SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. PLANCHON

Convergence de solutions des équations de Navier-Stokes vers des solutions autosimilaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 3, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CONVERGENCE DE SOLUTIONS DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES VERS DES SOLUTIONS AUTOSIMILAIRES

F. PLANCHON

Exposé n° III

23 Janvier 1996

I. Introduction et problématique

Lorsqu'on construit une solution globale en temps, pour un problème d'évolution, il est naturel de s'intéresser au comportement asymptotique de ces solutions. Pour l'équation de la chaleur non linéaire, on peut par exemple montrer que les solutions globales se comportent à temps grand comme certaines solutions très particulières, puisqu'autosimilaires [Kav]. En s'inspirant de cette démarche, nous nous proposons de montrer comment de tels résultats peuvent être obtenus, sous certaines conditions, dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles.

Rappelons que le système étudié est le suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\nabla.(u \otimes u) - \nabla p + \Delta u \\ \text{div } u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^3, \ t \geq 0 \ . \end{cases}$$

Le fait de travailler dans l'espace entier permet de faire agir le groupe des dilatations. Plus précisément, si $u(x,t)$ est solution de (1), il en est de même, pour tout $\lambda > 0$, pour $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$.

Etudier le comportement asymptotique ($t \to +\infty$) de $u(x,t)$ équivaut à étudier le comportement asymptotique ($\lambda \to +\infty$) de $u_\lambda(x,t)$. Voici pourquoi : nous montrerons que lorsque t tend vers $+\infty$, l'échelle d'espace naturelle est $\sqrt{t}$ (comme c'est le cas pour l'équation de la chaleur). Remplacer la variable d'espace x par $\frac{x}{\sqrt{t}}$ revient précisément à faire tendre λ vers $+\infty$ dans $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$. L'intérêt de ce nouveau point de vue vient de l'heuristique suivante : on s'attend à ce que la limite, si elle existe, de $u_\lambda(x,t)$ soit elle-même une solution $v(x,t)$ de (1). La condition initiale correspndante serait $v_0(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda u(\lambda x, 0)$. Dès lors, $v(x,t)$ vérifie automatiquement $\lambda v(\lambda x, \lambda^2 t) = v(x,t)$ c'est-à-dire $v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ tandis que $v_0(x)$ est automatiquement homogène de degré -1.

Le problème que nous résoudrons dans ce travail est l'étude de la convergence de $u_\lambda(\lambda, t)$ vers une solution autosimilaire (c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}})$) de (1). L'existence de telles solutions a été étudiée dans [Ca-P].

Introduisons l'opérateur $\mathbb{P}$ de projection sur les champs de vecteurs à divergence nulle ; il s'agit d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre zéro, qui s'exprime à l'aide des transformations de Riesz, de symbole $\frac{\xi_j}{|\xi|}$, de la manière suivante

$$\mathbb{P} \left| \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} u_1 - R_1\sigma \\ u_2 - R_2\sigma \\ u_3 - R_3\sigma \end{array} \right. \quad \sigma = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3 \ .$$

Nous pouvons alors transformer le système (1) en une équation intégrale, où le flux de la chaleur est noté $S(t) = e^{t\Delta}$,

$$u(x,t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\text{div }(u \otimes u)(s)ds \; . \tag{3}$$

Cette dernière équation se résout de façon classique par point fixe ([K-F], [Ca]). Suivant la démarche introduite dans [Ca], nous remarquons que l'étude du terme bilinéaire dans (3) se ramène à celle d'un opérateur scalaire de la forme

$$B(f,g) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} G(\frac{x}{\sqrt{t-s}}) * fg(s)ds \; , \tag{4}$$

où G est une fonction analytique, telle que

$$|G(x)| < \frac{c}{1+|x|^4} \; . \tag{5}$$

Ceci découle simplement de l'étude du symbole (matriciel) de l'opérateur bilinéaire sous le signe somme dans (3). En utilisant (2), il vient facilement que

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{-\xi_j\xi_k\xi_p}{|\xi|^2} e^{-|\xi|^2} (+\xi_j e^{-|\xi|^2}) \; ,$$

où j, k, ℓ sont indifféremment dans $\{1, 2, 3\}$. Nous retiendrons qu'une telle fonction G appartient à $L^1 \cap L^\infty$.

II Énoncés et résultats

Le cadre fonctionnel naturel utilisé dans [Kat] est $L^3(R^3)$, puisqu'alors $\|u_\lambda\|_{L^3} = \|u\|_{L^3}$. Cependant, les fonctions homogènes de degré -1 ne sont pas dans L^3, et il est facile de voir que pour $u_0 \in L^3$, la limite au sens des distributions de $u_{0,\lambda}$ est la fonction nulle. Il est donc nécessaire d'adopter un cadre fonctionnel plus large, incluant les fonctions homogènes de degré -1. Plusieurs extensions de L^3 sont possibles, nous avons choisi, par commodité, les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$.

Rappelons la définition de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ([Trie], [Pee]).

Définition 1.—

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $B(0,1)$ et $\widehat{\varphi} \equiv 0$ sur $B(0,2)^c$, $\varphi_j(x) = 2^{nj}\varphi(2^j x)$, $S_j = \varphi_j * .$, $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$. Considérons $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- Lorsque $s < \frac{n}{p}$, ou si $s = \frac{n}{p}$ et $q = 1$, l'espace $\dot{B}_p^{s,q}$ est constitué des distributions tempérées f telles que

* $\sum_{-m}^{m} \Delta_j(f)$ converge vers f pour la topologie $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$

* La suite $\varepsilon_j = 2^{js}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$ appartient à ℓ^q.

- Lorsque $s > \frac{n}{p}$, ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$, appelons $m = E(s - \frac{n}{p})$. Alors $\dot{B}_p^{s,q}$ est l'espace des distributions tempérées f, modulo les polynômes de degré au plus m, telles que

* $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j(f)$ pour la topologie quotient.

* $\varepsilon_j = 2^{js}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$ est dans ℓ^q.

On prend alors

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \|2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}\|_{\ell^q} \tag{8.}$$

Nous pouvons alors établir le résultat suivant, qui complète ceux de [Ca].

Théorème 1.—

Il existe une fonction $\eta(q), 3 < q < +\infty$ à valeurs dans $]0 + \infty)$ telle que :

si $u_0 \in \dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$, $\operatorname{div} u_0 = 0$, $p \geq 3$, vérifie $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-(1-\frac{3}{q}),\infty}} < \eta(q)$ pour un q fixé plus grand que p, alors il existe une unique solution de (3) telle que $u \in C_w([0 + \infty), \dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty})$, où le C_w dénote les fonctions faiblement continues, et, si l'on note $u = S(t)u_0 + w(x,t)$,

$$w \in L^\infty([0 + \infty), L^3(\mathbb{R}^3)) \tag{9}$$

$$\|w\|_{L^3} < \gamma(q) \ , \tag{10}$$

où $\gamma(q)$ dépend de $\eta(q)$.

Disposant de solutions de (3) dans un cadre fonctionnel adapté, nous pouvons étudier leur asymptotique. Commençons par une définition :

Définition 2.—

Nous dirons que $u(x,t)$ "converge en norme L^p" vers une fonction $V(x)$ si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite

(i) pour tout intervalle compact $[a,b] \subset]0 + \infty)$, on a

$$u_\lambda(x,t) \overset{L^p(dx)}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) \ , \ \lambda \to \infty$$

uniformément en $t \in [a,b]$

(ii) $\sqrt{t}\, u(\sqrt{t}\, x, t) \overset{L^p(dx)}{\longrightarrow} V(x)$, lorsque $t \to \infty$.

Dans un premier temps, nous allons montrer le

Théorème 2.—

Supposons que $3 < p < +\infty$. *Soit* $u(x,t)$ *une solution de (3) vérifiant*

$$(11) \qquad \sup_{t>0} \|\sqrt{t}\, u(\sqrt{t}\, x, t)\|_{L^p} < +\infty$$

(12) $\quad u(x,t)$ *converge faiblement vers* $u_0(x)$ *lorsque* $t \to 0$.

Alors, si

$$(13) \qquad u \quad \text{“converge au sens} \quad L^p\text{” vers} V \ ,$$

la condition initiale $u_0(x)$ *appartient à* $B_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$, $\frac{1}{\sqrt{t}}V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ *est une solution autosimilaire de (3), et*

$$(14) \qquad S(t)u_0 \quad \text{“converge au sens} \quad L^p\text{” vers} v_1(x) \ ,$$

où $v_1(x) = S(1)v_0$, *et* v_0 *est la condition initiale de la solution autosimilaire.*

Nous pouvons remarquer que lorsque $u_0 \in B_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$, la condition (14) entraîne que

$$(15) \qquad \lambda u_0(\lambda x) \quad \text{converge faiblement vers} \quad v_0 \quad \text{lorsque} \quad \lambda \to 0 \ ,$$

qui en est une forme affaiblie, comme l'illustre la

Proposition 1.—

Il existe une fonction $f \in B_3^{0,\infty}(\mathbb{R}^3)$, *telle que* $\lambda f(\lambda x)$ *converge faiblement vers* 0 *lorsque* $\lambda \to +\infty$, *mais telle que, pour* $p > 3$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|S(1)[\lambda f(\lambda x)]\|_{L^p} \neq 0 \ .$$

Nous avons vu, dans l'énoncé du théorème 1, qu'il est pratique de voir u comme une somme de deux termes $u(x,t) = S(t)u_0 + w(x,t)$, le premier représentant la tendance, et le second une fluctuation, plus régulière que la tendance. De même pour une solution autosimilaire, on notera

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}V(\frac{x}{\sqrt{t}}) = S(t)v_0 + \frac{1}{\sqrt{t}}W(\frac{x}{\sqrt{t}}).$$

Théorème 3.—

Soit $u_0 \in \dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$, div $u_0 = 0$, $3 \le p < +\infty$, *telle qu'il existe* $q > p$, *pour lequel*

$$\|u_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} < \eta(q) \ .$$

Supposons en outre qu'il existe r, $r \ge p$ *et* $r > 3$, *tel que*

$$(16) \qquad S(t)u_0 \quad \text{“converge au sens} \quad L^r\text{”} \ \text{vers} \ v_1(x) \ .$$

Alors $\lambda u_0(\lambda x)$ *converge faiblement vers une fonction* v_0 *telle que* $v_0 = S(1)v_0$, *et, si* $u(x,t)$ *est la solution de (3) de condition initiale* u_0, $\frac{1}{\sqrt{t}}V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ *celle de condition initiale* v_0,

$$(17) \qquad \forall q \ge p \ , \ q > 3 \ , \ \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|u(x,t) - \frac{1}{\sqrt{t}}V(\frac{x}{\sqrt{t}})\|_{L^q} = 0 \ ,$$

$$(18) \qquad \lim_{t\to\infty} \|w(x,t) - \frac{1}{\sqrt{t}}W(\frac{x}{\sqrt{t}})\|_{L^3} = 0 \ .$$

On peut légitimement s'interroger sur la signification de la condition (16). C'est l'objet de la proposition 3 qui va suivre.

Mais d'abord introduisons une caractérisation en ondelettes de l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$, $p > 3$.

Proposition 2.—

Soit $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ *une famille de 7 ondelettes telles que la collection* $(\psi_\varepsilon(2^j x - k))_{\varepsilon;j,k\in\mathbf{Z}}$ *soit une base orthogonale de* $L^2(\mathbb{R}^3)$. *Alors* $f \in \dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty}$ *équivaut à*

$$\sup_j (\Sigma_j |\alpha_\varepsilon(j,k)|^p)^{1/p} < +\infty \ ,$$

si $f(x) = \sum_{\varepsilon,j,k} \alpha_\varepsilon(j,k) 2^j \psi_\varepsilon(2^j x - k)$.

Nous aurons alors la propriété suivante

Proposition 3.—

Les deux conditions suivantes sont équivalentes

$$(19) \qquad \begin{aligned} & f \in B_p^{-(1-\frac{3}{p}),\infty} \ , 3 < p < +\infty \quad \text{et} \\ & - \lambda f(\lambda x) \quad \text{converge faiblement vers} \quad 0 \\ & - \lim_{j\to-\infty} (\Sigma_k |\alpha_\varepsilon(j,k)|^p)^{1/p} = 0 \ , \end{aligned}$$

si $\alpha_\varepsilon(j,k)$ *sont les coefficients d'ondelettes de* f *avec la normalisation précédente.*

$$(20) \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \|S(t)f\|_{L^p} = 0 \ .$$

III Démonstrations et résultats complémentaires.

Nous allons commencer par démontrer le théorème 1, par une technique standard de point fixe.

Introduisons l'espace

$$F_q = \{f(x,t) \mid \sup_{t>0} \|f(x,t)\|_{L^q} < +\infty\} \ .$$

Rappelons la caractérisation suivante des espaces de Besov d'indice de régularité négatif.

Proposition 4.—

Soit $s \in (-1,0)$, $p \in [1+\infty)$. Alors

$$\|f\| = \sup_{t>0} t^{-s/2} \|S(t)f\|_{L^p} \tag{21}$$

définit sur $\dot{B}_p^{s,\infty}$ une norme équivalente à la norme dyadique usuelle.

Le lecteur intéressé pourra consulter [Tri] ou [Pee] pour les multiples façons équivalentes de définir ces espaces.

Ceci étant, à l'aide de l'inclusion de Sobolev $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty} \hookrightarrow \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$, $p \le q$, il est facile de voir que lorsque $u_0 \in \dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$, $\sqrt{t}\,[S(t)u_0](\sqrt{t}\,x) \in F_q$. Il reste alors, si l'on appelle $D_t f = \sqrt{t}\, f(\sqrt{t}\,x, t)$, à vérifier que $D_t B(D_t^{-1}\cdot, D_t^{-1}\cdot)$ est bicontinu sur F_q. Considérons f et $g \in F_q$. Notons $M = fg \in F_{q/2}$. Il est alors aisé, par changement de variable, de voir que l'opérateur bilinéaire renormalisé à l'aide de D_t s'écrit

$$\widetilde{B}(f,g) = \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^2} G(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda}}) * M(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \lambda t) \frac{d\lambda}{\lambda} \ . \tag{22}$$

Dès lors, en utilisant Young et Hölder, il vient

$$\|\widetilde{B}(f,g)\|_{F_q} \le \int_0^1 \frac{C d\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}} \lambda^{1-\frac{3}{q}}} \|f\|_{F_q} \|g\|_{F_q} \ , \tag{23}$$

qui nous donne la constante $\eta(q)$.

De même

$$\|\widetilde{B}(f,g)\|_{F_3} \le \int_0^1 \frac{C d\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{3}{q}} \lambda^{1-\frac{3}{q}}} \|f\|_{F_q} \|g\|_{F_q} \ . \tag{24}$$

Ceci nous montre (9) et (10). Il reste à établir la convergence faible lorsque $t \to 0$. Il est clair que $S(t)u_0 \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} u_0$ par dualité. En ce qui concerne le terme bilinéaire, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\langle Q(t-s)fg(s), \varphi\rangle = \langle fg(s), S(t-s)\widetilde{Q}\varphi\rangle$$

où $\widehat{\widetilde{Q}\varphi}(\xi) = \frac{\xi_j\xi_k\xi_\ell}{|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi)$, donc $\widetilde{Q}\varphi \in L^1$, pour les mêmes raisons que G. Ainsi $S(t-s)\widetilde{Q}\varphi$ est (uniformément en $t-s$) dans L^q, avec $\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1$. Alors

$$\begin{aligned} | < \int_0^t Q(t-s)fg(s)ds, \varphi > | &\leq C\int_0^t \|fg(s)\|_{L^{p/2}}ds \\ &\leq C\int_0^t \frac{ds}{s^{1-\frac{3}{p}}} \\ &\leq Ct^{\frac{3}{p}} \to 0 \ . \end{aligned}$$

Nous avons donc montré le théorème 1. Notons que par des majorations similaires à (23) et (24), on peut obtenir que la solution u vérifie

(25) $$\sqrt{t}\,u(\sqrt{t}\,x,t) \in F_q, \quad \text{pour tout} \quad q \geq p\ , q > 3$$

et que le terme bilinéaire w vérifie en sus

$$\sqrt{t}\,w(\sqrt{t}\,x,t) \in F_q, \quad \text{pour} \quad 3 < q \leq p\ .$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2. L'équation (3) peut se réécrire de la manière suivante

$$\sqrt{t}\,u(\sqrt{t}\,x,t) = \sqrt{t}\,[S(t)u_0](\sqrt{t}\,x) - \int_0^t \mathbb{P}D_t\{S(t-s)\mathrm{div}\ u\otimes u(s)\}ds\ .$$

Notons $U(t) = \sqrt{t}\,u(\sqrt{t}\,x,t)$, il vient

(27) $$U(t) = \sqrt{t}\,[S(t)u_0](\sqrt{t}\,x) - \widetilde{B}(U,U)(t)$$

où l'on dénote encore $\widetilde{B}$ l'opérateur vectoriel ayant pour composantes des opérateurs du type (22). Notons que, par hypothèse,

$$M = U\otimes U \xrightarrow{L^{p/2}} N = V\otimes V\ .$$

Considérons alors la différence

(28) $$\Delta_t(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^2}G\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda}}\right) * \left\{M\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}},\lambda t\right) - N\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}\frac{d\lambda}{\lambda}\ ,$$

dont on va estimer la norme L^p.

Appelons

$$\omega(t) = \|M(x,t) - N(x)\|_{p/2} \ ,$$

$$\|M(\frac{x}{\sqrt{t}}, \lambda t) - N(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})\|_{p/2} = \lambda^{\frac{3}{p}}\omega(\lambda t)$$

Ainsi,

$$\|\Delta_t(x)\|_{L^p} \leq C \int_0^1 \frac{\omega(\lambda t) d\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2p}}\lambda^{1-\frac{3}{p}}} \ . \tag{29}$$

Sachant que d'une part $\omega(t)$ est borné, d'autre part $(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}}\lambda^{+\frac{3}{p}-1} \in L^1(0,1)$ lorsque $p > 3$, le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{t\to\infty} \|\Delta_t(x)\|_{L^p} = 0 \ .$$

Dès lors, le terme bilinéaire devient

$$\frac{1}{\sqrt{t}} W(\frac{x}{\sqrt{t}}) + 0(1), \quad \text{avec} \quad W(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^2} G(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda}}) * N(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \frac{d\lambda}{\lambda} \ .$$

(27) se réécrit ainsi

$$V(x) = t^{1/2}[S(t)u_0](\sqrt{t}\, x) - W(x) + 0(1) \ . \tag{30}$$

Observons que la transformée de Fourier de

$$\sqrt{t}\, [S(t)u_0](\sqrt{t}\, x) \quad \text{est} \quad \frac{1}{t} e^{-|\xi|^2} \hat{u}_0(\frac{\xi}{\sqrt{t}}) \ ,$$

qui converge dans $\mathcal{F}L^p$ vers une distribution. Dès lors, $\frac{1}{t}\hat{u}_0(\frac{\xi}{\sqrt{t}})$ converge faiblement vers $\hat{v}_0(\xi)$, et en revenant aux variables d'espace,

$$\sqrt{t}\, u_0(\sqrt{t}\, x) \rightharpoonup v_0(x) \ .$$

Remarquons d'autre part que, en utilisant (29) et (30),

$$\|\sqrt{t}\, [S(t)u_0](\sqrt{t}\, x)\|_{L^p} \leq C < +\infty \ , \quad \text{pour tout} \quad t > 0 \ . \tag{31}$$

Donc

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \|S(t)u_0\|_{L^p} \leq C \ , \tag{32}$$

ce qui d'après la proposition 4, équivaut à $u_0 \in B_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$. Alors pour tout λ, $u_{0,\lambda} \in B_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$, et $\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}} = \|u_0\|_{\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}}$, donc la limite $v_0(x) \in \dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$, et la convergence a lieu dans $\sigma(\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}, \dot{B}_{p'}^{1-\frac{3}{p},1})$. On notera que v_0 est nécessairement homogène de degré -1. Montrons maintenant que V est en fait solution de (3) où l'on remplace u_0 par v_0. La famille $(u_\lambda)_\lambda$ vérifie les estimations (11) et (32) uniformément en λ. Par ailleurs, à $t > 0$ fixé,

$$\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \underset{\lambda \to +\infty}{\xrightarrow{L^p}} \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) \ .$$

Dès lors, le passage à la limite dans l'équation (3) vérifiée par u_λ montre que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) = S(t)v_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\text{div } V(s) \otimes V(s) ds \ . \tag{33}$$

On notera que $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) = v_0$ au sens faible, ce qui s'établit de la même façon que dans la démonstration du théorème 1.

Oublions pour le moment la proposition 1, et montrons le théorème 3. Remarquons d'abord que le cas où $r = 3$ conduit à $v_1 = 0$, et donc à $v_0 = V = 0$. Dans ce cas, (17) et (18) se réduisent aux estimations usuelles (voir Kat). Nous supposerons donc $r > 3$. Il est alors très facile de voir que la convergence (16) a lieu dans tout L^r, $r > p$ (et même $r = p$ si $p > 3$), par interpolation : en effet $\sqrt{t}\,(S(t)u_0)(\sqrt{t}\,x)$ est borné pour la norme $\|.\|_{L^r}, \forall r > p$, grâce à l'inclusion $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty} \hookrightarrow \dot{B}_r^{\frac{3}{r}-1,\infty}$. Nous pouvons donc choisir $r = q$, q étant l'indice tel que $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}}$ est petite.

Nous avons donc montré le

Lemme 1.—

Soit $f \in \dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}, p > 3$, *telle que pour un certain* $r \geq p$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} \|S(t)f\|_{L^r} = 0 \ .$$

Alors, $\forall \tilde{q} \geq r$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\tilde{q}}} \|S(t)f\|_{L^{\tilde{q}}} = 0 \ . \tag{34}$$

D'après l'étude effectuée dans la démonstration du théorème 2, nous savons que v_0, limite faible de u_0, appartient aux mêmes espaces de Besov que u_0. De ce fait, $\|v_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} = \|u_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} < \eta(q)$. Ainsi, les solutions $u(x,t)$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ s'obtiennent, par application du théorème 1, par une méthode de point fixe.

Dénotons par $u^{(n)}$ (resp. $V^{(n)}$) les itérées successives du point fixe définissant u (resp. V). On remarquera que

$$u^{(1)}(x,t) = S(t)u_0 \left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{t}} V^{(1)}(\frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}}(S(1)v_0)(\frac{x}{\sqrt{t}}) \right) .$$

Sachant que

$$u^{(n+1)}(x,t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\text{div } (u^{(n)} \otimes u^{(n)})(s)ds ,$$

Il est facile à partir de (16) pour $r = q$, de montrer par récurrence que

$$\sqrt{t}\, u^{(n)}(\sqrt{t}\, x, t) \xrightarrow{L^q} V^{(n)}(x) . \tag{35}$$

Il suffit pour cela de reprendre les estimations utilisées pour montrer le théorème 2. D'autre part, en utilisant une estimation du type (23) et le théorème de convergence dominée, nous obtenons

$$\sqrt{t}\, B(u^{(n)}, u^{(x)})(\sqrt{t}\, x, t) \xrightarrow{L^3} B(V^{(n)}, V^{(n)}) . \tag{36}$$

Dès lors, en décomposant

$$u(x,t) - \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) = (u - u^{(n)}) + (V^{(n)} - V) + (u^{(n)} - V^{(n)})$$

un raisonnement en $\frac{\varepsilon}{3}$ permet d'obtenir (17) et (18) pour le q particulier qu'on s'est fixé. Le résultat pour tout q en découle par interpolation.

Nous allons maintenant démontrer la proposition 3. Notons que la proposition 2 n'est autre que la caractérisation usuelle des espaces de Besov à l'aide des coefficients d'ondelettes (voir [Mey]). Seule la normalisation n'est pas celle adoptée habituellement. On se limitera aux ondelettes de Littlewood-Paley, définies dans [Mey]. Elles sont dans $\mathcal{S}$ et à support compact en Fourier, ne contenant pas zéro. Notons que (20) peut s'écrire

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|S(1)[\lambda f(\lambda x)]\|_{L^p} = 0 . \tag{37}$$

Ainsi, si $\varphi \in \mathcal{S}$ et supp $\hat{\varphi}$ est compact,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\varphi * (\lambda f(\lambda x))\|_{L^p} = 0 . \tag{37bis}$$

Alors, il suffit de remarquer que

$$(\sum_{\varepsilon,k} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^p)^{1/p} = \|D_0(\lambda f(\lambda x))\|_{L^p} , \tag{38}$$

avec $\lambda = 2^{-j}$, et D_0 défini comme dans [Mey, p 45]. Alors on sait [Mey p 60] que D_0 est une somme d'opérateurs du type $M\Delta$, ou M est une multiplication par un caractère, et Δ une convolution par une fonction à support compact en Fourier. On en déduit le résultat voulu grâce à (37 bis). Inversement, supposons qu'on ait (19). Commençons par montrer que pour φ comme précédemment,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\varphi * f_\lambda\|_{L^p} = 0 \ .$$

Après changement d'échelle, cela revient à montrer que

$$\lim_{N\to\infty} 2^{N(1-\frac{3}{p})} \| \sum_{j<N} \sum_{\varepsilon,k} \alpha_{f,k,\varepsilon} 2^j \psi_\varepsilon(2^j x - k)\|_{L^p} = 0 \ .$$

Or, à j fixé

$$\| \sum_{\varepsilon,k} \alpha_{\varepsilon,j,k} 2^j \psi_\varepsilon(2^j x - k)\|_{L^p} \leq C 2^{j(1-\frac{3}{p})} (\sum_{\varepsilon,k} (\alpha_{j,k,\varepsilon}|^p)^{1/p} \ .$$

Donc en utilisant (19)

$$\| \sum_{k,\varepsilon} \alpha_{\varepsilon,j,k} 2^j \psi_\varepsilon(2^j x - k)\|_{L^p} \leq \varepsilon_j \ ,$$

avec $\lim_{j\to-\infty} \varepsilon_j = 0$.

Alors

$$2^{(1-\frac{3}{p})N} \sum_{j\leq -N} \varepsilon_j 2^{(1-\frac{3}{p})j} \to 0 \ ,$$

comme convolution $\ell^\infty * \ell^1$. (20) en découle en décomposant $S(1)$ en série de blocs dyadiques.

Revenons maintenant à la proposition 1. C'est elle qui permet de bien comprendre pourquoi (14) est bien une condition nécessaire et suffisante, au contraire de (15) qui est nécessaire mais pas suffisante. En effet, soyons naïf et supposons seulement (15). En utilisant le théorème 1, nous pouvons construire la famille $(u_\lambda)_\lambda$ de solutions de (3) de condition initiale $u_{0,\lambda}$. Les estimations obtenues sont toutes invariantes par changement d'échelle, donc indépendantes de λ. Dès lors, on peut extraire une sous-suite convergeant fortement sur $[t_1, t_2] \times B(0, R)$, où $t_1 > 0$. Il est tout aussi aisé de montrer que la limite $v(x,t)$ est en fait la solution (autosimilaire) de (3) de condition initiale v_0, limite faible de $(u_{0,\lambda})_\lambda$. Or montrer (17) revient à montrer

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|u_\lambda(x,1) - v(x,1)\|_{L^q} = 0 \ . \tag{39}$$

Ceci est vrai, si l'on remplace L^q par $L^q(B(OR))$, donc pour obtenir (39) il conviendrait de montrer une propriété du type

$$\lim_{R\to\infty} \|\chi_R u_\lambda(x,1)\|_{L^q} = 0 \tag{40}$$

uniformément en λ, où $\chi_R(x) = \chi(\frac{x}{R})$ est nulle sur $B(0,1)$, et vaut 1 en dehors de $B(0,2)$. Raisonnons sur la seule partie linéaire : si l'on suppose que $u_0 \in L^3$, $\|\chi_R u_{0,\lambda}\|_{L^3} \le \|u_0\|_{L^3(|x|>\lambda R)}$, et l'on en déduit facilement l'estimation

$$\lim_{R\to\infty} \|\chi_R S(1)u_{0,\lambda}\|_{L^q} = 0 \ , \quad \text{uniformément en} \quad \lambda \ge 1 \ .$$

C'est un raisonnement de ce type qui permet de conclure, en dimension 2, dans l'étude de la vorticité ([Car]). Cependant, si $u_0 \in \dot{B}_3^{0,\infty}$ mais $u_0 \notin L^3$, on n'a pas toujours $\|\chi_R u_0\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \to 0$ lorsque $R \to \infty$. Il suffit de prendre $f = \frac{1}{|x|}$, alors $\|\chi_R f\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} = \|\chi f\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} =$ constante. On pourrait cependant espérer avoir $\lim_{R\to\infty} \|\chi_R S(1)u_{0,\lambda}\|_{L^q} = 0$, uniformément en $\lambda \ge 1$. En fait il est impossible d'obtenir cette uniformité, comme le montre la

Proposition 5.—

Il existe $f \in \dot{B}_3^{0,\infty}$ telle que pour tout R, il existe $\lambda \ge 1$ tel que

$$\|\chi_R S(1) f_\lambda\|_{L^4} = 1$$

Nous avons fixé ici $p = 3$, $q = 4$, le lecteur se convaincra que ces choix sont arbitraires.

Remarquons bien sûr qu'à λ fixé, $S(1)f_\lambda \in L^4$, donc $\lim_{R\to\infty} \|\chi_R S(1) f_\lambda\|_{L^4} = 0$.

Nous aurons besoin du lemme (évident) suivant :

Lemme 2.—

Si $f \in L^4, g \in L^1$, alors

$$\Big(\int_{|x|>R} |f*g|^4 dx\Big)^{1/4} \le \|g\|_{L^1}\Big(\int_{|x|>\frac{R}{2}} |f|^4 dx\Big)^{1/4} + \|f\|_{L^4} \int_{|x|>\frac{R}{2}} |g| dx \ .$$

Ainsi, pour démontrer que $\|\chi_R S(1) f_\lambda\|_{L^4}$ est grand, il suffira de vérifier l'existence d'une fonction $g \in L^1$ telle que $\|\chi_R (g * S(1) f_\lambda)\|_{L^4}$ est grand. Notons $\varphi \in \mathcal{S}$ une fonction telle que supp $\hat{\varphi} \subset \{\frac{9}{10} \le |\xi| \le \frac{10}{9}\}$, et considérons

$$f(x) = \sum_0^\infty 2^{-j} \varphi(2^{-j}x - x_j), \quad \text{où} \quad |x_j| \to \infty \ .$$

$$2^m f(2^m x) = \sum_0^{m-1} 2^{m-j}\varphi(2^{m-j}x - x_j) + \varphi_m(x - x_m) + \sum_{m+1}^{\infty} 2^{m-j}\varphi(2^{m-j}x - x_j)$$
$$= u_m(x) + \varphi(x - x_m) + v_m(x) \ ,$$

Remarquons alors que les fréquences de u_m sont dans $\{|\xi| \geq 2.\frac{9}{10}\}$ et celles de v_m dans $\{|\xi| \leq \frac{1}{2}\frac{10}{9} \leq \frac{9}{10}\}$. Il existe donc $g \in \mathcal{S}$ telle que supp $\hat{g} \subset \{\frac{10}{18} \leq |\xi| \leq \frac{18}{10}\}$ et $\hat{g}(\xi) = e^{|\xi|^2}$ pour $\{\frac{9}{10} \leq |\xi| \leq \frac{10}{9}\}$. Ainsi pour $\lambda = 2^m$, $g * S(1)f_\lambda = \varphi(x - x_m)$, et

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|x|>R} |\varphi(x - x_m)|^4 dx = \|\varphi\|_{L^4}^4 \ .$$

Continuons notre étude de f.

Si $2^m < \lambda < 2^{m+1}$, on peut décomposer f de la manière suivante

$$\lambda f(\lambda x) = u_m(x) + v_m(x) \ ,$$

avec u_m contenant les fréquences $2^{-j}\lambda$ où $|m - j| < N$ et v_m celles où $|m - j| \geq N$.

Dès lors, choisissons une fonction de test ψ telle que $0 \notin \mathrm{supp}\hat{\psi}$, et fixons N tel que supp $\hat{\psi} \subset [2^{-N}, 2^N]$. Alors $\int \lambda f(\lambda x)\psi(x)dx$ n'est composé que des seuls termes où $|j - m| \leq N$, qui sont en nombre fini et tendent vers 0 si $|x_j| \to \infty$.

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Proposition 6.—

Il existe $f \in \dot{B}_3^{0,\infty}$ telle que $f_\lambda \rightharpoonup 0$ au sens de la topologie faible $\sigma(\dot{B}_3^{0,\infty}, \dot{B}_{3/2}^{0,1})$ mais telle que, cependant, $\|\chi_R S(1)f_\lambda\|_{L^4}$ ne tende pas vers 0 quand $R \to \infty$, uniformément en $\lambda \geq 1$.

Nous renvoyons le lecteur à [Tri] pour vérifier que les fonctions de test ψ utilisées précédemment sont denses dans $\dot{B}_{3/2}^{0,1}$.

Il ne nous reste qu'à faire le lien entre la proposition 5 et la condition (16). C'est l'objet de la

Proposition 7.—

Soit $f \in \dot{B}_3^{0,\infty}$, $f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{t\to\infty} t^{1/8}\|S(t)f\|_{L^4} = 0$

ii) $f_\lambda \rightharpoonup 0$ *dans* $\sigma(\dot{B}_3^{0,\infty}\dot{B}_{3/2}^{0,1})$ *et*

$$\left(\int_{|x|>R} |S(1)f_\lambda|^4\right)^{1/4} \leq \varepsilon_R \ ,$$

avec $\lim_{R\to\infty} \varepsilon_R = 0$ *indépendamment de* $\lambda \geq 1$.

Montrons que i) $\Longrightarrow$ ii) : la première partie, la convergence faible, a déjà été vue. Sachant que i) équivaut à

$$\lim_{x\to\infty} \|S(1)f_\lambda\|_{L^4} = 0 \ ,$$

ceci montre que

$$(\int_{|x|\geq R} |S(1)f_\lambda|^4 dx)^{1/4} \leq \varepsilon \ ,$$

pour $\lambda \geq \lambda_0$. Reste à voir le cas où $\lambda \in [1, \lambda_0)$. Sachant que

$$S(1)f_\lambda(x) = \lambda[S(\lambda^2)f](\lambda x),$$

remarquons que les fonctions $S(\lambda^2)f$ sont dans un ensemble compact de L^4. Donc il existe R_ε tel que, pour $\lambda \in [1, \lambda_0)$ et $R > R_\varepsilon$

$$(\int_{|x|>R} |S(1)f_\lambda|^4 dx)^{1/4} \leq \varepsilon \ .$$

L'implication inverse ii) $\Longrightarrow$ i) se montre facilement. En effet, si $f_\lambda \rightharpoonup 0$, on en déduit que $S(1)f_\lambda(x) \to 0$ uniformément sur tout compact. On peut alors estimer $\|S(1)f_\lambda\|_{L^4}$ en découpant suivant $|x| \leq R$ et $|x| > R$ ce qui achève la démonstration.

C'est Yves Meyer qui m'a encouragé à poursuivre le travail entrepris dans [Ca-P]. Il m'a en outre dispensé sans compter son temps et ses conseils. Je voudrais dire ici à quel point je lui suis redevable.

Références

[Ca] M. Cannone, *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Editeurs (1995).

[Ca-P] M. Cannonce et F. Planchon, *Self similar solutions for Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, to appear in Comm. in PDE.

[Car] A. Carpio, *Asymptotic Behavior for the Vorticity Equations in dimensions two and three*, Comm. in PDE, 19, p.827-872 (1994).

[Kat] T. Kato, *Strong* L^p *solutions of the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^m$ *with applications to weak solutions*, Math. Zeit., 187, p.471-480 (1984).

[K-F] T. Kato et H. Fujita, *On the non-stationnary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 32 p.243-260 (1962).

[Kav] O. Kavian, *Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation*, Ann. IHP non linéaire, vol. 4 n°5 p. 423-452 (1987)

[Mey] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs I*, Hermann (1990)

[Pee] J. Peetre *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. Series, Duke Univ., Durham (1976).

[Trie] H. Triebel *Theory of function spaces*, Birkhaüser (1983).

Fabrice Planchon
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F - 91128 Palaiseau cedex