SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. GÉRARD

Sur l'équation des ondes non linéaires avec exposant critique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 18, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A18_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SUR L'EQUATION DES ONDES NON LINEAIRES AVEC EXPOSANT CRITIQUE

P. GERARD

(d'après H. BAHOURI et P. GERARD)

Exposé n° XVIII

9 Avril 1996

Sur l'équation des ondes non linéaires avec exposant critique

Patrick GÉRARD

— 9 Avril 1996 —

(d'après H. Bahouri – P. Gérard)

I. – Introduction

Dans ce travail, on continue le programme commencé dans [G1] visant à une description qualitative, dans l'espace d'énergie, des solutions d'équations du type

$$\square\, u + |u|^{p-1}u = 0 \tag{1}$$

où $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ est l'opérateur des ondes sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$, et où p est un réel supérieur à 1.

Notons que toute solution de (1) suffisamment régulière et petite à l'infini satisfait à la loi de conservation de l'énergie,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + \frac{2}{p+1}\,|u(t,x)|^{p+1} \right) dx = \text{cte} := E(u)\,. \tag{2}$$

Il est donc naturel de s'intéresser aux solutions u telles que

$$(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{E}_p)\,, \quad \mathcal{E}_p = (\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)) \times L^2(\mathbb{R}^d)\,, \tag{3}$$

et pour lesquelles la loi de conservation (2) a effectivement lieu. C'est ce que nous appellerons des solutions fortes de (1).

Rappelons brièvement les résultats connus concernant l'existence de ces solutions. Pour $d \leq 2$ ou $d \geq 3$ et $p < \frac{d+2}{d-2} := p_c$, GINIBRE et VELO [GV1] ont montré l'existence et l'unicité de solutions fortes au problème de Cauchy pour (1). De plus, il est montré dans [GV1] que toute solution $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H^1)$ de (1) au sens des distributions, vérifiant $u|_{t=0} \in H^1$ et $\partial_t u|_{t=0} \in L^2$, est une solution forte.

A l'opposé, si $d \geq 3$ et $p > p_c$, le problème de l'existence et de l'unicité de solutions fortes est complètement ouvert. Seul est connu un résultat d'existence de solutions au sens des distributions, pour lesquelles on ne sait montrer ni (2), ni (3), ni l'unicité de Cauchy.

Venons-en au cas qui va nous occuper ici, à savoir le cas limite $d \geq 3$, $p = p_c$, pour lequel SHATAH et STRUVE ont montré récemment [SS2] un résultat d'existence et d'unicité de solutions fortes dans la classe de fonctions vérifiant de plus

$$u \in L^{p_c}_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d)). \tag{4}$$

Remarquons que la condition (4) est exactement celle qui permet d'écrire l'identité d'énergie linéaire pour l'équation (1) (avec $p = p_c$) en considérant la quantité non linéaire comme un terme source. Le résultat de Shatah-Struwe, comme celui de Ginibre-Velo, s'appuie de façon essentielle sur l'estimation fondamentale suivante pour l'équation des ondes linéaires, dite inégalité de Strichartz,

$$\begin{cases} ||u||_{L^q(0,T;L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C\Big[||\nabla u|_{t=0}||_{L^2} + ||\partial_t u|_{t=0}||_{L^2} + ||\square\, u||_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}\Big], \\ d \geq 3, \ \ \dfrac{1}{q} + \dfrac{d}{r} = \dfrac{d}{2} - 1, \ \ q \geq 2 \quad (q > 2 \text{ si } d = 3) \end{cases} \tag{5}$$

où la constante C ne dépend que de la dimension d. Pour la démonstration de (5), on renvoie au récent article de synthèse de GINIBRE-VELO [GV2], où cette inégalité est obtenue comme conséquence d'inégalités plus précises dans le cadre des espaces de Besov.

Observons que, à partir de (4), (5), on obtient aisément les informations plus générales

$$u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^r) \tag{6}$$

où (q, r) est n'importe quel couple de Strichartz donné par (5). Ces informations sont bien sûr également connues dans le cas sous-critique $p < p_c$, mais une différence essentielle est que l'on ne dispose pas, dans le cas critique, d'estimation a priori de la norme $L^q([0,T], L^r)$ de u en fonction de l'énergie de u, ce qui rend l'analyse plus délicate.

Pour simplifier les notations, on fera $d = 3$ (donc $p_c = 5$) dans tout l'exposé, de sorte que l'équation étudiée est

$$\square\, u + |u|^4 u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

Tout ce qu'on va dire se généralise sans difficulté au cas $d > 3$.

Le travail présenté ici a été effectué en collaboration avec H. Bahouri.

II. – Position du problème

On se propose d'étudier l'évolution de singularités fortes de solutions de l'équation (7). Pour cela, on essaie de classifier les familles de solutions bornées dans l'espace d'énergie, modulo des familles relativement compactes, en les comparant à des familles de solutions de l'équation des ondes linéaire.

Introduisons les notations suivantes. On désigne par $\mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ l'espace d'énergie, et on considère les deux groupes à un paramètre suivants :

$$\begin{aligned} U(t) \, : & \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ & (u(0), \partial_t u(0)) \mapsto (u(t), \partial_t u(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0(t) \, : & \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ & (v(0), \partial_t v(0)) \mapsto (v(t), \partial_t v(t)) \end{aligned}$$

où u est solution de (7), et v est solution de l'équation linéaire $\Box\, v = 0$. On note U et U_0 les applications ainsi définies de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Enfin, on note $pr_1 : \mathcal{H} \to \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ la première projection.

Le résultat suivant est une légère généralisation d'un résultat de [G1].

Théorème 0. *Soit $\mathcal{B}$ un ensemble borné de $\mathcal{H}$ tel que*

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\mathcal{B}} \int_{|x|>R} (|\nabla\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2)\, dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0. \tag{8}$$

Pour tout $T > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(U - U_0)(\mathcal{B})$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T], \mathcal{H})$.

(ii) $pr_1(U_0(\mathcal{B}))$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,T], L^6(\mathbb{R}^3))$.

De plus, dans ce cas, $pr_1(U(\mathcal{B}))$ est borné dans

$$L^q([0,T], L^r(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}, \quad q > 2.$$

Commentaires.

La propriété (i) signifie que, lorsque les données de Cauchy varient dans $\mathcal{B}$, les obstructions à la convergence forte sont les mêmes pour la solution non linéaire et pour la solution linéaire. En ce sens, elle peut être vue comme un résultat très général d'optique géométrique non linéaire au premier ordre.

La propriété (ii) ne porte que sur la famille de solutions linéaires et est donc plus facilement analysable. En gros, elle exprime que cette famille de solutions ne doit pas présenter un certain type de concentrations, que l'on peut décrire plus précisément à l'aide de mesures de défaut microlocales [G1,2].

Remarques.

– Dans le cas sous-critique, (1) est toujours vraie ([G1]),

– dans le cas particulier où $\mathcal{B}$ est relativement compact, on retrouve un théorème de stabilité très proche du résultat d'existence de SHATAH-STRUWE [S2].

Le but de ce travail est d'étudier des familles de solutions ne vérifiant pas la condition (i). Voici un exemple important.

Soit $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Posons $\mathcal{B} = \{(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon), 0 < \varepsilon \leq 1\}$, où $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ est caractérisée par

$$U_0(1)(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right).$$

Il est aisé de vérifier que $\mathcal{B}$ satisfait à la condition (ii) si et seulement si $T < 1$. Le problème se pose donc de décrire la solution non linéaire $U(t)(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ pour $t \geq 1$, c'est-à-dire après le temps de concentration de la solution linéaire.

III. – Résultats

Commençons par traiter l'exemple cité plus haut. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note D_ε l'opérateur unitaire de $\mathcal{H}$ défini par

$$D_\varepsilon(\Phi, \Psi)(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \tag{9}$$

Théorème 1.

1) Le groupe $(U(t))$ est asymptotiquement complet par rapport au groupe $(U_0(t))$. De plus, l'opérateur de scattering est donné par

$$S = \lim_{(t,s)\to(+\infty,-\infty)} U_0(-t)\,U(t)\,U(-s)\,U_0(s) \tag{10}$$

pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{H}$.

2) Pour tout $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{H}$, on a, localement uniformément pour $t > 1$,

$$\Big|\Big| U(t)\,U_0(-1)\,D_\varepsilon(\Phi,\Psi) - U_0(t)\,U_0(-1)\,D_\varepsilon S(\Phi,\Psi) \Big|\Big|_{\mathcal{H}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Commentaires.

– La partie 2) signifie que, après le temps de concentration $t = 1$, la solution non linéaire peut encore être décrite au premier ordre par une solution linéaire, mais correspondant à un nouveau profil de concentration, déduit du précédent à l'aide de l'opérateur de scattering. La démonstration de 2) est une conséquence immédiate de la formule (10) et de la remarque suivante :

$$U_0(t)\,D_\varepsilon = D_\varepsilon\,U_0\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big), \quad U(t)\,D_\varepsilon = D_\varepsilon\,U\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\,. \tag{11}$$

– La partie 1) peut être vue comme une généralisation des résultats de MORAWETZ-STRAUSS [MS] et GINIBRE-VELO [GV3] au cas critique. Dans ce cas, on disposait déjà de résultats dans les cas particuliers de petites énergies [P], de solutions radiales [GSV].

Indications sur la démonstration de la partie 1).

La complétude asymptotique est une conséquence facile du résultat suivant, récemment démontré par H. BAHOURI et J. SHATAH [BS], et qui est une version globale en temps du résultat de SHATAH-STRUWE [S1] :

Lemme 1. *Soit u une solution de (7) au sens de Shatah-Struwe (c'est-à-dire que $(u(t,x), \partial_t u(t,x)) = U(t)(\varphi,\psi)(x)$ avec $(\varphi,\psi) \in \mathcal{H}$). Alors*

$$u \in L^5(\mathbb{R}, L^{10}(\mathbb{R}^3))\,.$$

La clé du lemme 1, comme celle du résultat de Shatah-Struwe, est une inégalité importante, variante de celle de MORAWETZ [M] et déjà utilisée dans [S], [Gr] et [SS1], qui permet de contrôler plus précisément la partie non linéaire de l'énergie. Il est utile d'en donner une version générale, avant tout passage à la limite.

Lemme 2. *Soit $u = u(t,x)$ une solution de (7) au sens de Shatah-Struwe. Pour tout $t > 0$, posons*

$$E(t) = \int_{|x|<t} \left(\frac{1}{2} |\partial_t u(t,x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{6} |u(t,x)|^6 \right) dx \, .$$

Alors, pour tous a, b tels que $0 < a < b$, on a

$$\int_{|x|<b} |u(b,x)|^6 \, dx \leq C_0 \left[\frac{a}{b} (E(a) + E(a)^{1/3}) + E(b) - E(a) + (E(b) - E(a))^{1/3} \right] \tag{12}$$

où C_0 est une constante universelle.

On donne une idée de la démonstration du lemme 2 en appendice. Expliquons maintenant comment il entraîne le lemme 1. A cause de l'identité d'énergie, la fonction E est croissante et bornée par l'énergie totale $\mathcal{E}$, donc a une limite en $+\infty$. Posons $b = T$, $a = \varepsilon T$ et passons à la limite dans l'inégalité (12) quand $T \to \infty$. Il vient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \int_{|x|<T} |u(T,x)|^6 \, dx \leq C_0 \, \varepsilon (\mathcal{E} + \mathcal{E}^{1/3})$$

donc $\int_{|x|<T} |u(T,x)|^6 \, dx \to 0$. En utilisant l'invariance par translation en temps et la vitesse finie de propagation, on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(T,x)|^6 \, dx \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \, . \tag{13}$$

En appliquant l'inégalité de Strichartz (5) à l'équation (7), il vient, pour $S > T$,

$$||u||_{L^4([T,S],L^{12})} \leq C\big(\mathcal{E} + ||u||^5_{L^5([T,S],L^{10})}\big) \tag{14}$$

et l'inégalité d'interpolation

$$||u||^5_{L^5(L^{10})} \leq ||u||^4_{L^4(L^{12})} ||u||_{L^\infty(L^6)} \tag{15}$$

jointe à (13) permet de conclure que $u \in L^4([0,\infty[, L^{12})$, puis $u \in L^5([0,\infty[, L^{10})$ (en fait $u \in L^q([0,\infty[, L^r)$, $\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}$, $q > 2$).

Notons pour terminer que l'identité (10) n'est nullement une conséquence triviale de la complétude asymptotique, car les isométries $U(t)$ sont non linéaires! Pour établir (10), on combine les deux informations suivantes, qui sont des variantes du théorème 0.

a) La famille $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est équicontinue en tout point de $\mathcal{H}$.

b) Soit $\mathcal{B}$ une partie bornée de $\mathcal{H}$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $T > 0$, l'inégalité

$$\sup_{0\leq t\leq T}\ \sup_{(\varphi,\psi)\in\mathcal{B}} ||pr_1 U_0(t)(\varphi,\psi)||_{L^6} \leq \delta$$

entraîne que $(U(t))_{t\in[0,T]}$ est uniformément équicontinue sur $\mathcal{B}$.

Généralisation.

On peut se demander ce qui reste du théorème 1 pour des parties $\mathcal{B}$ plus générales violant la propriété (ii) du théorème 0. Il s'agit d'un problème délicat, car il est directement relié à la description précise des bornés de $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ qui ne sont pas (localement) relativement compacts dans $L^6(\mathbb{R}^3)$. Voici un résultat dans cette direction, utilisant le principe de "concentration-compacité microlocale" de [G1,2].

Soit (v_n) une suite de solutions de $\Box\, v_n = 0$, telle que

$$|\partial_t v_n(0,x)|^2 + |\nabla v_n(0,x)|^2 \rightharpoonup e_0\,\delta(x) \tag{16}$$

au sens de la convergence étroite des mesures sur $\mathbb{R}^3$. Alors le principe de propagation de l'énergie microlocale (voir par exemple [G1]) montre qu'il existe une mesure ν de masse e_0, supportée par $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour toute fonction continue bornée a sur $\mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\partial_t v_n(t,x)|^2 + |\nabla v_n(t,x)|^2\right) a(x)\,dx \to \int_{S^2} a(t\xi)\,d\nu(\xi)\,. \tag{17}$$

Appelons ν une mesure d'énergie pour la suite (v_n). Par ailleurs, fixons $t_0 < 0$, et définissons une suite (u_n) de solutions de (7) au sens de Shatah-Struwe par

$$(u_n, \partial_t u_n)|_{t=t_0} = (v_n, \partial_t v_n)|_{t=t_0}\,.$$

Compte tenu de (16), le théorème de [G1] entraîne que, localement uniformément pour $t < 0$,

$$||(u_n,\partial_t u_n)(t) - (v_n,\partial_t v_n)(t)||_{\mathcal{H}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{18}$$

Que peut-on dire de (u_n) pour $t > 0$?

Théorème 2. *Il existe une suite $(\tilde{v}_n)$ de solutions de $\Box\,\tilde{v}_n = 0$ telle que*

$$|\partial_t \tilde{v}_n(0,x)|^2 + |\nabla \tilde{v}_n(0,x)|^2 \rightharpoonup e\,\delta(x)$$

et, localement uniformément pour $t > 0$,

$$||(u_n, \partial_t u_n)(t) - (\tilde{v}_n, \partial_t \tilde{v}_n)(t)||_{\mathcal{H}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus, il existe $\varepsilon > 0$, dépendant seulement de l'énergie e, tel que, si (v_n) a une unique mesure d'énergie du type $\nu = h\,d\sigma + \nu_s$, où $d\sigma$ est la mesure de surface sur S^2, $\nu_s \perp \sigma$ et $\int_{S^2} h\,d\sigma \leq \varepsilon$, alors toute mesure d'énergie de $(\tilde{v}_n)$ est du type $\tilde{\nu} = \tilde{h}\,d\sigma + \nu_s$ (i.e. la partie singulière est conservée).

Principe de la démonstration.

Pour la première partie, il suffit de montrer que, localement uniformément pour $t > 0$, on a $||u_n(t)||_{L^6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (raisonner ensuite comme en (14), (15)). Pour cela, on remarque d'abord que, par vitesse finie de propagation, (u_n) est asymptotiquement à support dans $|x| \leq t$. On applique alors le lemme à $u_n(t-\varepsilon, x)$ avec $a = \varepsilon$, $b = t+\varepsilon$, $t > 0$, et on fait tendre d'abord n vers l'infini, puis ε vers 0. La contribution de $E(b) - E(a)$ disparaît quand n tend vers l'infini, à cause de la conservation de l'énergie et de la propriété de localisation ci-dessus.

La seconde partie demande plus de soin. Tout d'abord, on montre que, quitte à extraire une sous-suite,

$$v_n = v_n' + v_n''$$

où (v_n'), (v_n'') sont des ondes linéaires de mesures d'énergie $\nu' = h\,d\sigma$ et $\nu'' = \nu_s$ respectivement. Posons $e' = \int h\,d\sigma$, $e'' = \int \nu_s$.

Soient u_n', u_n'' les ondes non linéaires ayant mêmes données de Cauchy que v_n', v_n'' en $t = t_0$. Alors le théorème de [G1] entraîne que $u_n'' - v_n''$ tend vers 0 en énergie pour tout t. D'autre part, comme l'énergie e_0' de u_n' est assez petite, on peut montrer que $u_n - (u_n' + v_n'')$ tend vers 0 en énergie pour tout t. En appliquant la première partie du théorème à u_n et à u_n', on en déduit

$$\tilde{v}_n = \tilde{v}_n' + v_n''$$

où $\tilde{v}'_n$ a pour énergie e', v''_n a pour énergie e''. Soit $\tilde{\nu}' = \tilde{h}\,d\sigma + \nu'_s$ la mesure d'énergie de $\tilde{v}'_n$. Il s'agit de montrer que $\nu'_s = 0$. Pour cela, posons $e_1 = \int \tilde{h}\,d\sigma$, $e_2 = \int \nu'_s$ et décomposons à nouveau

$$\tilde{v}'_n = \tilde{v}_n^{(1)} + \tilde{v}_n^{(2)}.$$

Le raisonnement précédent nous donne, en repassant du côté $t < 0$,

$$v'_n = v_n^{(1)} + \tilde{v}_n^{(2)},$$

où $\tilde{v}_n^{(2)}$ a pour mesure ν'_s et $v_n^{(1)}$ a pour énergie e_1. Comme la mesure de v'_n est $h\,d\sigma$ donc singulière à celle de $\tilde{v}_n^{(2)}$, l'énergie de $v_n^{(1)} = v'_n - \tilde{v}_n^{(2)}$ est

$$e_1 = e' + e_2.$$

Par ailleurs, le bilan d'énergie pour $t > 0$ donnait $e' = e_1 + e_2$. On en déduit $e_2 = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarques.

1) L'hypothèse de petitesse de la partie absolument continue de l'énergie nous a été nécessaire à cause du manque d'estimations a priori pour l'équation (7).

2) Dans le cadre du théorème 1, on a pu se passer de l'hypothèse de petitesse. De plus la description de la solution à l'aide de profils est bien sûr plus précise que la description de la mesure d'énergie (qui correspond en gros au carré du module de la transformée de Fourier du profil).

APPENDICE

Esquisse de la démonstration du lemme 2.

Nous reprenons les notations de [SS1]. On désigne par K_a^b le tronc de cône $\{(x,t, a \leq t \leq b, |x| \leq t\}$ par $D(t)$ la boule $\{(x,t), |x| \leq t\}$ et par M_a^b le "manteau" $\{(x,t), a \leq t \leq b, |x| = t\}$ de sorte que

$$\partial K_a^b = D(a) \cup M_a^b \cup D(b) .$$

En multipliant par $\partial_t \bar{u}$ l'équation (7) $\Box\, u + |u|^4 u = 0$, et en intégrant la partie réelle sur K_a^b, on obtient classiquement l'identité d'énergie,

$$E(b) - E(a) = \int_{M_a^b} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{x}{t} \partial_t u + \nabla u \right|^2 + \frac{|u|^6}{6} \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{2}} . \tag{19}$$

Par ailleurs, en multipliant par $L\bar{u} = (t\partial_t + x \cdot \nabla + 1)\,\bar{u}$ l'équation (7) et en intégrant la partie réelle sur K_a^b, on obtient l'indentité suivante,

$$H(b) - H(a) + \frac{1}{3} \int_{K_a^b} |u|^6 \, dx\, dt = \int_{M_a^b} \left| \frac{1}{t} Lu \right|^2 t \frac{d\sigma}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

où l'on a posé

$$H(t) = \int_{D(t)} t \left[\frac{1}{2} \left| \frac{1}{t} Lu \right|^2 + \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 - \left| \frac{x}{t} \cdot \nabla u \right|^2 \right) + \frac{|u|^6}{6} \right] + \frac{|u|^2}{t} dx . \tag{21}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} \int_{D(t)} |u|^6 \, dx \leq \frac{1}{t} H(t) &\leq C_1 \left(E(t) + \int_{D(t)} \frac{|u|^2}{t^2} dx \right) \\ &\leq C_2 (E(t) + E(t)^{1/3}) , \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant une simple conséquence de l'inégalité de Hölder. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{M_a^b} t \left| \frac{1}{t} Lu \right|^2 \frac{d\sigma}{\sqrt{2}} &\leq \int_{M_a^b} \left(2b \left| \frac{x}{t} \partial_t u + \nabla u \right|^2 + \frac{2|u|^2}{t} \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{2}} \\ &\leq bC_3 \Big(E(b) - E(a) + (E(b) - E(a))^{1/3} \Big) \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau Hölder puis en comparant avec (19). En revenant à (20), on obtient finalement

$$\int_{D(b)} |u|^6\, dx \leq \frac{a}{b} C_2(E(a) + E(a)^{1/3}) + C_3\big(E(b) - E(a) + (E(b) - E(a))^{1/3}\big)$$

ce qui donne l'inégalité (12) cherchée.

Bibliographie

[BS] H. Bahouri, J. Shatah : *Global estimate for the critical semilinear wave equation,* en préparation.

[G1] P. Gérard : *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations,* à paraître à J. Funct. Analysis.

[G2] P. Gérard : *A microlocal version of concentration-compactness,* in Partial Differential Equations and Mathematical Physics, 143–157, L. Hörmander and A. Melin editors, Birkhäuser, 1996.

[GV1] J. Ginibre, G. Velo : *The Global Cauchy Problem for the Non Linear Klein-Gordon Equation,* Math. Z. **189** (1985), 487–505.

[GV2] J. Ginibre, G. Velo : *Generalized Strichartz Inequalities for the Wave Equation,* J. Funct. Analysis, **133** (1995), 50–68.

[GV3] J. Ginibre, G. Velo : *Scattering theory in the energy space for a class of non linear wave equations,* Commun. Math. Phys. **123** (1989), 535–573.

[GSV] J. Ginibre, H. Soffer, G. Velo : *The Global Cauchy Problem for the Critical Non Linear Wave Equation,* J. Funct. Anal. **110** (1992), 96–130.

[Gr] M. Grillakis : *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical nonlinearity,* Ann. of Math., **132** (1990), 485–509.

[M] C. Morawetz : *Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equation,* Proc. Royal Soc. London A **306** (1968), 291–296.

[MS] C. Morawetz, W. Strauss : *Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., **25** (1972), 1–31.

[P] H. PECHER : *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon Equations,* Math. Z. **185** (1984), 261-270.

[S] M. STRUWE : *Globally Regular Solutions to the u^5 Klein Gordon Equation,* Annali Scuola Norm. Pisa, **15** (1988), 495–513.

[SS1] J. SHATAH, M. STRUWE : *Regularity Results for Nonlinear Wave Equations,* Ann. Math., **138** (1993), 503–518.

[SS2] J. SHATAH, M. STRUWE : *Well-Posedness in the Energy Space for Semilinear Wave Equations with Critical Growth,* IMRN **7** (1994), 303–309.

Hajer BAHOURI
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
1060 Tunis, TUNISIE

Patrick GÉRARD
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
91405 Orsay Cedex, FRANCE