

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

## Propagation des ondes dans les variétés à coins

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1995-1996), exp. n° 16,  
p. 1-18

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1995-1996\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996___A16_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1995-1996

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### **PROPAGATION DES ONDES DANS LES VARIETES A COINS**

**G. LEBEAU**

Exposé n° XVI

21 Novembre 1995



# PROPAGATION DES ONDES DANS LES VARIÉTÉS À COINS

Gilles LEBEAU

*Université de Paris-Sud  
Département de Mathématiques, Bât. 425  
91405 Orsay Cedex, France*

---

## I. – Introduction et résultats

Soit  $\mathcal{M}$  une variété analytique réelle, munie d'une métrique riemannienne analytique  $g$  et  $\omega$  un ouvert connexe relativement compact de  $\mathcal{M}$ . D'après le théorème de Hille-Yosida, le problème d'évolution avec condition de Dirichlet au bord, où  $\Delta$  est le Laplacien négatif sur  $(\mathcal{M}, g)$

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, & u|_{\partial\omega} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, & \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \quad (u_0, u_1) \in H_0^1(\omega) \oplus L^2(\omega)$$

possède une solution unique  $u(t, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}_t, H_0^1(\omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$ . Nous nous intéressons ici à la microlocalisation et à la propagation des singularités analytiques pour les solutions de (1). Le théorème de propagation a été prouvé par J. SJÖSTRAND [S.2] dans le cas où  $\omega$  est une variété à bord analytique, et dans [L.2] dans le cas où  $\partial\omega$  ne présente que des singularités de type dièdre (*i.e.* intersection de deux hypersurfaces analytiques transverses). Dans le cas de singularités coniques strictes (*i.e.*  $\omega \simeq \mathbb{R}_+^* \times N$ ,  $g = dr^2 + r^2 g'$ ,  $(N, g')$  variété riemannienne) la propagation des singularités a été étudiée dans la catégorie  $C^\infty$  par CHEEGER-TAYLOR [C-T] et dans le cas analytique par ROULEUX [R] en utilisant la méthode de séparation des variables.

Notre objectif est d'étendre les résultats précédents à une classe d'ouvert  $\omega$  assez générale pour couvrir en particulier les situations de singularités coniques courbes (par exemple une ogive dans  $\mathbb{R}^3$ ), de singularités de type quadrant  $((\mathbb{R}_+^*)^p \times \mathbb{R}^q)$ , des

discontinuités de courbure (raccord  $C^1$  de deux hypersurfaces) ou encore des cas où  $\omega$  n'est pas d'un seul côté de sa frontière (par exemple un écran de  $\mathbb{R}^3$ ).

L'hypothèse de départ que nous faisons sur la géométrie est que nous supposons donnée une stratification finie de l'adhérence de  $\omega$

$$(2) \quad \bar{\omega} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i, \quad I \text{ fini}, \quad 0 \in I, \quad \mathcal{S}_0 = \omega$$

où les strates  $\mathcal{S}_i$  sont des sous variétés analytiques connexes de codimension  $d(i)$ , deux à deux disjointes, vérifiant

$$(3) \quad i \neq j \text{ et } \bar{\mathcal{S}}_i \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset \implies \mathcal{S}_j \subset \bar{\mathcal{S}}_i \text{ et } d(j) > d(i).$$

Pour  $m \in \bar{\omega}$ , on note  $I(m) = \{i, m \in \bar{\mathcal{S}}_i\}$  et on désigne par  $i(m)$  l'unique élément de  $I$  tel que  $m \in \mathcal{S}_{i(m)}$ . On a  $0 \in I(m)$  pour tout  $m$ , et si  $m \in \omega$ ,  $I(m) = \{0\}$ .

La première hypothèse que nous faisons est de supposer la stratification localement triviale, c'est-à-dire

(H.1) Pour tout  $m \in \bar{\omega}$ , il existe un système de coordonnées locales  $x = (x', x'')$  centré en  $m$ ,  $x' \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = \text{codim}(\mathcal{S}_{i(m)})$ ,  $x'' \in \mathbb{R}^q$ ,  $d+q = \dim \mathcal{M}$ , un  $\varepsilon_0 > 0$ , et pour tout  $i \in I(m)$  des sous-variétés analytiques connexes  $\mathcal{S}'_i$  de  $\mathcal{M}' = \{x' \in \mathbb{R}^d, |x'| < \varepsilon_0\}$  tels que  $\mathcal{S}'_{i(m)} = \{x' = 0\}$  et

$$(4) \quad \mathcal{S}_i \cap \{|x'| < \varepsilon_0, |x''| < \varepsilon_0\} = \mathcal{S}'_i \times \{|x''| < \varepsilon_0\} \quad \forall i \in I(m).$$

◇

On suppose ici que  $\varepsilon_0$  est assez petit pour que toute strate  $\mathcal{S}_i$  qui rencontre  $\{|x'| < \varepsilon_0, |x''| < \varepsilon_0\}$  vérifie  $i \in I(m)$ ; pour  $i \in I(m) \setminus i(m)$  on a d'après (3)  $\text{codim}(\mathcal{S}'_i) < d$ . Si on pose  $\omega' = \mathcal{S}'_0$  on a alors une stratification de l'adhérence  $\bar{\omega}'$  de  $\omega'$  dans  $\mathcal{M}'$

$$(5) \quad \bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i.$$

L'hypothèse (H.1) est triviale pour  $m \in \omega$ . Pour  $m \in \bar{\omega} \setminus \omega$ , notons  $g_m$  la métrique induite par  $g$  sur la fibre  $L_m$  en  $m$  du fibré normal à  $\mathcal{S}_{i(m)}$  dans  $\mathcal{M}$  (*i.e.* la restriction de  $g$  à l'orthogonal du tangent à la strate  $\mathcal{S}_{i(m)}$ ); le système de coordonnées précédent nous permet d'identifier  $L_m$  à  $\mathbb{R}_{x'}^d$ .

La deuxième hypothèse que nous faisons (explicitée dans le §. II) est

$$(H.2) \quad \text{le couple } (\bar{\omega}' = \cup S'_i, g_m) \text{ est sous-conique .}$$

L'hypothèse (H.2) est stable par petite perturbation de la forme quadratique  $g_m$  de sorte que si (H.2) est vérifié en un point  $m \in S_{i(m)}$  (H.2) est vérifié en tout point  $m' \in S_{i(m)}$  voisin de  $m$  sur la même strate.

Dans toute la suite, on posera

$$(6) \quad M = \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t; \quad \Omega = \omega \times \mathbb{R}_t; \quad S_i = S_i \times \mathbb{R}_t \quad i \in I$$

$$(7) \quad P = \partial_t^2 - \Delta.$$

Pour tout point  $(m, t_0) \in \bar{\Omega}$ , on notera à nouveau  $x = (x', x'')$  (par abus) un système de coordonnées locales centré en  $(m, t_0)$  fournit par l'hypothèse (H.1),  $x' = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $d = \text{codim } S_{i(m)}$ , avec cette fois  $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_m, x_{m+1} = t - t_0)$ ,  $m = \dim \mathcal{M}$ . Dans ce système de coordonnées le symbole principal  $p(x, \xi)$  de  $P$  s'écrit

$$(8) \quad p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu) A(x) (\xi' - \nu) + R(x, \xi'')$$

où  $\nu = \nu(x, \xi'')$  est linéaire en  $\xi''$ ,  $R(x, \xi'')$  quadratique en  $\xi''$  et  $A(x)$  est une matrice réelle symétrique  $d \times d$ . Si  $S = S_{i(m)}$  est la strate à laquelle appartient  $(m, t_0)$ , les fibrés vectoriels sur  $S$ ,  $T_S M$  (fibré normal à  $S$ ) et  $T_S^* M$  (fibré conormal à  $S$ ) sont en dualité, et la métrique duale de la métrique induite par  $g$  sur  $T_S M = T_S \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t \simeq (TS)_g^\perp \times \mathbb{R}_t$  est la restriction de  $p$  à  $T_S^* M = \{x' = 0, \xi'' = 0\}$ , dont la matrice dans le système de coordonnées précédent est  $A(0, x'') \gg 0$  (car si  $i^* : T^* \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} T \mathcal{M}$  est l'isomorphisme défini par la métrique  $g : \langle \xi, u \rangle = (i^*(\xi)|u)_g$ , on a  $i^*(T_S^* \mathcal{M}) = (TS)_g^\perp$ .) Bien sûr, lorsque  $d = 0$ , (*i.e.*  $m \in \omega$ ) on a  $p = R$ , et  $A$  et  $\nu$  n'existent pas.

Par un changement de variables de la forme  $y' = x'$ ,  $y''_k = x''_k + \sum_{j=1}^d \theta_{j,k}(x'') x'_j$  (qui préserve (H.1) et (H.2)) on peut toujours supposer, ce que nous ferons par la suite

$$(9) \quad \nu(x' = 0, x'', \xi'') \equiv 0$$

et on posera

$$(10) \quad A_0(x') = A(x' = 0, x''); \quad R_0(x'', \xi'') = R(x' = 0; x'', \xi'').$$

On définit le conormal à  $\bar{\Omega}$  par

$$(11) \quad T_{\bar{\Omega}}^* = \bigcup_{i \in I} T_{S_i}^* M.$$

C'est un fermé de  $T^*M$  d'après (H.1). On pose

$$(12) \quad \dot{T}_b^* \Omega = \bigcup_{i \in I} T^* S_i \setminus S_i$$

et on note  $\pi$  la projection canonique surjective

$$(13) \quad \pi : T^* M|_{\bar{\Omega}} \setminus T_{\bar{\Omega}}^* \longrightarrow \dot{T}_b^* \Omega.$$

On appelle espace de phase du problème (1) l'espace  $\dot{T}_b^* \Omega$  munit de la topologie image par  $\pi$  et de l'action naturelle de  $\mathbb{R}_+^*$  dans les fibres.

Soit  $\text{Car } P = p^{-1}(0) \subset T^*M$  la variété caractéristique de  $P$ . On définit les régions elliptiques  $\mathcal{E}$ , glancing  $\mathcal{G}$  et transverses  $\mathcal{T}$  de  $\dot{T}_b^* \Omega$  par

$$(14) \quad \begin{cases} \rho \in \mathcal{E} \iff \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } P = \emptyset \\ \rho \in \mathcal{G} \iff \#\{\pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } P\} = 1 \\ \rho \in \mathcal{T} \iff \rho \notin \mathcal{E} \cup \mathcal{G} \end{cases}$$

et on pose

$$(15) \quad \Sigma_b = \mathcal{G} \cup \mathcal{T} = \pi(\text{Car } P) = \dot{T}_b^* \Omega \setminus \mathcal{E}.$$

On appelle  $\Sigma_b$  la variété caractéristique du problème 1.

On notera  $\hat{\pi}$  la restriction de  $\pi$  à  $\text{Car } P$ . Par construction  $\mathcal{E}$  est ouvert,  $\Sigma_b$  fermé;  $\pi$  et  $\hat{\pi}$  définissent la même topologie sur  $\Sigma_b$ , et  $\Sigma_b$  est un espace métrisable localement compact.

Si  $S = S_i$  est une des strates de la stratification de  $\bar{\Omega}$ , on notera  $\mathcal{E}_S = \mathcal{E} \cap \dot{T}^* S$ ,  $\mathcal{G}_S = \mathcal{G} \cap \dot{T}^* S$ ,  $\mathcal{T}_S = \mathcal{T} \cap \dot{T}^* S$ ; on remarquera que dans le cas  $S = S_0 = \Omega$ , on a  $\mathcal{T}_{S_0} = \emptyset$  et  $\mathcal{G}_{S_0} = \text{Car } P|_{\Omega}$ .

Pour  $u$  solution de (1), on note  $\underline{u}$  le prolongement de  $u$  par zéro hors de  $\bar{\Omega}$

$$(16) \quad \underline{u}(x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega; \quad \underline{u}(x) = 0 \quad \forall x \notin \bar{\Omega}.$$

**Définition I.1.** Le spectre de  $u$ ,  $SS_b(u)$ , est le sous-ensemble de  $\dot{T}_b^* \Omega$  défini par

$$(17) \quad SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_{\bar{\Omega}}^*)$$

où  $SS(\underline{u}) \subset T^*M|_{\bar{\Omega}}$  est le spectre analytique de Sato de  $\underline{u}$ . ◇

On a alors les résultats suivants.

**Théorème 1.** (Régularité elliptique)

Pour  $u$  solution de (1),  $SS_b(u)$  est fermé, homogène, contenu dans  $\Sigma_b$ .

Pour étudier la propagation du spectre de  $u$  dans  $\Sigma_b$ , nous utiliserons la construction suivante des rayons optiques.

Pour  $\rho \in \Sigma_b$ , soit  $K_\rho$  le compact de  $\text{Car}P$

$$(18) \quad K_\rho = \hat{\pi}^{-1}(\rho) = \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}P.$$

Nous noterons  $\mathcal{F}_\rho$  l'espace des fonctions analytiques réelles  $f$  définies dans un voisinage  $U$  de  $K_\rho$  dans  $\text{Car}P$ , et  $\pi$  invariante (i.e. pour  $\sigma, \sigma' \in T^*M|_{\bar{\Omega}} \cap U$ ,  $\pi(\sigma) = \pi(\sigma') \Rightarrow f(\sigma) = f(\sigma')$ ). Pour  $f \in \mathcal{F}_\rho$ , on note  $f_\pi$  la fonction continue définie près de  $\rho \in \Sigma_b$  qui rend commutatif le diagramme

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} T^*M|_{\bar{\Omega}} \cap U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \hat{\pi} \downarrow & \nearrow f_\pi & \\ \Sigma_b & & \end{array}$$

**Définition I.2.** Un rayon est une application  $\gamma$  de  $I$  (intervalle de  $\mathbb{R}$ ) dans  $\Sigma_b$ , qui vérifie

- i)  $\gamma$  est continue (1ère loi de Descartes).
- ii) Si  $\rho_0 = \gamma(s_0) \in \mathcal{G}$ , pour tout  $f \in \mathcal{F}_{\rho_0}$ , la fonction  $s \mapsto f_\pi(\gamma(s))$  est dérivable en  $s_0$  et avec  $q_0 = \hat{\pi}^{-1}(\rho_0)$  on a

$$(20) \quad \frac{d}{ds} f_\pi \circ \gamma(s_0) = \{p, f\}(q_0) = df(q_0)(H_p(q_0)).$$

- iii) Si  $\rho_0 = \gamma(s_0) \in \mathcal{T} \cap T^*S_i$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$(21) \quad s \in I \quad \text{et} \quad 0 < |s - s_0| < \varepsilon_0 \implies \gamma(s) \notin T^*S_i.$$



Les rayons vérifient les deux propriétés suivantes.

a) Pour tout  $s_0 \in I$ , il existe deux éléments (uniques)  $q_d$  et  $q_g$  de  $K_{\rho_0}$ ,  $\rho_0 = \gamma(s_0)$  tels que pour tout  $f \in \mathcal{F}_{\rho_0}$ ,  $s \mapsto f_\pi \circ \gamma$  est dérivable à gauche et à droite en  $s_0$  et

$$(22) \quad \left( \frac{d}{ds} \right)_{g,d} (f_\pi \circ \gamma)(s_0) = \{p, f\}(q_{g,d}).$$

En particulier, comme on a toujours  $t, \tau \in \mathcal{F}_{\rho_0}$ , les fonctions  $t$  et  $\tau$  sont bien définies sur  $\Sigma_b$ . On a  $\tau \neq 0$  sur  $\Sigma_b$  d'après (8) (car  $R|_{\tau=0} \gg 0$ ) et sur tout rayon d'après (22),  $\dot{\tau} = 0$  et  $\dot{t} = -2\tau$ .

b) Une limite uniforme de rayons est un rayon.

Si  $S = S_i$  est une des strates et  $\rho_0 \in \mathcal{T}_S$ , pour  $a > 0$  on note  $\Gamma_{\rho_0,a}^-$  (resp.  $\Gamma_{\rho_0,a}^+$ ) les rayons entrants (resp. sortants) en  $\rho_0$

$$(23) \quad \begin{cases} \Gamma_{\rho_0,a}^- = \left\{ \text{rayons } [-a, 0[ \xrightarrow{\gamma} \Sigma_b \lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = \rho_0 \right\} \\ \Gamma_{\rho_0,a}^+ = \left\{ \text{rayons } ]0, a] \xrightarrow{\gamma} \Sigma_b \lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = \rho_0 \right\}. \end{cases}$$

Le théorème de réflexion transverse s'énonce alors

**Théorème 2.** (Réflexion) *Soit  $\sigma = \pm 1$  un signe.*

*Soit  $u$  solution de (1), et  $\rho_0 \in \mathcal{T}_S$ . On suppose qu'il existe  $W$  voisinage de  $\rho_0$  dans  $\Sigma_b$  et  $a_0 > 0$  tels que pour tout  $\rho \in W$  tel qu'il existe  $\gamma \in \Gamma_{\rho_0,a}^\sigma$  ( $0 < a < a_0$ ), avec  $\gamma(\sigma a) = \rho$ , on a  $\rho \notin SS_b(u)$ . Alors  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ .*

Soit à présent  $S$  une des strates,  $\rho_0 \in \mathcal{G}_S$ ,  $q_0$  l'unique point de  $\text{Car } P$  tel que  $\hat{\pi}(q_0) = \rho_0$ . On se place dans le système de coordonnées locales où  $p$  est donné par (8) et on se donne  $\Theta(x'', \xi'')$  une fonction analytique définie près de  $\rho_0$  dans  $T^*S$  et vérifiant  $\Theta(\rho_0) = 0$ ,  $\{R_0, \Theta\}(\rho_0) \neq 0$ . Dans ce système de coordonnées,  $\Theta$  définit une fonction sur  $\Sigma_b$  près de  $\rho_0$ .

Le théorème microhyperbolique s'énonce alors

**Théorème 3.** (Microhyperbolicité)

*Soit  $u$  solution de (1);  $\rho_0, \Theta$  comme précédemment. On suppose qu'il existe  $V$  voisinage de  $\rho_0$  dans  $\Sigma_b$  tel que  $\rho \in V$  et  $\Theta(\rho) < 0$  impliquent  $\rho \notin SS_b(u)$ . Alors  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ .*

A partir des théorèmes 1, 2, 3, on déduit alors en suivant la méthode de MELROSE-SJÖSTRAND [M-S] le

**Théorème 4.** (Propagation)

*Pour  $u$  solution de (1), le fermé  $SS_b(u)$  de  $\Sigma_b$  est une union de rayons maximaux (i.e. de rayons  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_b$ ).*

**Remarque.** Le lecteur notera que les définitions de  $\dot{T}_b^*\Omega$ ,  $SS_b(u)$  dépendent de la stratification choisie de  $\bar{\Omega}$ , mais pas du système de coordonnées locales  $(x', x'')$  qui redresse la stratification près de chaque strate. Bien sûr, un choix stupide de stratification (par exemple en introduisant des strates fictives) donnera un mauvais résultat dans le théorème 4. De même, lorsqu'on travaille près d'un point  $x_0$  de  $\bar{\Omega}$ , on aura intérêt à remplacer, près de  $x_0$ ,  $\Omega$  par chacune de ses composantes connexes locales. L'auteur ne sait pas donner une formulation intrinsèque sur  $\Omega$  des résultats précédents.  $\diamond$

Les théorèmes 1 à 4 sont de nature locale près de chaque point  $z_0 = (m_0, t_0)$  de  $\bar{\Omega}$ . La stratégie de la preuve de ces théorèmes consiste à procéder par récurrence sur la codimension des strates. Pour  $d = 0$ ,  $S = S_0 = \Omega$  on a  $SS_b(u)|_\Omega = SS(u)$ ,  $\dot{T}_b^*\Omega|_{S_0} = \dot{T}^*\Omega$ ,  $\pi|_{\dot{T}^*\Omega} = \text{Id}$  et les théorèmes 1, 4 sont les résultats classiques de régularité elliptique et de propagation à l'intérieur de SATO (voir [S-K-K]) et le théorème 2 est un cas particulier du théorème microhyperbolique de KASHIWARA-KAWAI (voir [K-K]). Pour  $d \geq 1$ , on travaille dans le système de coordonnées locales  $(x', x'')$  qui redresse la stratification avec  $S = \{x' = 0\}$ . On appelle  $x'$  les variables normales et  $x''$  les variables tangentielles. D'après (8) et (10) on a

$$(24) \quad \mathcal{E}_S = \{R_0 > 0\}; \quad \mathcal{G}_S = \{R_0 = 0\}; \quad \mathcal{T}_S = \{R_0 < 0\}.$$

Par exemple si  $\text{codim } S = d = \dim \mathcal{M}$  (codimension maximale) on a  $S = m_0 \times \mathbb{R}_t$ ,  $\mathcal{E}_S = \mathcal{G}_S = \emptyset$  et  $\mathcal{T}_S = \dot{T}^*S$ . Dans les autres cas ( $1 \leq d < \dim \mathcal{M}$ ), on a  $S = \mathcal{S} \times \mathbb{R}_t$ ,  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{M} - d > 0$ , et si  $(x''; \xi'') = (y'', t, \eta'', \tau) \in \dot{T}^*S$ ,  $(y'', \eta'') \in T^*\mathcal{S}$ , on a  $R_0(x'', \xi'') = \|\eta''\|_{y''}^2 - \tau^2$ , où  $\|\eta''\|_{y''}^2$  est la métrique duale de la métrique induite sur  $\mathcal{S}$  par  $g$  d'après (9).

Nous noterons toujours  $y = (y', y'')$  les variables spatiales,  $x' = y'$ ,  $x'' = (y'', t)$ ;  $d = d_y$  désignera la différentielle extérieure en  $y$  de sorte qu'on a  $|df|^2 = p(x; d_y f, \tau = 0)$ , pour  $f$  à valeurs réelles.

Utilisant l'hypothèse (H.1), on posera  $\mathcal{M}' = \{|x'| < \varepsilon_0\}$ ,  $B_0 = \{|y''| < \varepsilon_0 \text{ et } |t - t_0| < \varepsilon_0\}$ ,  $\Omega_0 = \Omega \cap (\mathcal{M}' \times B_0) = \omega' \times B_0$ .

Pour  $\mathcal{B}$  espace de Banach,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , nous notons  $\mathcal{D}'(U; \mathcal{B})$  l'espace de distribution des applications linéaires continues de  $C_0^\infty(U)$  dans  $\mathcal{B}$ . Comme d'habitude on note  $H_0^1(\omega')$  l'adhérence de  $C_0^\infty(\omega')$  dans  $H^1(\omega')$ ,  $H^{-1}(\omega') \hookrightarrow \mathcal{D}'(\omega')$  son dual caractérisé par

$$(25) \quad v \in H^{-1}(\omega') \iff \exists C \forall \psi \in C_0^\infty(\omega') \left| \int_{\omega'} v\psi \right| \leq C \|\psi\|_{H^1}.$$

Pour  $u(t, y)$  solution de (1), on a  $u \in C^0(\mathbb{R}_t, H_0^1(\omega))$  donc pour tout  $\chi(x') \in C_0^\infty(\mathcal{M}')$

$$(26) \quad \chi u \in \mathcal{D}'(B_0; H_0^1(\omega')).$$

Notre méthode consiste à microlocaliser la formulation faible locale du problème (1), à savoir

$$(1') \quad \begin{cases} u \text{ est une distribution sur } B_0 \times \omega' \text{ qui vérifie} \\ \forall \chi(x') \in C_0^\infty(\mathcal{M}') \quad \chi u \in \mathcal{D}'(B_0; H_0^1(\omega')) \\ \forall f \in C_0^\infty(B_0, H_0^1(\omega')) \quad \int_{\Omega_0} \left[ (du|df) - \partial_t u \partial_t f \right] d_g y dt = 0 \end{cases}$$

où  $d_g y$  désigne l'élément de volume riemannien.

En particulier, seule la régularité  $H^1$  de  $u$  par rapport aux variables normales  $x'$  intervient et la condition de Dirichlet au bord est intégrée dans la formulation variationnelle. Les théorèmes 1 à 4 sont prouvés pour les solutions de (1') dans [L3].

Dans le §. II, on explicite l'hypothèse (H.2) liée à l'existence d'un système de coordonnées sous-polaires compatibles à la stratification, et on donne quelques exemples dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

## II. – Métriques sous-coniques

L'objet de ce paragraphe est d'expliciter l'hypothèse (H.2).

### II.1. – Métriques sous-coniques

Dans ce paragraphe,  $N$  désigne une variété analytique réelle,  $E \rightarrow N$  un fibré vectoriel réel sur  $N$ ,  $E' \rightarrow N$  son fibré dual. On note  $\theta \in N$  les points de  $N$ ,  $e, e'$  les vecteurs des fibres  $E_\theta, E'_\theta$ , et  $n = \dim E_\theta = \dim E'_\theta$ . Pour  $r > 0$ ,  $\gamma > 0$ , on note  $\Gamma(r, \gamma)$  le secteur complexe

$$(1) \quad \Gamma(r, \gamma) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r, |\operatorname{Im} z| < \gamma \operatorname{Re} z\}.$$

On écrira  $\Gamma(r, \gamma) < \Gamma(r', \gamma')$  si on a  $r < r'$  et  $\gamma < \gamma'$ . Si  $\Gamma$  est un secteur,  $\mathcal{A}_\Gamma$  désignera l'espace des fonctions  $f(z, \theta)$  **bornées**, à valeurs complexes, holomorphes en  $z \in \Gamma$ , analytiques en  $\theta \in N$ , et on notera  $\mathcal{A}$  la limite inductive sur  $\Gamma$  des espaces  $\mathcal{A}_\Gamma$ . Les inégalités de Cauchy entraînent

$$(2) \quad f \in \mathcal{A}_\Gamma \implies \forall \ell, \quad \forall \Gamma' < \Gamma \quad z^\ell \partial_z^\ell f(z, \theta) \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$$

ce qui exprime une propriété de conormalité sur  $z = 0$  des éléments de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 1.** Une métrique tempérée sur  $E$  est la donnée d'un secteur  $\Gamma$  et d'une fonction  $q(z, \theta, e)$  de  $\Gamma \times E$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

- (i)  $\forall (\theta, e) \in E, z \mapsto q(z, \theta, e)$  est holomorphe.
- (ii)  $\forall z \in \Gamma, (\theta, e) \mapsto q(z, \theta, e)$  est une forme quadratique complexe en  $e$ , dépendant analytiquement de  $\theta$ , réelle pour  $z \in \Gamma \cap \mathbb{R}$ .
- (iii) Pour  $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}, q(r, \cdot)$  est définie positive et  $\exists C_0 > 0$  tel que pour  $z \in \Gamma, r \in \Gamma \cap \mathbb{R}, (\theta, e) \in E$  on ait

$$\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r \implies |q(z, \theta, e)| \leq C_0 q(r, \theta, e).$$

Soit  $q$  une métrique tempérée sur  $E$ ; quitte à diminuer  $\Gamma$ , les inégalités de Cauchy entraînent qu'il existe  $C$  tel qu'on ait

$$(3) \quad r^\ell |\partial_z^\ell q(z, \theta, e)| \leq C^\ell \ell! q(r, \theta, e)$$

pour tout  $(\theta, e) \in E$  et tout  $r, z \in \Gamma$  vérifiant  $\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \leq \alpha_0$  petit, l'identité  $q(re^{i\alpha}, \cdot) = \sum \frac{q^{(\ell)}(r, \cdot)}{\ell!} r^\ell (e^{i\alpha} - 1)^\ell$  et (3) impliquent pour  $0 < r \leq r_0$  petit

$$(4) \quad \begin{cases} |q(re^{i\alpha}, \cdot) - q(r, \cdot)| \leq \text{Cte } |\alpha| q(r, \cdot) \\ \left| \text{Im } q(re^{i\alpha}, \cdot) - \alpha r \frac{\partial q}{\partial r}(r, \cdot) \right| \leq \text{Cte } |\alpha|^2 q(r, \cdot) \\ \left| \text{Re } q(re^{i\alpha}, \cdot) - q(r, \cdot) \right| \leq \text{Cte } |\alpha|^2 q(r, \cdot) \end{cases}$$

où les Cte sont indépendantes de  $r, \alpha, (\theta, e)$ .

Si  $q_1(z, \theta, e)$  vérifie les points (i) et (ii) de la définition 1, pour  $\beta > 0$ , on écrira  $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$  si

$$(5) \quad \exists M, \quad \forall (\theta, e), \quad \forall z \quad |q_1(z, \theta, e)| \leq M r^\beta q(r, \theta, e) \quad \text{avec } r = |z|.$$

Si  $q$  est tempérée et  $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$ ,  $q + q_1$  est tempérée (en diminuant  $\Gamma$ ).

Soit  $\theta \in N$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E_\theta$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  la base duale de  $E'_\theta$  (i.e.  $e'_j(e_\ell) = \delta_{j,\ell}$ ). Pour  $e = \sum x_j e_j \in E_\theta$ , on a

$$(6) \quad q(z, \theta, e) = {}^t x A_z x$$

où  $z \mapsto A_z$  est holomorphe en  $z \in \Gamma$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; symétrique :  ${}^t A_z = A_z$ , et pour  $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$ ,  $A_r$  est réelle définie positive; quitte à diminuer  $\Gamma$ , la 3ème inégalité de (4) entraîne  $\operatorname{Re}(A_z) \gg 0$  donc  $\det A_z \neq 0$ . Pour  $e' = \sum x'_j e'_j \in E'_\theta$ , on pose

$$(7) \quad q'(z, \theta, e') = {}^t x' A_z^{-1} x'$$

qui ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie (si  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une autre base de  $E_\theta$ ,  $P$  la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$ , la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}'$  à  $\tilde{\mathcal{B}}'$  est  $P' = {}^t P^{-1}$  et la matrice  $\tilde{A}$  de  $q$  dans la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  est  $\tilde{A} = {}^t P A P$ ).

**Définition 2.** On appelle  $q'$  la métrique duale de  $q$ .

On a alors les résultats suivants.

**Lemme 1.** Soit  $q$  une métrique tempérée sur  $E$ . Alors sa métrique duale  $q'$  est tempérée. Si de plus  $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$  alors  $(q + q_1)' - q' \in \mathcal{O}(r^\beta q')$ .

Soit  $q$  une métrique tempérée,  $\theta \in N$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E_\theta$ ,  $A_z$  la matrice de  $q(z, \theta, \cdot)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On définit une fonction sur  $\Gamma \times N$  ( $\Gamma$  petit) en posant

$$(8) \quad z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q = z \frac{\partial}{\partial z} \log \det A_z$$

(si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$ , on a  $\log \det \tilde{A}_z = \log \det A_z + 2 \log |\det P|$ ).

**Lemme 2.** Soit  $q$  une métrique tempérée sur  $E$ . Alors  $z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q$  appartient à  $\mathcal{A}$ , i.e. est borné sur  $\Gamma \times N$ .

**Définition 3.** Une métrique tempérée  $q$  sur  $E$  est sous-conique ssi il existe  $\nu_0 > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\delta \in [0, 1[$  tels que

(i) Pour tout  $(z, \theta) \in \Gamma \times N$  on a

$$(9) \quad \left| z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q - \nu_0 \right| \leq 2\delta \min \left( 1, \frac{c}{2} \right).$$

(ii) La métrique duale  $q'$  de  $q$  vérifie pour tout  $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$  et  $(\theta, e') \in E'$

$$(10) \quad -\frac{\partial q'}{\partial r}(r, \theta, e') \geq \frac{c}{r} q'(r, \theta, e').$$

On dira que la métrique  $q$  est conique si elle est de la forme  $q(z, \theta, e) = z^2 q_0(\theta, e)$  où  $q_0$  est une métrique fixe sur  $E$ ; une métrique conique est sous-conique (on a  $\nu_0 = 2 \dim E_\theta$ ,  $\delta = 0$  et  $c = 2$  dans (9) et (10)).

Plus généralement, on dira que  $q$  est quasi-conique si elle est de la forme  $q = z^2 q_0 + q_1$ ,  $z^2 q_0$  conique et pour un  $\beta > 0$ ,  $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta z^2 q_0)$ . On a alors d'après le lemme 1  $q' = \frac{1}{z^2} q_0 + q'_1$ ,  $q'_1 \in \mathcal{O}(r^\beta \frac{1}{z^2} q_0)$  donc  $\frac{\partial q'_1}{\partial r} \in \mathcal{O}(r^{\beta-1} \frac{1}{z^2} q_0)$  et  $|\log \det q - \log \det z^2 q_0| \leq C |z|^\beta$  ( $C$  indépendant de  $z, \theta$ ) donc  $q$  est sous-conique.

**Remarque.** Dans la définition 3, l'inégalité (ii) (10)  $-\frac{\partial q'}{\partial r} \geq \frac{c}{r} q'$  est essentielle pour étudier la dynamique des rayons dans la région transverse. Par contre, l'hypothèse (9) est purement technique. Elle est utilisée dans la preuve du théorème de réflexion pour contrôler la variation de la forme volume par déformation complexe. Une hypothèse plus forte et plus naturelle serait

(i)' Il existe une densité ( $> 0$ )  $d\mu(\theta)$  sur  $N$  telle que pour  $(r, \theta) \in (\Gamma \cap \mathbb{R}) \times N$  on ait

$$(9)' \quad cr^{\frac{\nu_0}{2}} d\mu(\theta) \leq \sqrt{\det q(r, \theta)} |d\theta| \leq \frac{r^{\frac{\nu_0}{2}}}{c} d\mu(\theta)$$

qui exprime que la puissance de  $r$  dans la forme volume  $\sqrt{\det q} |d\theta|$  est indépendante de  $\theta \in N$ , alors que (9) impose une borne sur la variation maximale de cette puissance.

**Exemple.** Soit  $E = N \times \mathbb{R}^2$  le fibré trivial de rang 2 sur  $N$  et  $q_b$  la métrique indépendante de  $\theta$

$$(11) \quad q_b = z^\alpha x_1^2 + 2bz^{\frac{\nu_0}{2}} x_1 x_2 + z^\gamma x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$b, \alpha, \gamma, \nu_0$  constantes réelles avec  $\alpha + \gamma = \nu_0$ ,  $\alpha > 0, \gamma > 0$ , et  $|b| < 1$ . On a  $q_0(r, \cdot)(1 - |b|) \leq q_b(r, \cdot) \leq q_0(r, \cdot)(1 + |b|)$  et  $|q_b(z, \cdot)| \leq q_0(|z|, \cdot)(1 + |b|)$  donc  $q_b$  est tempérée. On a  $z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q \equiv \nu_0$  et

$$(12) \quad (1 - b^2) q'_b = z^{\gamma - \nu_0} x_1'^2 - 2bz^{-\frac{\nu_0}{2}} x_1' x_2' + z^{\alpha - \nu_0} x_2'^2$$

donc  $q_b$  est sous conique ssi on a

$$(13) \quad b^2 < 4 \left(1 - \frac{\alpha}{\nu_0}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\nu_0}\right) = \frac{4\alpha\gamma}{(\alpha + \gamma)^2}. \quad \diamond$$

En particulier, cet exemple montre que si  $M_\theta$  est un endomorphisme de  $E$  et  $q$  sous-conique, la métrique tempérée  $\tilde{q}(z, \theta, e) = q(z, \theta, M_\theta(e))$  n'est pas nécessairement sous-conique. Le caractère sous-conique est toutefois stable par petite perturbation, car on a le

**Lemme 3.** *Soit  $q_0$  une métrique sous-conique sur  $E$ ,  $q_1$  une métrique qui vérifie les points i) et ii) de la définition 1. Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que si  $q_1$  vérifie*

$$(14) \quad \forall z, \theta, e \quad |q_1(z, \theta, e)| \leq \varepsilon |q_0(z, \theta, e)|$$

la métrique  $q = q_0 + q_1$  est sous-conique.

## II.2. – Coordonnées sous-polaires

Soient  $N$  une variété analytique réelle,  $\dim N = d - 1$  et  $\Gamma = \Gamma(r, \gamma)$  un secteur complexe; on pose  $\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma \cap \mathbb{R}$  et on diminuera  $\Gamma$  un nombre fini de fois par la suite.

Pour  $x, y \in \mathbb{C}^d$  on note  $(x|y)$  la forme quadratique complexe

$$(15) \quad (x|y) = \sum x_j y_j$$

et on pose

$$(16) \quad x^2 = (x|x), \quad |x|^2 = (x|\bar{x}).$$

**Définition 4.** *On appelle “système de coordonnées sous-polaire” une application de  $\Gamma \times N$  dans  $\mathbb{C}^d$  de la forme*

$$(17) \quad (z, \theta) \longmapsto zH(z, \theta), \quad H(z, \theta) = H_0(\theta) + z^\beta H_1(z, \theta)$$

avec  $\beta > 0$ ,  $H_0$  analytique de  $N$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $H_1 \in (\mathcal{A}_\Gamma)^d$ , vérifiant

- (i)  $(r, \theta) \mapsto rH(r, \theta)$  est à différentielle injective de  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii)  $\theta \mapsto |H_0(\theta)|$  est à valeurs dans un compact de  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (iii) Il existe  $c_1 \in [0, 1[$  tel que  $\forall z \in \Gamma, \forall (\theta, e) \in TN$  on ait

$$|(H_0(\theta)|u)| \leq c_1 |H_0(\theta)| |u| \text{ avec } u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e].$$

(iv) Il existe  $c_2 > 0$  tel que  $\forall(\theta, e) \in TN, \forall r \in \Gamma_{\mathbb{R}}, \forall z \in \Gamma$  vérifiant  $\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r$  on ait

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e] \right| \leq c_2 \left| \frac{\partial H}{\partial \theta}(r, \theta)[e] \right|.$$

Un système de coordonnées sous-polaire  $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  sera dit “quasi-polaire” s’il vérifie

$$(18) \quad \theta \longmapsto H_0(\theta) \text{ est à différentielle injective de } N \text{ dans } \mathbb{R}^d.$$

### Exemples.

a)  $d = 2, N = ] - 2, 2[$

$$(z, \theta) \longmapsto (x_1 = z, x_2 = z^{\frac{3}{2}} \theta) \text{ est sous-polaire;}$$

l’image de  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [-1, 1]$  est (près de 0) le cusp  $\{x_1 > 0; |x_2| \leq x_1^{\frac{3}{2}}\}$ .

b)  $d = 2, N = ] - 2\pi, 2\pi[$

$$(z, \theta) \longmapsto \left( x_1 = z \cos \theta, x_2 = z \sin \theta + z^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ est quasi-polaire;}$$

l’image de  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [-\pi, \pi]$  est (près de 0) le complémentaire du cusp  $\{(0, 0)\} \cup \{x_1 < 0, |x_2| < |x_1|^{\frac{3}{2}}\}$ .

c)  $d = 2, N = ] - 2\pi, 2\pi[$

$$(z, \theta) \longmapsto \left( x_1 = z \cos \theta, x_2 = z \sin \theta + z^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ est quasi-polaire;}$$

l’image de  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [0, \pi]$  est (près de 0)  $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \cup \{x_1 \leq 0, x_2 \geq x_1^2\} \setminus (0, 0)$ , dont le bord est formé de deux demi-courbes tangentes à l’origine.

d)  $d = 3, N = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \theta_1^2 + \theta_2^2 < 2\}$

$$(z, \theta) \longmapsto \left( x_1 = z, x_2 = z\theta_1, x_3 = z^{\frac{3}{2}}\theta_2 \right) \text{ est sous-polaire;}$$

l’image de  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times \{\theta_1^2 + \theta_2^2 \leq 1\}$  est le cône quasi-homogène  $\{x_1 > 0; x_1 x_2^2 + x_3^2 \leq x_1^3\}$ .

Le lemme suivant permet de séparer au premier ordre les variables normales ( $r$ ) et angulaires ( $\theta$ ) par changement de paramétrage.



**Lemme 4.** Soit  $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  un système de coordonnées sous-polaire,  $(z, \theta) \in \Gamma \times N$ ,  $\Gamma = \Gamma(r_0, \gamma_0)$ . Il existe un changement de variable à la source de la forme

$$(19) \quad (w, \theta) \mapsto (z, \theta); \quad z = wG(w, \theta); \quad G = G_0(\theta) + w^\beta G_1(w, \theta)$$

défini sur  $\Gamma' \times N$ ,  $\Gamma' = \Gamma(r'_0, \gamma'_0)$ ,  $r'_0 \ll r_0$ ,  $\gamma'_0 \ll \gamma_0$ , avec  $G_0$  analytique de  $N$  dans  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $G_1 \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$ ,  $G_1(\rho, \theta) \in \mathbb{R}$  pour  $\rho \in \Gamma'_\mathbb{R}$ , tel que si on pose

$$(20) \quad j(w, \theta) = wV(w, \theta); \quad V(w, \theta) = G(w, \theta)H(wG(w, \theta), \theta)$$

on ait

(i)  $(w, \theta) \mapsto wV(w, \theta)$  est un système de coordonnées sous-polaire et  $(V(w, \theta)|V(w, \theta)) \equiv 1$ .

(ii) Si  $dx^2$  désigne la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ , on a

$$(21) \quad j^*(dx^2) = d\rho^2 + q(\rho, \cdot) + \mathcal{O}(\rho^\beta(d\rho^2 + q(\rho, \cdot)))$$

où  $q(w, \theta, e)$  est la métrique tempérée sur  $TN$  définie par

$$(22) \quad q(w, \theta, e) = \frac{w^2}{|H_0(\theta)|^2} (\Pi_\theta u | \Pi_\theta u), \quad u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(wG(w, \theta), \theta)[e]$$

$\Pi_\theta$  désignant le projecteur orthogonal

$$(23) \quad \Pi_\theta(u) = u - \frac{H_0(\theta)}{|H_0(\theta)|^2} (H_0(\theta)|u).$$

(Pour définir le  $\mathcal{O}$  dans (21), on considère  $d\rho^2 + q$  comme métrique tempérée sur  $\mathbb{R} \oplus TN$ .)

(iii) D'après (i)  $j$  induit un isomorphisme  $\tilde{j}$  de  $T^*(\Gamma'_\mathbb{R} \times N)$  sur  $(\Gamma'_\mathbb{R} \times N) \times_j T^*\mathbb{R}^d$ .

Alors, si  $\xi_k$  désigne la  $k^{\text{ème}}$  fonction coordonnée sur la fibre de  $T^*\mathbb{R}^d$ , on a

$$(24) \quad \xi_k \circ \tilde{j}(\rho, \theta, \sigma, e') = \xi_k^0(\rho, \theta)\sigma + \ell_k(\rho, \theta, e')$$

où  $\xi_k^0 \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$ ,  $\ell_k$  est linéaire en  $e'$ , s'étend holomorphiquement en  $\rho$  à  $w \in \Gamma'$  et vérifie,  $q'$  désignant la métrique duale de  $q$  sur  $T^*N$

$$(25) \quad \exists M, \quad \forall (\theta, e') \in T^*N, \quad \forall w, \rho, \quad \frac{\rho}{2} \leq |w| \leq 2\rho \\ |\ell_k(w, \theta, e')| \leq M(q'(\rho, \theta, e'))^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 5.** Avec les notations du lemme 4, on appelle métrique angulaire associée au système de coordonnées sous-polaires  $zH(z, \theta)$  la métrique tempérée sur  $TN$ ,  $q = \frac{w^2}{|H_0(\theta)|^2} (\Pi_\theta u | \Pi_\theta u)$  (voir (22)).

**Définition 6.** Le système de coordonnées sous-polaires  $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  est dit strict si on a l'identité  $(H(z, \theta) | H(z, \theta)) \equiv 1$ . Dans ce cas, si  $\tilde{q}$  est la métrique tempérée sur  $TN$

$$(26) \quad \tilde{q}(z, \theta, e) = z^2(u|u), \quad u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e]$$

et  $q$  la métrique angulaire, on a  $\tilde{q} - q \in \mathcal{O}(r^\beta q)$ .

### II.3. – Géométries admissibles

Soit  $m \in \bar{\omega} \setminus \omega$ ,  $g_m$  la métrique induite par  $g$  sur la fibre  $L_m$  en  $m$  du fibré normal à la strate  $\mathcal{S}_{i(m)}$ ,  $\bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i$  la stratification fournie par l'hypothèse (H.1). Quitte à effectuer un changement de variable linéaire en  $x'$ , on peut supposer que  $g_m$  est la métrique euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^d$ , ce que nous ferons.

**Définition 7.** On dit que le couple  $(\bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i, g_m)$  est sous-conique s'il existe une variété analytique  $N$ , un compact  $K$  de  $N$ , un système de coordonnées sous-polaire  $(z, \theta) \mapsto j(z, \theta) = zH(z, \theta)$  de  $\Gamma \times N$  dans  $\mathbb{C}^d$ , un voisinage  $U$  de l'origine dans  $\bar{\omega}'$  et un  $r_0 > 0$  tels que

- (i)  $j$  induit une bijection de  $]0, r_0[ \times K$  sur  $(\bar{\omega}' \cap U) \setminus 0$ .
- (ii)  $\forall i \in I(m) \setminus i(m) \exists \Sigma_i \subset K$  vérifiant  $]0, r_0[ \times \Sigma_i = j^{-1}(\mathcal{S}'_i \cap U)$ .
- (iii) La métrique angulaire associée à  $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  est sous-conique (voir les définitions 3 et 5).

L'hypothèse (ii) signifie que les strates  $\mathcal{S}'_i$  (différentes de la strate  $\mathcal{S}'_{i(m)} = \{x' = 0\}$ ) sont des réunions de courbes  $\theta = \text{Cte}$ , paramétrées par  $r$ . Comme la restriction de  $j$  à  $\Gamma_{\mathbb{R}} \times N$  est à différentielle injective, et que  $j$  induit une bijection de  $]0, r_0[ \times \Sigma_i$  sur  $\mathcal{S}'_i \cap U$ , les  $\Sigma_i$  sont des sous-variétés de  $N$  de codimension  $\text{codim}(\Sigma_i) = \text{codim}(\mathcal{S}'_i)$ ,  $\Sigma_0$  est ouverte,  $K = \bar{\Sigma}_0$  et  $U \Sigma_i$  est une stratification de  $\bar{\Sigma}_0$ .

**Remarque 1.** D'après le lemme 4, on peut toujours supposer dans la définition 7 que  $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  est strict, *i.e.* vérifie  $(H|H) \equiv 1$ . Le point (iii) est alors équivalent à (iii)'

(iii)' la métrique  $q(z, \theta, e) = z^2(u|u)$ ,  $u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e]$ , est sous-polaire et on a alors

$$(27) \quad j^*(dx^2) = dr^2 + q + \mathcal{O}(r^\beta(dr^2 + q)).$$

**Remarque 2.** Soit  $g_m^2$  une autre métrique sur  $L_m$ . Alors si  $(\bar{\omega}', g_m)$  est sous-conique,  $(\bar{\omega}', g_m^2)$  l'est si  $g_m^2$  est assez voisine de  $g_m$ .

**Remarque 3.** Si dans la définition 7, le système  $(x, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$  est quasi-polaire, alors (iii) est automatique car la métrique angulaire  $q = w^2 q_0 + q_1$  est quasi-conique, avec

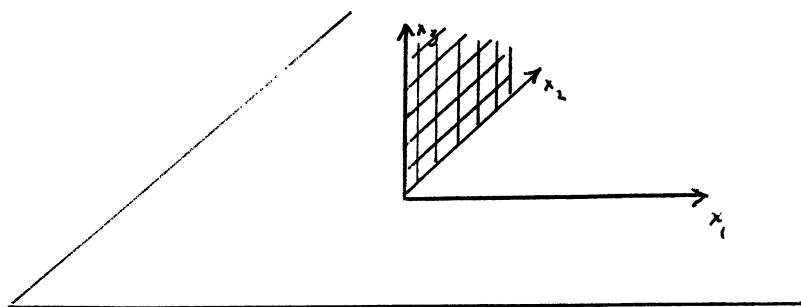
$$(28) \quad q_0(\theta, e) = \frac{1}{|H_0(\theta)|^2} (\Pi_\theta u | \Pi_\theta u), \quad u = \frac{\partial H_0}{\partial \theta}[e]; \quad q_1 \in \mathcal{O}(\rho^\beta w^2 q_0)$$

de sorte que dans ce cas,  $(\bar{\omega}', g_m)$  est sous-conique pour toute métrique  $g_m$ .

Dans les exemples suivant, on choisit la stratification évidente.

**Exemple 1.** Soit  $\omega'$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$

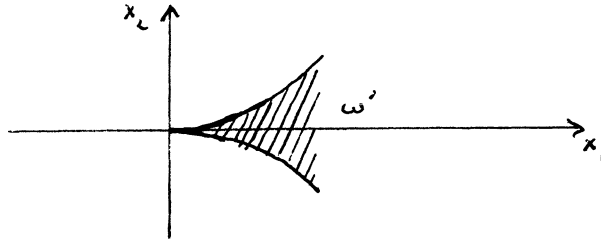
$$\omega' = \{x_3 > 0\} \setminus \{x_1 = 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$$



représentant un demi-espace privé d'un écran. Cette situation est quasi-conique; en effet, il suffit de choisir pour  $N$  la sphère  $S^2$  et d'utiliser les vraies coordonnées polaires.

**Exemple 2.** Soit  $\omega'$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$

$$\omega' = \{x_1 > 0; |x_2| \leq x_1^{\frac{3}{2}}\}$$



En utilisant le système sous-polaire de l'exemple a), (§. II.2), on vérifie que  $(\bar{\omega}', g)$  est sous-conique pour tout  $g$ .

**Exemple 3.** Soit  $\omega'$  le cône quasi-homogène de  $\mathbb{R}^3$

$$\omega' = \{x_1 > 0, x_1 x_2^2 + x_3^2 \leq x_1^3\}.$$

En utilisant le système sous-polaire de l'exemple d) (§. II.2) et l'exemple du §. II.1, on vérifie que  $(\bar{\omega}', g)$  est sous-conique si  $g$  est proche de la structure euclidienne standard.

**Exemple 4.** On choisit  $N = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; |\theta| < \frac{1}{2}\}$  et on pose, avec  $a > 2$

$$j(r, \theta) = \left( x_1 = r, x_2 = \frac{r^{\theta_1+a}}{\log r}, x_3 = \frac{r^{\theta_2+a}}{\log r} \right) \in \mathbb{R}^3$$

$$\omega' = \left\{ j(r, \theta); 0 < r < \frac{1}{2}; |\theta| < \frac{1}{4} \right\}.$$

Alors  $j$  est un système de coordonnées sous-polaires, et la métrique angulaire associée  $q = r^{2(\theta_1+a)} |d\theta_1|^2 + r^{2(\theta_2+a)} |d\theta_2|^2$  est sous-conique. On a

$$\sqrt{\det q(r, \theta)} |d\theta| = r^{\theta_1+\theta_2+2a} d\theta_1 d\theta_2$$

de sorte que (9) est satisfait, mais pas (9)'.

## Bibliographie

[C-T] CHEEGER-TAYLOR : *Diffraction by conical singularities*, I, II, Comm. Pure Applied Math. **35** (1982), 275–331, 487–529.

[G-L] GÉRARD P., LEBEAU G. : *Diffusion d'une onde par un coin*, Journal A.M.S., Vol. **6** (1993), 341–423.

- [K-K] KASHIWARA M., KAWAI T. : *Microhyperbolic pseudo-differential operators*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 359–404.
- [L.1] LEBEAU G. : *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **35** (1985), 145–216.
- [L.2] LEBEAU G. : *Propagation des ondes dans les dièdres*, Mémoire SMF n° **60** (1995), 1–124.
- [L.3] LEBEAU G. : *Propagation des ondes dans les variétés à coins*, Prépublication Orsay 96–22, (1996), 1–87.
- [M-S] MELROSE R.-B., SJÖSTRAND J. : *Singularities of boundary value problems*, I, II, Comm. Pure Applied. Math., **31** (1978), 593–617, **35** (1982), 129–168.
- [R] ROULEUX M. : *Diffraction analytique sur une variété à singularités coniques*, C.P.D.E., **11** (1986), 947–988.
- [S.1] SJÖSTRAND J. : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° **95** (1982).
- [S.2] SJÖSTRAND J. : *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems I*, C.P.D.E., **5** (1980), 41–94.
- [S.3] SJÖSTRAND J. : *Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems*, Math. Ann. **254** (1980), 211–256.
- [S-K-K] SATO M., KAWAI T., KASHIWARA M. : *Microfonctions and Pseudo-differential Equations*, Lect. Notes in Maths., n° **287** (1971).