Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Explosion de solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en plusieurs dimensions d'espace

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A5_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EXPLOSION DE SOLUTIONS D'EQUATIONS D'ONDES QUASI-LINEAIRES EN PLUSIEURS DIMENSIONS D'ESPACE

S. ALINHAC

Exposé n° V

13 Février 1996

Explosion de solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires

en plusieurs dimensions d'espace

S. Alinhac

Introduction

Nous nous intéressons aux phénomènes d'explosion des solutions classiques d'équations ou systèmes hyperboliques quasi-linéaires.

Donnons pour fixer les idées quelques exemples de tels problèmes :

a. Soit un système quasi-linéaire "sans terme de source" dans le plan

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0.$$

Si u est une solution de classe C^1 près d'un point $m = (X,T)$ pour $t < T$, qu'on ne peut prolonger en une fonction de classe C^1 près de m, que peut-on dire de son comportement en m? Connait-on des cas où $|u|$ est non borné? Si $|u|$ est borné, est-il vrai que la partie singulière de u' est génériquement de rang 1?

b. Soient un système quasi-linéaire multidimensionnel

$$\partial_t u + \Sigma A_j(u)\partial_j u + B(u) = 0$$

et u une solution de classe C^1, à support compact en x, qui explose au point m. Existe-t-il des conditions suffisantes de "robustesse" de u qui impliquent que toute donnée de Cauchy assez voisine de $u(x,0)$ donne naissance à une solution du système qui explose près de m?

c. Soit une perturbation de l'équation des ondes dans $\mathbf{R}^{n+1}$ ($n \leq 3$) par des termes non linéaires quadratiques de la forme

$$\partial_t^2 u - \nabla_x u + \Sigma g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, x_0 = t.$$

Supposons les données de Cauchy C_0^∞ et de taille ϵ. Dans quelles conditions sur les données initiales peut-on prédire l'explosion de la solution, et décrire son mécanisme, pour ϵ assez petit?

Ces problèmes ont déja été étudiés dans la littérature, notamment sous l'impulsion de F. John, puis de L. Hörmander. Au sujet du problème a., on peut citer [5], [9]. Le problème b. n'a pas été étudié dans des situations multidimensionnelles, à notre connaissance. Le problème c. en revanche a été élucidé par John [8] en dimension un d'espace (ou dans des cas invariants par rotation). D'une façon générale, on pourra consulter sur les systèmes quasi-linéaires les ouvrages généraux [10], [11], [12], et sur toutes les questions d'explosion le survey de John [7], l'article d'Hörmander [6] ou la monographie plus récente de l'auteur [4]. A ce jour, il n'existe pas de résultats décrivant l'explosion de solutions de problèmes hyperboliques du type de ceux mentionnés plus haut, dans des situations multidimensionnelles.

Cet exposé présente un premier résultat dans une telle situation, choisie pour sa particulière simplicité. Ce résultat s'inscrit dans un programme développé par l'auteur, auquel se rattachent les articles [2], [3], [5].

Rappelons très brièvement la stratégie mise en oeuvre, qui s'appuie sur les concepts d'"**explosion géométrique**" et de "**système éclaté**" :

i) Pour obtenir des solutions $u = u(x,t)$ singulières d'un système donné L, on cherche un changement de variables singulier

$$(X,T) \to (x,t) = \Phi(X,T)$$

et une solution régulière $v(X,T)$ d'un nouveau système L_e, dit "système éclaté" de L, en sorte que

$$u(\Phi(X,T)) = v(X,T).$$

Bien entendu, le nouveau système porte sur v et Φ, et est tel que la singularité de Φ induit effectivement l'explosion de u'. Cette explosion est dite "géométrique", car elle résulte uniquement de la non inversibilité de Φ', et non d'une quelconque singularité de v.

ii) Il suffit alors de résoudre le système éclaté dans un grand domaine allant "au-delà" du temps d'explosion présumé de u, et d'observer le lieu $\{det\Phi' = 0\}$.

Le cas où le corang de Φ' est un au point d'explosion semble assez bien compris, et la théorie correspondante est développée dans [2], [4].

Nous verrons des exemples concrets un peu plus loin.

Jusqu'ici, deux cas ont été traités par cette méthode :

1. Celui de l'explosion en dimension un d'espace pour des systèmes 2×2, ou pour des systèmes 3×3 à données petites (problèmes de types a. et/ou c. Voir [5]).
2. Celui d'une perturbation de l'équation des ondes pour des données de Cauchy petites (problème c. en dimension $n = 2$), pour lequel on se contente de résoudre formellement

en ϵ le système éclaté. On obtient alors des résultats de nature asymptotique en ϵ (voir [3]).

Nous décrivons ici un cas multidimensionnel où il est possible de résoudre exactement le système éclaté, pour des données C^∞.

I. Description du modèle et résultats

I.1 Le problème aux limites

Soit $A_0 > 0$ donné. Définissons, pour un certain $\bar{T} > 0$ et une fonction

$$A_0(y,t) > 0, A_0(y,0) = A_0,$$

le domaine

$$D = \{(x,y,t) \in \mathbf{R} \times S^1 \times [0,\bar{T}], -A_0(y,t) \leq x \leq 0\}.$$

Nous voulons résoudre dans D le problème

(1.1) $$\partial^2_{xt} u + (\partial_x u)(\partial^2_x u) + \epsilon \partial^2_y u = 0,$$

avec les conditions aux limites

(1.2) $$u(x,y,0) = u_0(x,y), u(0,y,t) = \partial_x u(0,y,t) = 0.$$

Ici, u_0 est une donnée de classe C^∞ définie pour

$$(x,y) \in [-A_0, 0] \times S^1$$

qui vérifie les conditions de compatibilité

(1.3) $$u_0(0,y) = \partial_x u_0(0,y) = 0.$$

Nous faisons sur u_0 l'hypothèse de non-dégénérescence suivante, qui joue un rôle fondamental dans toute la suite :

(ND) La fonction $\partial^2_x u_0$ possède sur $[-A_0, 0] \times S^1$ un unique minimum négatif

$$m_0 = (x_0, y_0), -A_0 < x_0 < 0,$$

tel que

(1.4) $$\nabla^2_{x,y}(\partial^2_x u_0)(m_0) >> 0.$$

Il s'agit donc d'une perturbation multidimensionnelle de l'équation de Burger sur $\partial_x u$. Pour $\epsilon = 0$, on sait que le problème possède une unique solution C^∞ sur D pour une fonction A_0 convenable et

$$\bar{T} = \bar{T}_0 = (-\inf_{x,y} \partial_x^2 u_0)^{-1}. \tag{1.5}$$

Si l'on pose

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \bar{T}_0(\partial_x u_0)(m_0), \tilde{m}_0 = (\tilde{x}_0, y_0), \tilde{M}_0 = (\tilde{m}_0, \bar{T}_0),$$

on sait que lorsque $(x, y, t) \to \tilde{M}_0$, les dérivées d'ordre deux de u deviennent infinies.

I.2 Motivation

Nous expliquons maintenant les raisons qui nous conduisent à étudier ce modèle.

Dans $\mathbf{R}^3$ où les variables sont notées

$$x_0 = t, x = (x_1, x_2), r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}, x_1 = r\cos\omega, x_2 = r\sin\omega,$$

on considère le problème de Cauchy à données petites

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0,$$

$$u(x, 0) = \epsilon u_1^0 + \epsilon^2 u_2^0 + \ldots, \partial_t u(x, 0) = \epsilon u_1^1 + \epsilon^2 u_2^1 + \ldots.$$

Ici, la sommation est étendue à tous les indices $0 \le i, j, k \le 2$, $g_{ij}^k = g_{ji}^k$, $g_{00}^k = 0$ et l'on pose

$$g(\omega) = g_{ij}^k \omega_i \omega_j \omega_k, \omega_0 = -1, \omega_1 = \cos\omega, \omega_2 = \sin\omega.$$

Si l'on suppose les données de Cauchy dans $C_0^\infty(r < M)$, on sait (cf. par exemple [6], [3]) que, pour un temps t de l'ordre de ϵ^{-2} et $r - t \ge -C$, la solution u a l'allure

$$u \sim \frac{\epsilon}{r^{1/2}} F(r - t, \omega, \epsilon\sqrt{t}).$$

Cela conduit à introduire les variables

$$\sigma = r - t, \omega, \tau = \epsilon\sqrt{t}$$

et F à la place de x_0, x_1, x_2 et u. L'équation d'ondes s'écrit alors

$$-\partial_{\sigma\tau}^2 F + g(\partial_\sigma F)(\partial_\sigma^2 F) + \epsilon^2(-\frac{1}{\tau^3}\partial_\omega^2 F + \ldots) = 0,$$

où les ... désignent des termes non-linéaires en les dérivées secondes de F, contenant des dérivées en ω d'ordre au plus un.

Nous pensons que la principale difficulté, dans cette situation multidimensionnelle, est le contrôle des dérivées $\partial^2_\omega F$; il est alors raisonnable de négliger les termes notés $\ldots$, ce qui conduit, en posant $v = -gF$, à l'équation

$$\partial^2_{\sigma\tau} v + (\partial_\sigma v)(\partial^2_\sigma v) + \frac{\epsilon}{\tau^3}\partial^2_\omega v = 0.$$

On a donc obtenu (au facteur $\frac{1}{\tau^3}$ près qui ne joue aucun rôle) l'équation (1.1). Remarquons l'importance du signe de ∂^2_y.

Par ailleurs, comme la solution u du problème de Cauchy est à support dans $r \leq t+M$, la fonction $F(\sigma, \omega, \tau)$ est à support dans $\sigma \leq M$. Cela éclaire les conditions aux limites (1.2).

I.3 Le résultat principal

C'est le théorème suivant.

Théorème. *Pour ϵ assez petit,*

(i) Il existe des fonctions $\bar{T}_\epsilon > 0$ et $A_0(y,t) = A_{0,\epsilon}(y,t)$, $t < \bar{T}_\epsilon$, définissant un domaine $D = D_\epsilon$,

(ii) Il existe un point $\tilde{M}_\epsilon = (\tilde{m}_\epsilon, \bar{T}_\epsilon) \in \bar{D}$ proche de $\tilde{M}_0$,

(iii) Il existe une fonction $u = u_\epsilon$ avec, dans $\bar{D} - \{\tilde{M}_\epsilon\}$,

$$\nabla^2_{x,y} u \in C^0, \partial^2_{xt} u \in C^0$$

solution de (1.1), (1.2). De plus, on a pour un $C > 0$ l'inégalité

$$(C(\bar{T}_\epsilon - t))^{-1} \leq |\partial^2_x u(.,t)|_{L^\infty} \leq C(\bar{T}_\epsilon - t)^{-1}.$$

La situation pour $\epsilon > 0$ est donc qualitativement semblable à celle du cas $\epsilon = 0$: les dérivées secondes de u explosent lorsque $(x,y,t) \to \tilde{M}_\epsilon$.

II. L'éclatement : un outil pour prouver l'explosion et la décrire

II.1 Quelques exemples simples

Rappelons d'abord quelques exemples de la procédure d'éclatement dont nous avons parlé dans l'Introduction (voir [2], [4] pour tout détail) :

(i) Pour l'équation de Burger (à une variable d'espace)

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0, u(x,0) = u_0(x),$$

on choisit Φ de la forme

$$\Phi(X,T) = (\phi(X,T), T),$$

et le système éclaté est, avec $u(\phi,T)=v(X,T)$,

$$\partial_T\phi = v, \partial_T v = 0, v(X,0)=u_0(X), \phi(X,0)=X.$$

Il s'agit simplement dans ce cas de la méthode des caractéristiques ; les courbes intégrales du champ $\partial_t + u\partial_x$ sont appliquées sur les droites $X = cte$.
Le problème de Cauchy possède la solution explicite, définie pour tout T,

$$v(X,T)=u_0(X), \phi(X,T)=Tu_0(X)+X.$$

L'explosion de u correspond au premier temps où $\partial_X\phi = 0$, c'est à dire

$$t = (-\inf u_0')^{-1},$$

ce qui est la formule bien connue ([7], [10], [11], [12], [4]). En outre, si u_0' a un minimum à dérivée seconde non nulle, l'application Φ a une singularité de type cusp, et l'on peut décrire aisément le comportement de u près du point d'explosion.
(ii) Plus généralement, pour un système

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

avec des valeurs propres $\lambda_j(u)$ et des vecteurs propres à droite et à gauche $r_j(u), \ell_j(u)$, le système éclaté selon la valeur propre λ_j, avec

$$\Phi(X,T) = (\phi(X,T),T),$$

est

$$\partial_T\phi = \lambda_j(v), {}^t\ell_j(v)\partial_T v = 0, (\lambda_k - \lambda_j)(v){}^t\ell_k\partial_X v + \partial_X\phi\,{}^t\ell_k\partial_T v = 0, k \neq j.$$

On peut voir par exemple que

$$v \equiv v(X), v'(X) = r_j(v), \phi = \lambda_j(v)T + \bar{\phi}(X)$$

est une solution particulière du système éclaté, qui correspond à une onde simple du système de départ.

De façon générale, on constate que le système éclaté d'un système donné possède aux points d'explosion (ici, les points où $\partial_X\phi = 0$) des **caractéristiques multiples** ; c'est ce fait qui rend difficile la résolution de ce système.

II.2 Le problème éclaté

Pour l'équation modèle (1.1) que nous étudions, on peut par exemple introduire les inconnues $u_1 = \partial_x u, u_2 = \partial_y u$ et réécrire (1.1) sous la forme

$$\partial_t u_1 + u_1 \partial_x u_1 + \epsilon \partial_y u_2 = 0, \partial_y u_1 = \partial_x u_2.$$

La procédure standard de [2] conduit, toujours avec

$$\Phi(X, Y, T) = (\phi(X, Y, T), Y, T),$$

au système éclaté

$$\partial_T \phi = v_1 + \epsilon(\partial_Y \phi)^2, \tag{2.1}$$

$$\partial_T v_1 - \epsilon \partial_Y \phi \partial_Y v_1 + \epsilon \partial_Y v_2 = 0,$$

$$\partial_X v_2 - \partial_X \phi \partial_Y v_1 + \partial_Y \phi \partial_X v_1 = 0.$$

Le système linéarisé possède aux points d'explosion les caractéristiques ∂_X et $\partial_T - 2\epsilon \partial_Y \phi \partial_Y$ (double!).

La particularité miraculeuse de ce système est qu'on peut le réduire à une **équation scalaire en** ϕ ; en effet, il suffit d'éliminer v_2, puis de remplacer v_1 par $\partial_T \phi - \epsilon(\partial_Y \phi)^2$. On trouve (en remplaçant dorénavant les grandes lettres Xetc. par des petites et en écrivant les dérivées en indice pour alléger)

$$\phi_{xtt} - 4\epsilon \phi_y \phi_{xyt} + \epsilon \phi_x \phi_{yyt} + 4\epsilon^2 \phi_y^2 \phi_{xyy} - 2\epsilon \phi_x \phi_y \phi_{yyy} - \tag{2.2}$$

$$-\epsilon \phi_{yy} \phi_{xt} - 2\epsilon \phi_{yt} \phi_{xy} + 6\epsilon^2 \phi_y \phi_{xy} \phi_{yy} - 2\epsilon^2 \phi_x \phi_{yy}^2 = 0.$$

Les conditions aux limites correspondant à (1.2) sont

$$\phi(x, y, 0) = x, \partial_t \phi(x, y, 0) = \partial_x u_0(x, y), \phi(0, y, t) = 0. \tag{2.3}$$

Le problème est donc maintenant de résoudre (2.2), (2.3) dans un domaine convenable.

III. Un problème à frontière libre instable au bord

III.1 Pourquoi une frontière libre?

Nous expliquons maintenant une difficulté qui n'apparait pas en dimension un d'espace.

Dans l'équation linéarisée de (2.2), les termes les plus significatifs sont

$$\partial_{xtt}^3 + \epsilon \phi_x \partial_{yyt}^3.$$

En oubliant un facteur ∂_t, nous devons donc résoudre un problème de Goursat pour

$$\partial_{xt}^2 + \epsilon\phi_x\partial_y^2$$

avec une donnée sur chacun des plans $\{x = 0\}$ et $\{t = 0\}$. On peut se convaincre assez facilement que le changement de signe de ϕ_x (qui correspond précisément aux points d'explosion) induit une instabilité dans le problème de Goursat. C'est une situation un peu analogue à celle de quelqu'un qui voudrait résoudre le problème de Cauchy avec données sur $\{t = 0\}$ pour un opérateur

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 - a\partial_y^2$$

et qui verrait le coefficient a changer de signe de plus à moins.

La conséquence de ce fait est qu'on ne peut espérer résoudre le problème de Goursat non linéaire (2.2) que jusqu'au premier temps où la fonction ϕ_x change de signe, temps qui dépend lui-même de la solution ϕ cherchée : nous sommes en présence d'un problème à frontière libre.

Le dilemme est le suivant : il faut éviter que ϕ_x ne change de signe dans le domaine. Mais d'autre part, si ϕ_x ne s'annule pas dans le domaine, la solution u correspondante n'explose pas. La seule possibilité est que ϕ_x s'annule exactement sur le bord supérieur $\{t = \bar{T}\}$ du domaine.

Mais si l'on envisage de résoudre (2.2) par un procédé de point fixe, les modifications successives de ϕ ne vont certainement pas préserver cette propriété.

III.2 Réduction à un domaine fixe

Pour réduire le problème à un domaine fixe, nous introduisons un paramètre λ et posons

$$x = X, y = Y, t = \lambda T.$$

Rappelons que (x, y, t) sont (par abus) les coordonnées du problème éclaté (2.2) ; nous allons maintenant travailler sur un intervalle de temps fixe $T \in [0, 1]$, et les inconnues du problème sont λ et ϕ. Les équations (2.2), (2.3) se transforment de façon évidente. L'idée est de jouer sur λ pour obtenir l'annulation de $\partial_x\phi$ exactement au bord.

De façon précise, nous voulons qu'il existe un point M du bord supérieur du domaine tel que ϕ vérifie la propriété suivante :

(H) $$\partial_X\phi \geq 0, \partial_X\phi(X, Y, T) = 0 \Leftrightarrow (X, Y, T) = M,$$

$$\partial_{XT}^2\phi(M) < 0, \nabla_{X,Y}(\partial_X\phi)(M) = 0, \nabla_{X,Y}^2(\partial_X\phi)(M) >> 0.$$

Le lemme fondamental suivant montre comment il est possible de satisfaire (H).

Lemme. *Soit $\bar{\phi} = \bar{\psi} + \bar{\lambda} T v_0$ une fonction vérifiant (H) dans un domaine pour un point $\bar{M} = (\bar{m}, 1)$, avec $\partial_X v_0(\bar{M}) \neq 0$. Il existe alors un voisinage V de $\bar{\psi}$ dans $C^1_T([0,1], C^3_{X,Y})$ et des fonctions $\Lambda(\psi)$ et $M(\psi) = (m(\psi), 1)$ définies sur V avec les propriétés suivantes :*

(i) $\Lambda(\bar{\psi}) = \bar{\lambda}$, $m(\bar{\psi}) = \bar{m}$,

(ii) Pour tout ψ dans V, la fonction

$$\phi = \psi + \Lambda(\psi) T v_0$$

vérifie (H) pour $M = M(\psi)$.

Dans le cas présent, pour $\epsilon = 0$, on avait

$$\phi(x, y, t) = x + t \partial_x u_0(x, y),$$

ce qui donne après introduction de λ

$$\phi(X, Y, T) = X + \lambda T \partial_X u_0(X, Y).$$

Grâce à la propriété de non-dégénérescence (ND) de la donnée initiale, nous pouvons prendre ici $\lambda = \bar{\lambda} = (-\inf \partial_x^2 u_0)^{-1}$, et la fonction $\bar{\phi}$ correspondante satisfait (H) et les hypothèses du Lemme, avec $\bar{m} = m_0$.

En résumé, on est ramené à chercher ψ voisine de $\bar{\psi} = X$ telle que

$$\phi = \psi + \Lambda(\psi) T \partial_X u_0(X, Y)$$

et $\lambda = \Lambda(\psi)$ vérifient les équations déduites de (2.2), (2.3). Le résultat, qui démontre le théorème en même temps qu'il le précise, est qu'on peut trouver une telle ψ, assez régulière (voir [1], théorème 2.1 pour un énoncé précis).

Là commence la véritable partie technique du travail. La résolution du problème de Goursat non linéaire en ψ se fait comme d'habitude en montrant qu'on peut obtenir de bonnes estimations pour le problème linéarisé. A cause de l'annulation de $\partial_X \phi$ en M, il est difficile de contrôler les dérivées ∂_Y. L'inégalité d'énergie pour le problème linéarisé (d'ordre trois) est obtenue en intégrant par partie le produit de l'équation et d'un multiplicateur adapté, de la forme

$$M\dot{\phi} = \exp(X - hT)(1 - T)^{\mu}[(\phi_X)^{-1} \partial^2_{XT} \dot{\phi} + \epsilon c' \partial^2_Y \dot{\phi} - d' \partial^2_T \dot{\phi}]$$

pour des constantes h, c', d', μ bien choisies.

Les pertes de dérivées dûes aux caractéristiques multiples du problème nous obligent à utiliser un schéma de résolution de type Nash-Moser. Nous n'en dirons pas plus sur les estimations ou les chaines d'espaces utilisées, renvoyant le lecteur curieux (et courageux) à [1] pour tout détail.

Bibliographie

[1] Alinhac S., *"Explosion des solutions d'une équation d'ondes quasi-linéaire en deux dimensions d'espace"*, preprint Université Paris-Sud, (1995).

[2] Alinhac S., *"Explosion géométrique pour des systèmes quasi-linéaires"*, Séminaire d'EDP, Ecole Polytechnique, Paris, (1993), et article dans Amer. J. Math. 117, (1995), 987-1017.

[3] Alinhac S., *"Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux II"*, Duke Math. J. 73 (3), (1994), 543-560.

[4] Alinhac S., *"Blowup for nonlinear hyperbolic equations"*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, (1995).

[5] Alinhac S., *"Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires en dimension un d'espace"*, Séminaire d'EDP, Ecole Polytechnique, Paris, (1995) et article aux Annali Sc. Norm. Pisa, Serie IV, Vol. XXII, (1995),493-515.

[6] Hörmander L., *"The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations"*, Lecture Notes Math. 1256, Springer Verlag, (1986), 214-280.

[7] John F., *"Nonlinear wave equations. Formation of singularities"*, Leghigh University, University Lecture Series, Amer. Math. Soc., Providence, (1990).

[8] John F., *"Formation of singularities in one dimensional nonlinear wave propagation"*, Comm. Pure Appl. Math., 27, (1974), 377-405.

[9] Joly J. L., Métivier G., Rauch J., *"A nonlinear instability for* 3×3 *systems of conservation laws"*, Comm. Math. Phys. 162, (1994), 47-59.

[10] Lax P. D., *"Hyperbolic systems of conservation laws II"*, Comm. Pure Appl. Math. 10, (1957), 537-566.

[11] Majda A. *"Compressible fluid flow and systems of conservation laws"*, Springer Appl. Math. Sc. 53, (1984).

[12] Smoller J., *"Shock waves and reaction diffusion equations"*, Grundlehr. 258, Springer Verlag, New York, (1983).

S. Alinhac, Département de Mathématiques,
Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
salinhac@matups.matups.fr