\overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))}$, telle que

$$g(H, k^+)_c = \int_{\Sigma} g(\lambda, k) d\mu^+(\lambda, k), \text{ pour } g \in C_0^0(\Sigma).$$

Le prolongement par 0 sur $\Sigma \backslash \overline{\Sigma \backslash p_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{pp}}(H))}$ est cohérent avec le fait que la limite (4.1) projette sur $1_c(H)$. On peut alors définir $g(H, k^+)_c$ pour toute fonction borélienne sur Σ par

$$g(H, k^+)_c = \int_{\Sigma} g(\lambda, k) d\mu^+(\lambda, k).$$

Il y a trois types de fonctions $g(\lambda, k)$ qui interviennent dans la suite de l'analyse :

a) Des restrictions à Σ de fonctions $g \in C_{\mathrm{comp}}^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n)$ avec des supports petits. En prenant des partitions localement finies composées de telles fonctions on se ramène à des problèmes locaux sur Σ.

b) La restriction à la partie régulière de Σ. On définit Σ_{reg} comme l'ensemble des points de Σ au voisinage desquels la multiplicité de la valeur propre $\tilde{\lambda}(k)$ de $H_0(k)$ est constante. Dans ce cas $\tilde{\lambda}(k)$ est localement analytique par rapport à k.

c) La fonction vitesse v que l'on définit et à laquelle on associe des opérateurs comme suit.

Definition 4.5. *On note v la fonction définie sur Σ par*

$$\begin{cases} v(\lambda, k) = \partial_k \tilde{\lambda}(k) & si\ (\lambda = \tilde{\lambda}(k), k) \in \Sigma_{\mathrm{reg}} \\ 0\ sinon. \end{cases}$$

L'observable vitesse associée à H_0 est alors le vecteur d'opérateurs auto-adjoints qui commutent $v_{H_0} = v(H_0, k)$. La vitesse asymptotique pour H est le vecteur d'opérateurs auto-adjoints qui commutent $v_H^+ = v(H, k^+)_{\mathrm{c}}$.

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.6. a) *Pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$, on a*

$$\chi(H) v_H^+ = \underset{t \to +\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} \chi(H_0) v_{H_0} e^{-itH} 1_{\Sigma_{\mathrm{reg}}}(H, k^+)_{\mathrm{c}}.$$

b) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\underset{t \to +\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} f\left(-\frac{D_k}{t}\right) e^{-itH} \left[1_{\Sigma_{\mathrm{reg}}}(H, k^+)_{\mathrm{c}} + 1_{\mathrm{pp}}(H)\right] = f(v_H^+).$$

4.2 Opérateurs d'onde

Nous indiquons en premier lieu le résultat obtenu dans le cas à courte portée.

Théorème 4.7. *Sous l'hypothèse $V_l \equiv 0$, on a les propriétés suivantes:*

a) *Complétude Asymptotique: l'opérateur d'onde*

$$W^+ = \underset{t \to +\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} e^{-itH_0} 1_{\mathrm{c}}(H_0)$$

existe et le système est asymptotiquement complet

$$W^+ \mathcal{H} = 1_{\mathrm{c}}(H) \mathcal{H}.$$

De plus on a

$$(W^+)^* = \underset{t \to +\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH_0} e^{-itH} 1_{\mathrm{c}}(H)$$
$$et \quad W^+ H_0 = H W^+.$$

b) *Existence de la vitesse asymptotique: Pour $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\; e^{itH} f(\frac{-D_k}{t}) e^{-itH} = f(v_H^+).$$

Pour le problème à longue portée, on construit une dynamique libre modifiée pour $t \gg T$, T fixé,

$$S(t, H_0, k) := \sum_j S_j(t, k) 1_{\Omega_j}(H_0, k). \tag{4.2}$$

où les $S_j(t, \lambda, k)$ sont localement définies sur Σ_{reg} comme solution d'équations de Hamilton-Jacobi de la forme

$$\begin{cases} \partial_t S_0(t,k) = \chi(k)\tilde{\lambda}(k) + \chi(k)\,[\mathbb{R}\mathrm{e}\, V_l]\,(t, k, -\partial_k S_0(t,k)) \\ S_0(t = T, k) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

On a alors le résultat suivant, qui décrit l'existence des opérateurs d'onde modifiés et caractérise leur image.

Théorème 4.8. *La limite*

$$W^+ := \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\; e^{itH} e^{-iS(t,H_0,k)} 1_{\mathrm{c}}(H_0)$$

existe et son image est celle de $1_{\Sigma_{\text{reg}}}(H, k^+)_{\mathrm{c}} 1_{\mathrm{c}}(H)$. De plus on a

$$(W^+)^* = \underset{t\to+\infty}{\text{s-lim}}\; e^{iS(t,H_0,k)} e^{-itH} 1_{\Sigma_{\text{reg}}}(H, k^+)_{\mathrm{c}},$$

$$W^+ g(H_0, k)(W^+)^* = g(H, k^+)_{\mathrm{c}},\ g \in C_0^0(\Sigma_{\text{reg}}).$$

Remarque 4.9. *Pour l'instant, il ne nous est pas possible de démontrer la complétude asymptotique dans le cas à longue portée en dehors de cas triviaux (la dimension 1 par exemple). Celle-ci équivaut en fait à*

$$1_{\Sigma\setminus\Sigma_{\text{reg}}}(H, k^+)_{\mathrm{c}} = 0.$$

Contrairement au cas à courte portée, nous ne savons pas s'il y a ou non des phénomènes de concentration sur $\Sigma\setminus\Sigma_{\text{reg}}$.

Références

[1] F. Bentosela. Scattering for Impurities in a Crystal. *Comm. Math. Phys.*, 46:153–166, 1976.

[2] J.M. Delort. *F.B.I. Transformation.* Number 1522 in Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1992.

[3] H. Hironaka. Stratification and Flatness. In P. Holm, editor, *Real and Complex Singularities*, pages 199–265. Proceedings of the nordic summer school/NAVF, Sijthoff and Noordhoff, august 1976.

[4] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 3. Springer Verlag, 1985.

[5] C. Gérard, I. Laba. Scattering Theory for 3-Particle Systems in a Constant Magnetic Field: Dispersive Case. Technical report, Ecole Polytechnique, F–91128 Palaiseau, France, septembre 1995.

[6] J.M. Bony, N. Lerner. Quantification asymptotique et microlocalisation d'ordre supérieur I. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série*, 22:377–433, 1989.

[7] E. Bierstone, P.D. Milman. Semi-Analytic and Subanalytic Sets. *Inst. Htes Etudes Scient. Publ. Math.*, 67:5–42, 1988.

[8] E. Mourre. Absence of Singular Continuous Spectrum for Certain Self-Adjoint Operators. *Commun. Math. Phys.*, 78:391–408, 1981.

[9] C. Gérard, F. Nier. Théorie de la diffusion pour des opérateurs analytiquement décomposables. Technical report, CMAT, URA-CNRS 169, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, 1996.

[10] P. Perry, I.M. Sigal , B. Simon. Spectral Analysis of N-body Schrödinger operators. *Ann. Math.*, 519–567, 1981.

[11] M.M. Skriganov. Geometric and Arithmetic Methods in the Spectral Theory of Multi-Dimensional Periodic Operators. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2, 1987.

[12] I.M. Sigal, A. Soffer. Local Decay an Velocity Bounds. Technical report, Princeton University, 1988.

[13] L.E. Thomas. Time-Dependent Approach to Scattering from Impurities in a Crystal. *Comm. Math. Phys.*, 33:335–343, 1973.

[14] M.S. Birman, D.R. Yafaev. Scattering Matrix for a Perturbation of a Periodic Schrödinger Operator by a Decaying Potential. Technical Report 100, Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienne, Autriche, mai 1994.