Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

V. Petkov

Sur la conjecture de Lax et Phillips pour un nombre fini d'obstacles strictement convexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n^{o} 11, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A11_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SUR LA CONJECTURE DE LAX ET PHILLIPS POUR UN NOMBRE FINI D'OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

V. PETKOV

Exposé n° XI

21 Novembre 1995

Sur la conjecture de Lax et Phillips pour un nombre fini d'obstacles strictement convexes

Vesselin Petkov

1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine ouvert et connexe ayant C^∞ frontière $\partial\Omega$ et soit

$$K = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \mid x \mid \leq \rho_0\}.$$

Notons par ν la normale extérieure de $\partial\Omega$. Considérons le problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \mathcal{B}u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = f_1(x), \partial_t u(0,x) = f_2(x), \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathcal{B} = Id$ ou $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial \nu}$. On peut associer à (1) un *opérateur de diffusion*

$$S(\lambda) : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

admettant une continuation méromorphe dans $\mathbf{C}$ avec des pôles λ_j, $\Im\lambda_j > 0$ (cf. [LP]). Désignons par Λ l'ensemble des pôles comptés avec leurs multiplicités. L'assertion suivante est connue (cf. [I4], [I5]) comme conjecture modifiée de Lax et Phillips:

(MLPC) Pour chaque obstacle captif K il existe $\delta > 0$ tel que $S(\lambda)$ possède un nombre infini de pôles dans le domaine $D_\delta = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \Im z \leq \delta\}$.

Cette conjecture a été établie dans certains cas ([G], [I2], [I4], [I5], [I6] [F1], [F2]). De plus, quand K est l'union de deux obstacles convexes et disjoints, il y a des résultats précis concernant le minimal $\delta > 0$ pour lequel on a la propriété dans (MLPC) (cf. [G], [I2], [F2]). Dans cet exposé on va supposer que K a la forme

$$K = \cup_{j=1}^{Q} K_j, \ K_i \cap K_j = \emptyset, \text{ for } i \neq j, \tag{2}$$

où K_j sont strictement convexes pour $j = 1, \ldots, Q$ et $Q \geq 3$. Ikawa ([I3]) a introduit la condition suivante:

(H) Pour chaque paire $1 \leq i,j \leq Q,\ i \neq j$, l'enveloppe convexe de $\overline{K_i} \cup \overline{K_j}$ n'a pas de points communs avec $\overline{K_l},\ l \neq i,\ l \neq j$.

Si la condition (H) est satisfaite, chaque rayon périodique dans Ω est un rayon réfléchissant sans segments tangents à $\partial\Omega$. Sous la condition (H) Ikawa ([I4]) a démontré (MLPC) pour le problème de Neumann, tandis que pour le problème de Dirichlet ce résultat a été démontré ([I6]) dans le cas quand (H) a lieu et K_j sont des boules avec des rayons assez petits (voir aussi

[I4]). D'autre part, dans certains cas (MLPC) a été établie pour des opérateurs hypoelliptiques ([PV]). On a montré dans [PS1] que pour des obstacles ayant la forme (2) dans le cas générique pour tout $\epsilon > 0$ il y a un nombre infini de pôles λ_j dans le domaine

$$\{z \in \mathbf{C} : 0 < \Im z \leq \epsilon \log |\Re z|, |\Re z| \geq C_\epsilon\}.$$

Etant donné un rayon périodique réfléchissant $\gamma \subset \overline{\Omega}$ ayant m_γ réflexions, notons par d_γ la longueur de γ, par T_γ la période primitive de γ et par P_γ l'application linéaire de Poincaré associée à γ. Soit $|\det(I - P_\gamma)| = |I - P_\gamma|$. Il est facile de montrer qu'il existe des constantes $b_1 > 0,\ b_2 > 0$ telles que

$$e^{2b_1 d_\gamma} \leq |I - P_\gamma| \leq e^{2b_2 d_\gamma}. \tag{3}$$

Soit Ξ l'ensemble de rayons périodiques réfléchissants dans $\overline{\Omega}$ et soit $L_\Omega = \{d_\gamma : \gamma \in \Xi\}$. Introduisons les constantes géometriques

$$d_0 = \min\ \mathrm{dist}_{i\neq j}\ (K_i, K_j), \quad d_1 = \max\ \mathrm{dist}_{i\neq j}(K_i, K_j).$$

La fonction de comptage de longueurs des rayons périodiques satisfait l'estimation

$$\sharp\{\gamma \in \Xi : d_\gamma \leq q\} \leq e^{a_0 q}$$

avec $a_0 > 0$ (cf. [I3] et Chapitre 2 dans [PS2]). D'autre part, il est bien connu ([M2], [SjZ1], [Vo1]) qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$N(r) = \sharp\{\lambda_j \in \Lambda : |\lambda_j| \leq r\} \leq Ar^3. \tag{4}$$

Notons que les constantes $a_0,\ b_1,\ b_2$ ne dépendent que de la géometrie d' obstacle, tandis que A dépend du diametre de K et des constantes dans les estimations coercives pour le Laplacien dans Ω. Introduisons les distributions

$$F_D(t) = \sum_{\gamma\in\Xi} (-1)^{m_\gamma} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} \delta(t - d_\gamma),$$

$$F_N(t) = \sum_{\gamma\in\Xi} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} \delta(t - d_\gamma),$$

où D (resp.N) correspond au problème de Dirichlet (resp. Neumann). Ces distributions présentent la somme des singularités principales de la distribution

$$U(t) = \begin{cases} \sum_{\lambda_j\in\Lambda} e^{i\lambda_j t} & \text{for } t > 0, \\ \sum_{\lambda_j\in\Lambda} e^{-i\lambda_j t} & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

(cf. [GM], [M1] et Chapitre 6 dans [PS2]).

Dans cet exposé on se propose d'étudier la fonction de comptage

$$N_{0,\delta}(r) = \sharp\{\lambda_j \in \Lambda : 0 < \Im\lambda_j \leq \delta, |\Re\lambda_j| \leq r\},$$

où la constante $\delta > 0$ sera convenablement choisie.

2 Borne inférieure de $N_{0,\delta}(r)$

Dans cette section on suppose la condition (H) satisfaite. Notre but est d'obtenir une borne inférieure pour la fonction $N_{0,\delta}(r)$. Soit $\rho(t) \in C_0^\infty(-1,1)$ une fonction telle que

$$\rho(t) \geq 0, \;\; \rho(-t) = \rho(t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \;\; \rho(t) = 1 \text{ sur } [-\epsilon_0, \epsilon_0], \;\; 0 < \epsilon_0 < 1/2,$$

$$\hat{\rho}(0) = 1, \;\; \hat{\rho}(\xi) \geq 0, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R},$$

où $\hat{\rho}(\xi)$ est la transformation de Fourier de $\rho(t)$.

Choisissons θ et μ tels que $0 < \theta < \mu < 1$. Après soient $\nu > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ fixés de telle manière que $-\frac{1}{1-\theta} < k < -1$. Prenons $a > k$ satisfaisant les inégalités $k\theta < a\theta < k+1$. Dans la suite les constantes μ, θ, a, k, ν seront fixées. Soient $\alpha \geq b_2$ et $\beta \geq 2(a_0 d_1/d_0 + s\alpha)$, où $s > 1$ est fixé. Posons $\kappa = \theta/\beta$ and introduisons

$$\delta = \frac{(3 - k + \nu)}{\kappa}.$$

Le choix de α et β dépend des singularités de $F_D(t)$, $F_N(t)$. Soit $\sigma_j \to +\infty$ une suite telle que

$$0 < \sigma_{j+1} - \sigma_j \leq d, \;\; \sigma_j \in (q_j - 2/3, q_j + 2/3), \;\; q_j \in \mathbb{N}, \;\; \forall j. \tag{5}$$

Introduisons la fonction

$$\varphi_j(t) = \rho\Big(e^{\beta q_j}(t - \sigma_j)\Big)$$

et posons

$$\widehat{\varphi_j U}(\lambda) = \langle U(t), \; e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\rangle.$$

Farhy [F1], [F2] a développé la méthode de Sjöstrand et Zworski [SjZ2] concernant les bornes inférieures des fonctions de comptages de pôles. En suivant la preuve du Théorème 2.4 dans [F2], on obtient

Proposition 1. *Soit $\sigma_j \to +\infty$ une suite satisfaisant* (5) *et soit $b_\pm = \kappa \ln r \pm B$. Alors pour $r \geq R_0$ on a l'estimation*

$$N_{0,\delta}(r) > C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-, b_+]} \int_1^{C_1 r} |\widehat{\varphi_j U}(\lambda)| d\lambda - C_2, \tag{6}$$

où les constantes positives B, R_0, C_0, C_1, C_2 dépendent de $\beta, \delta, d, \theta, \mu$ et de la constante A dans (4).

Afin de remplacer dans cette propoition $U(t)$ par la partie principale $F_{\mathcal{A}}(t)$, où $\mathcal{A} = D, N$, on doit estimer la transformation de Fourier $\widehat{\varphi_j V}(\lambda)$, où $V(t) = U(t) - F_{\mathcal{A}}(t)$. Pour cela on prouve le suivant

Théorème 2. *Supposons la condition (H) satisfaite. Alots pour tout $0 < \epsilon < 1$ il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant seulement de K et ϵ, et $J_1(\alpha, \beta, \epsilon) > 0$ tels que pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$ et $j \geq J_1(\alpha, \beta, \epsilon)$ on a*

$$|\widehat{\varphi_j V}(\lambda)| \leq C_3 \exp\Big(\big(\frac{a_0 d_1}{d_0} - \epsilon\beta\big)\sigma_j\Big). \tag{7}$$

La démonstration de (7) suit les mêmes lignes et les mêmes constructions comme dans le Théorème 2.4 dans [I5]. Le point essentiel est l'analyse des solutions asymptotiques effectuée dans [I1], [I2], [I3] et [Bu]. Le but est de décrire la singularité principale et d'estimer le reste dans la formule de trace (cf. [BGR], [M1])

$$\widehat{\varphi_j U}(\lambda) = 2\mathrm{Tr}_{\,L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\Big(\cos(t\sqrt{-\Delta}) \oplus 0 - \cos(t\sqrt{-\Delta_0})\Big)dt.$$

Ici Δ_0 désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^3$, tandis que Δ est le Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet ou Neumann sur ∂K et $\cos(t\sqrt{-\Delta})\oplus 0$ s'applique comme 0 sur $L^2(K)$. Soit $E_0(t,x,y)$ le noyau de l'opérateur $\cos(t\sqrt{-\Delta_0})$, soit $E(t,x,y)$ le noyau de $\cos(t\sqrt{-\Delta})$ et soit

$$\tilde{E}(t,x,y) = \begin{cases} E(t,x,y), & (x,y) \in \Omega \times \Omega, \\ 0 \text{ for } (x,y) \notin \Omega \times \Omega. \end{cases}$$

D'après le résultat de Melrose [M1] on sait que

$$\langle \tilde{E}(t,x,y), \varphi_j(t)\rangle \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

De plus, si $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$, pour tout j fixé les fonctions $\{e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\}$ forment un ensemble borné dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ et on obtient

$$\sup_{|x|\leq R}\Big|\langle \tilde{E}(t,x,x), e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\rangle\Big| \leq C_{j,\,R}$$

avec une constante $C_{j,\,R}$ dépendant de j et R. Cela permet pour j fixé et $|\lambda| \leq e^{\beta q_j}$ de trouver un voisinage $\mathcal{O}_j$ suffisament petit de ∂K de telle façon que

$$2\Big|\int_{\mathcal{O}_j} \langle \tilde{E}(t,x,x), e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\rangle dx\Big| \leq e^{-\beta\sigma_j}. \tag{8}$$

Tenant compte de la vitesse finie de propagation on doit examiner la trace

$$\int_{\Omega_j} \langle \tilde{E}(t,x,x), e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\rangle dx, \tag{9}$$

où $\Omega_j = \{x \in \Omega : |x| \leq \rho_0 + q_j + 1\} \setminus \mathcal{O}_j$.

On considère une partition d'unité dans $\Omega \setminus \mathcal{O}_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1, \;\; 0 \leq \psi_j(x) \leq 1, \;\; \psi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

et on utilise le fait que le noyau $E(t,x,y)\psi(y)$ de l' opérateur $\cos\Big(t\sqrt{-\Delta}\Big)\psi$ admet la représentation

$$E(t,x,y)\psi(y) = \int_{S^2} d\omega \int_0^\infty k^2 u(t,x,k,\omega) e^{-ik\langle y,\omega\rangle}\psi(y)dk.$$

Ici $u(t,x,k,\omega)$ est la solution du problème (1) avec $f_1(x) = \phi(x)e^{ik\langle x,\omega\rangle}$, $f_2(x) = 0$ et $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ est égale à 1 sur supp ψ.

En suivant la procedure dans [I1], [I2], [I3], [Bu], on construit une solution asymptotique $u^{(N)}(t,x,k,\omega)$ de $u(t,x,k,\omega)$ et on examine le comportement des phases et des amplitudes.

L'analyse des singularités de $F_N(t)$ est plus facile que celle de $F_D(t)$ parce que les coefficients ne changent pas le signe. Posons $\sigma_j = 2jd_0 \in L_\Omega,\ j \in \mathbf{N}$. Alors on trouve

$$|\langle F_N(t), \varphi_j(t)\rangle| \geq 2d_0 e^{-b_2\sigma_j},\ \forall j \in \mathbf{N}.$$

D'autre part, pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ et $J(b_1,\beta) > 0$ assez grand on obtient

$$\Big|\langle F_N(t), (e^{i\lambda t} - e^{i\lambda\sigma_j})\varphi_j(t)\rangle\Big| =$$

$$\Big|\sum_{|d_\gamma - \sigma_j| < e^{-\beta q_j}} \rho(e^{\beta q_j}(d_\gamma - \sigma_j))\Big(e^{i\lambda d_\gamma} - e^{i\lambda\sigma_j}\Big)T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2}\Big| \leq$$

$$C_\rho|\lambda|e^{-\beta q_j}\exp\Big((a_0 - b_1)(q_j+1)\Big)(q_j+1) \leq$$

$$C_\rho e^{\beta/2}\exp\Big(-(s\alpha + b_1)(q_j+1)\Big)(q_j+1) \leq d_0 e^{-s\alpha\sigma_j},\ \forall j \geq J(b_1,\beta).$$

Par conséquent, pour $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ et $j \geq J(b_1,\beta)$ on a l'estimation

$$|\langle F_N(t), e^{i\lambda t}\varphi_j(t)\rangle| \geq |\langle F_N(t), \varphi_j(t)\rangle| - \Big|\langle F_N(t), \Big(e^{i\lambda t} - e^{i\lambda\sigma_j}\Big)\varphi_j(t)\rangle\Big| \geq d_0 e^{-\alpha\sigma_j}. \tag{10}$$

En combinant la Proposition 1 et le Théorème 2 on obtient pour le problème de Neumann le suivant

Théorème 3. *Soit K un obstacle ayant la forme* (2) *qui satisfait la condition* (H) *et soit δ choisi comme ci-dessus. Alors pour le problème de Neumann et pour $r \geq c_0$ on a*

$$N_{0,\delta}(r) \geq c_1 r^{\theta(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta})} - c_2, \tag{11}$$

où les constantes $c_i = c_i(\alpha,\beta,s,\theta,\mu,A,C_3)$, $i = 0,1,2$, dépendent de $\alpha,\beta,s,\theta,\mu$, la constante A dans (4) *et la constante C_3 dans Théorème* 2.

Remarque. Le facteur $\theta\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta}\Big)$ dans (11) est lié avec le choix de α et β et probablement cette borne inférieure pourrait être améliorée.

Preuve du Théorème 3. Notons que pour $\sigma_j \geq b_-$ on a

$$e^{\beta q_j/2} \geq e^{\frac{\beta}{2}(\sigma_j - 2/3)} \geq \exp\Big(\frac{\beta}{2}(\kappa\ln r - B - 2/3)\Big) = C_4 r^{\theta/2}$$

avec $C_4 = \exp(-\frac{\beta}{2}(B + 2/3))$. Alors l'inégalité $|\lambda| \leq C_4 r^{\theta/2}$ implique $|\lambda| \leq e^{\beta q_j/2}$ for $\sigma_j \in [b_-, b_+]$. Choisissons r assez grand afin d'arranger $C_1 r > C_4 r^{\theta/2}$. On déduit de (6) que

$$N_{0,\delta}(r) > C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-,b_+]} \int_1^{C_4 r^{\theta/2}} |(\widehat{\varphi_j U})(\lambda)| d\lambda - C_2 >$$

$$C_0 \min_{\sigma_j \in [b_-,b_+]} \int_1^{C_4 r^{\theta/2}} \Big(|\widehat{\varphi_j F_N}(\lambda)| - |\widehat{\varphi_j V}(\lambda)|\Big) d\lambda - C_2.$$

D'autre part, la borne inférieure (10) de $\widehat{\varphi_j F_N}(\lambda)$ et l'estimation (7) avec $\epsilon = 1/2$ pour $\widehat{\varphi_j V}(\lambda)$ impliquent pour r et j suffisament grands

$$N_{0,\delta}(r) > C_0 C_4 d_0 r^{\theta/2}\Big[\exp\Big(-\alpha(\kappa\ln r + B)\Big) -$$

$$-\frac{C_3}{d_0}\exp\Big((a_0d_1/d_0-\frac{\beta}{2})(\kappa\ln r-B)\Big)\Big]-C_2.$$

Le choix de β et α donne $\frac{\beta}{2}-\frac{a_0d_1}{d_0}\geq s\alpha$ et on conclut que

$$N_{0,\delta}(r)>C_4'r^{\theta(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta})}\Big[1-C_3'r^{(1-s)\alpha\kappa}\Big]-C_2$$

avec $C_4'=C_0C_4d_0e^{-\alpha B}$, $C_3'=\frac{C_3}{d_0}\exp\Big((\beta/2-a_0d_1/d_0)B\Big)$. Pour r assez grand on obtient (11).

3 Singularites de $F_D(t)$ et la fonction zéta dynamique

Dans cette section on va examiner la distribution $F_D(t)$ dans le cas quand (H) est satisfaite. Ikawa [I4], [I5] a remarqué que l'existence d'une suite $\sigma_j\to+\infty$ et des nombres $\alpha\geq b_2$, $\beta\geq\alpha$ tels que pour $\varphi_j(t)=\rho\Big(e^{\beta q_j}(t-\sigma_j)\Big)$ l'estimation

$$|\langle F_D(t),\varphi_j(t)\rangle|\geq Ce^{-\alpha\sigma_j},\ \forall j\in\mathbf{N} \tag{12}$$

a lieu est liée avec les singularités analytiques de la fonction

$$Z(s)=\sum_{\gamma\in\Xi}(-1)^{m_\gamma}T_\gamma|I-P_\gamma|^{-1/2}e^{-sd_\gamma},\ \ s\in\mathbf{C}.$$

De plus, l'assertion que $Z(s)$ n'est pas une fonction entière est une condition suffisante pour (12) (cf. [I5]). D'autre part, $Z(s)$ est présentée par une série de Dirichlet, donc il existe une abscisse de convergence absolue $h_a\in\mathbb{R}$ tel que pour $\Re s>h_a$ la série $Z(s)$ est absolument convergente. Soit $\mathcal{P}_+$ (resp. $\mathcal{P}_-$) l'ensemble des rayons réfléchissants périodiques primitifs ayant un nombre pair (resp. impair) de réflexions et soit $\mathcal{P}=\mathcal{P}_+\cup\mathcal{P}_-$. Etant donné $\gamma\in\mathcal{P}$, désignons par $\lambda_{\gamma,i}$, $i=1,2$, les valeurs propres de l'application de Poincaré P_γ plus grandes que 1. Pour $\Re s$ assez grand et $\gamma\in\mathcal{P}$ fixé on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mr_\gamma}|I-P_\gamma|^{-m/2}e^{-msT_\gamma}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\exp(-2sT_\gamma)\Big(1\pm(\lambda_{\gamma,1}^{k+1/2}\lambda_{\gamma,2}^{p+1/2})\exp(sT_\gamma)\Big)}{\lambda_{\gamma,1}^{2k+1}\lambda_{\gamma,2}^{2p+1}-\exp(-2sT_\gamma)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}Z_{k,p,\gamma}(s) \tag{13}$$

avec

$$r_\gamma=\begin{cases}0 \text{ si } \gamma\in\mathcal{P}_+,\\ 1 \text{ si } \gamma\in\mathcal{P}_-.\end{cases}$$

Notons que la série (13) converge dans $\mathbf{C}$ dans le sens de convergence des fonctions méromorphes. La singularité principale de $Z(s)$ est donnée par la somme

$$Z_0(s)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}}T_\gamma Z_{0,0,\gamma}(s)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mr_\gamma}T_\gamma e^{-m(sT_\gamma-\delta_\gamma)},$$

où $\delta_\gamma=-\frac{1}{2}\log(\lambda_{\gamma,1}\lambda_{\gamma,2})$, car les termes avec $k+p\geq1$ sont absolument convergents pour $\Re s>h_a-\epsilon$, $\epsilon>0$. Notons que dans [I6] Ikawa a examiné la fonction $Z_0(s)$ dans le cas quand

K_j sont des boules avec des rayons suffisament petits.

Introduisons les fonctions

$$\zeta(s) = \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \Pi_{\gamma \in \mathcal{P}} \Big(1 - e^{-sT_\gamma + \delta_\gamma}\Big)^{-1},$$

$$\zeta_\pm(s) = \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_\pm} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \Pi_{\gamma \in \mathcal{P}_\pm} \Big(1 - e^{-sT_\gamma + \delta_\gamma}\Big)^{-1},$$

$$\zeta_{2,-}(s) = \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_-} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-2m(sT_\gamma - \delta_\gamma)} = \Pi_{\gamma \in \mathcal{P}_-} \Big(1 - e^{-2sT_\gamma + 2\delta_\gamma}\Big)^{-1}.$$

Pour $\Re s$ assez grand on a

$$Z_0(s) = -\frac{d}{ds} \log\Big(\frac{\zeta_+(s)\zeta_{2,-}(s)}{\zeta_-(s)}\Big)$$

donc pour analyser les singularités de $Z_0(s)$ pour $\Re s > h_a - \epsilon$ on doit étudier la fonction

$$\Phi(s) = \frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)} \zeta_{2,-}(s).$$

Nous avons besoin d'introduire certaines notations de la dynamique symbolique. Soit $\Big[A(i,j)\Big]_{i,j=1,\dots,Q}$ une $Q \times Q$ matrice telle que

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j, \\ 0 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Considérons les espaces

$$\Sigma_A = \{\xi \in \Pi_{-\infty}^{+\infty}\{1, \dots, Q\} : A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1\},$$

$$\Sigma_A^+ = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) : A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1, \ \forall i \geq 0\}.$$

Pour tout $\xi \in \Sigma_A$ il existe un rayon captif $\gamma(\xi)$ unique avec des points réfléchissants sur $\dots, \partial K_{j-1}, \partial K_j, \partial K_{j+1}, \dots$ qui suivent l'ordre dans la suite $\xi = (\dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots)$ (cf. [I3]). Soit $P_j(\xi)$ le j-ème point de réflexion de $\gamma(\xi)$ et soit

$$f(\xi) = \|P_0(\xi) - P_1(\xi)\|.$$

Il a été montré dans [I3], (cf. aussi [Bu]) qu'on peut construire une suite de fonctions phases

$$\{\varphi_{\xi,j}(x)\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \ |\nabla_x \varphi_{\xi,j}(x)| = 1$$

ayant des fronts d'ondes

$$C_{\xi,j}(x) = \{y : \ \varphi_{\xi,j}(y) = \varphi_{\xi,j}(x)\}$$

strictement convexes au voisinage du segment $P_j(\xi)P_{j+1}(\xi)$. Soit $G_{\xi,j}(x)$ la courbure de Gauss de $C_{\xi,j}(x)$ en x et soit

$$g(\xi) = \frac{1}{2} \log\Big(G_{\xi,0}(P_1(\xi))/G_{\xi,0}(P_0(\xi))\Big) =$$

$$-\frac{1}{2} \log\Big((1 + f(\xi)\kappa_1(\xi))(1 + f(\xi)\kappa_2(\xi))\Big) < 0, \ \forall \xi \in \Sigma_A,$$

où $\kappa_i(\xi)$, $i = 1, 2$, sont les courbures principales en $P_0(\xi)$ du front d'ondes des fonctions phases $\varphi^{\infty}_{\xi,0}(x)$. Désignons par σ_A l'opérateur de la translation à gauche dans Σ_A déterminé par

$$(\sigma_A \xi)_i = \xi_{i+1} \ , \forall i \in \mathbf{Z}.$$

On considère aussi σ_A sur Σ_A^+ avec

$$(\sigma_A \xi)_i = \xi_{i+1} \ , \forall i \geq 0.$$

Alors si $\gamma = \gamma(\xi)$ est un rayon périodique réfléchissant avec n points de réflexions on a

$$d_\gamma = f(\xi) + f(\sigma_A \xi) + ... + f(\sigma_A^{n-1}\xi) = f^n(\xi),$$

$$\delta_\gamma = g(\xi) + g(\sigma_A \xi) + ... + g(\sigma_A^{n-1}\xi) = g^n(\xi).$$

Etant donnée une fonction $h(\xi)$ déterminée sur Σ_A, on pose

$$\mathrm{var}_n\, h = \sup\{|h(\xi) - h(\eta)| : \xi_i = \eta_i \text{ for } |i| \leq n\}$$

et pour $0 < \theta < 1$ on introduit

$$\|f\|_\theta = \sup_n \frac{\mathrm{var}_n\, h}{\theta^n}, \quad \|h\|_\infty = \sup_{\xi \in \Sigma_A} |h(\xi)|, \quad |||h|||_\theta = \|h\|_\infty + \|h\|_\theta.$$

On considère les espaces de Banach $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A) \subset C(\Sigma_A)$, $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \subset C(\Sigma_A^+)$ munis avec la norme $|||h|||_\theta$ et on peut montrer que $f(\xi)$, $g(\xi) \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ avec certain $0 < \theta < 1$ dépendant de la géometrie de K. On ne doit pas confondre θ avec la constante θ utilisée dans la section précédente. Il est bien connu que si $h(\xi) \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ on peut trouver $\tilde{h}, \chi \in \mathcal{F}_{\theta^{1/2}}(\Sigma_A)$ telles que

$$h(\xi) = \tilde{h}(\xi) + \chi(\sigma_A \xi) - \chi(\xi)$$

et de plus $\tilde{h}(\xi) \in \mathcal{F}_{\theta^{1/2}}(\Sigma_A^+)$ dépend seulement des coordonnées $(\xi_0, \xi_1, ..)$. Dans ce cas nous allons écrire $h \sim \tilde{h}$. Ici est dans la suite on utilise les notations de [PP].

Posons

$$\theta^{1/2} = \theta_1, \ \mathcal{F}_{\theta_1}(\Sigma_A^+) = \mathcal{F}_{\theta_1}^+, \ \mathrm{Fix}_m = \ \mathrm{Fix}\ \sigma_A^m$$

et soit $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ avec $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+$. . On peut écrire (cf. [PP], Chapitre 6)

$$\zeta(s) = \exp G(s), \ G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\xi \in \mathrm{Fix}_m} e^{-s\tilde{f}^m(\xi) + \tilde{g}^m(\xi)}.$$

En appliquant les résultats de [PP], Chapitre 7 on conclut que $G(s)$ est absolument convergent pour $\Re s > s_0$. Ici s_0 est déterminé d'une mainière unique par l'égalité $P(-s_0 f + g) = 0$, où $P(F)$ désigne la pression de F et la fonction $\mathbb{R} \ni s \to P(-sf + g)$ est srictement décroissante. De plus, le flot σ_f sur l'espace suspendu Σ_A^f est faiblement mélangeant (cf. [St2]) et d'après [PP], Théorème 6.4, la fonction $\zeta(s)$ possède un pôle simple en $s = s_0$. Les résultats de [H], [PP] impliquent que $\zeta(s)$ est méromorphe dans le domaine

$$D_1 = \{s \in \mathbf{C} : P(-\Re s f + g) < \frac{1}{2}|\log \theta|\}$$

et on voit facilement que

$$\{s \in \mathbf{C} : \Re s \geq s_0 - \frac{|\log \theta|}{2\|f\|_\infty}\} \subset D_1.$$

Soit $-s\tilde{f} + \tilde{g} = F_s = U_s + iV_s$ avec $U_s = -\Re s\tilde{f} + \tilde{g}$. Les singularités de $\zeta(s)$ dans D_1 sont liées avec les valeurs propres de l'opérateur complexe de Ruelle $L_s = L_{-s\tilde{f}+\tilde{g}} : \mathcal{F}_{\theta_1}^+ \to \mathcal{F}_{\theta_1}^+$ déterminé par

$$(L_s u)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{(-s\tilde{f}+\tilde{g})(\eta)} u(\eta), \ u \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+.$$

Le spectre de L_s (cf. [PP]) est formé de deux parties:

(i) spectre essentiel qui coïncide avec le disque $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \theta_1 e^{P(U_s)}\}$.

(ii) valeurs propres isolées $\lambda_i(s)$, $i = 1, ..., N(s)$, ayant multiplicité finie $\nu_i(s)$ inclus dans le disque

$$\{z \in \mathbf{C} : \theta_1 e^{P(U_s)} < |z| \leq e^{P(U_s)}\}.$$

Considérons

$$\zeta_m(s) = \sum_{\xi \in \mathrm{Fix}_m} e^{F_s^m(\xi)}.$$

Etant donné $\hat{s} \in D_1$, on écrit dans un voisinage W assez petit de $\hat{s}$

$$\zeta_m(s) = \zeta_m^{(0)}(s) + \zeta_m^{(1)}(s) + \zeta_m^{(2)}(s),$$

où

$$|\zeta_m^{(1)}(s)| \leq C_1(\rho \exp(P(U_s)))^m, \ |\zeta_m^{(2)}(s)| \leq C_2 m(\rho \exp(P(U_s)))^m, \ \forall m$$

avec $\theta_1 < \rho < 1$ tel que L_s n'a pas des valeurs propres λ du module $|\lambda| \leq \rho \exp(P(U_s))$, $s \in W$ (cf. [H], [PP], Chapitre 10). En choisissant ρ assez près de θ_1, on peut arranger $\rho \exp((U_s)) < 1$, $s \in W$. Alors les séries $Z^{(i)}(s) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \zeta_m^{(i)}(s)$, $i = 1, 2$, sont absolument convergentes dans W. Pour $\zeta_m^{(0)}(s)$ on a la représentation

$$\zeta_m^{(0)}(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} \nu_i(s) \lambda_i^m(s).$$

Les valeurs propres $\lambda_i(s)$ et les multiplicités $\nu_i(s)$ ne sont pas des fonctions analytiques de $s \in W$, mais les fonctions

$$\varphi(s) = \Pi_{i=1}^{N(s)} \Big(1 - \lambda_i(s)\Big)^{\nu_i(s)}, \ \psi(s) = \Pi_{i=1}^{N(s)} \Big(1 + \lambda_i(s)\Big)^{\nu_i(s)}, \ s \in W$$

sont analytiques. Si $\varphi(s) \neq 0$ on aura

$$Z^{(0)}(s) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \zeta_m^{(0)}(s) = -\log \varphi(s)$$

donc pour tels s on déduit $\zeta(s) = \frac{1}{\varphi(s)} V(s)$ avec $V(s) \neq 0$ analytique dans W. Par conséquent, les singularités de $\zeta(s)$ dans W sont liées avec les points $s \in W$, où $\lambda_i(s) = 1$ pour certain $i = 1, ..., N(s)$.

Maintenant passons vers l'étude de $\zeta_{\pm}(s)$. Il est clair que

$$\zeta_+(s) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \sum_{\xi \in \mathrm{Fix}_{2m}} e^{-s\tilde{f}^{2m}(\xi)+\tilde{g}^{2m}(\xi)} = \exp \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \zeta_{2m}(s).$$

Alors si $\varphi(s) \neq 0$, $\psi(s) \neq 0$, on obtient

$$Z_+^{(0)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \zeta_{2m}^{(0)}(s) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\varphi(s)\psi(s))\Big)$$

et

$$Z_-^{(0)}(s) = Z^{(0)}(s) - Z_+^{(0)}(s) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\frac{\varphi(s)}{\psi(s)})\Big).$$

Les séries $Z_{(+)}^{(i)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m}\zeta_{2m}^{(i)}(s)$, $i = 1,2$, sont absolument convergentes et si $\psi(s) \neq 0$ on trouve

$$\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)} = \frac{1}{\psi(s)} V_1(s), \ \ s \in W$$

avec $V_1(s) \neq 0$ analytique dans W. De telle manière les singularités de la fonction $\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)}$ dans D_1 sont engendrées par les valeurs propres $\lambda_i(s)$ égales à -1. D'autre part, on sait que (-1) n'est pas valeur propre de l'opérateur L_{s_0}, donc $\frac{\zeta_+(s)}{\zeta_-(s)}$ est analytique dans un petit voisinage de s_0. L'idée d'utiliser les fonctions $Z_{\pm}^{(0)}(s)$ pour l'analyse des singularités m'a été suggerée par F. Ledrappier (cf. [BL]).

En appliquant le même argument pour la fonction

$$\zeta_2(s) = \exp \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \frac{1}{m} e^{-2m(sT_\gamma - \delta_\gamma)},$$

on conclut que $\zeta_2(s)$ est analytique et différente de 0 pour $\Re s > s_2$ avec $s_2 \leq s_0$ et que $\zeta_2(s)$ aura un pôle simple en $s = s_2$. Le nombre s_2 est déterminé par l'équation $P(-2s_2 f + 2g) = 0$. Il est clair que $s_0 \geq 0$ implique $s_2 < s_0$. D'autre part, il y a des exemples quand $s_0 < 0$ (cf. [I3]). Notons que l'opérateur

$$(M_{s_2}u)(\xi) = \sum_{\sigma_A \eta = \xi} e^{(-2s_2\tilde{f}+2\tilde{g})(\eta)} u(\eta), \ \ u \in \mathcal{F}_{\theta_1}^+$$

possède une valeur propre simple $\mu(s_2) = 1$ et l'argument ci-dessus montre que $\zeta_{2,-}(s)$ aura une singularité essentielle en $s = s_2$. Car $\Phi(s)$ doit être méromorphe au voisnage de s_0 on conclut que $s_2 < s_0 - \epsilon_1 < s_0$. De telle façon les singularités de $\Phi(s)$ près de la ligne $\Re s = s_0$ sont liées avec les valeurs propres $\lambda_i(s) = -1$.

Comme dans [Po], Proposition 7, en utilisant la méthode de petites perturbations on peut démontrer l'existence des pôles de $\Phi(s)$ arbitrairement près de la ligne $\Re s = s_0$ sous la condition que

$$\inf_{t>1} |||e^{-itf} + 1|||_\theta = 0. \tag{14}$$

La condition (14) est plus difficile à satisfaire que celle dans [Po]. D'autre part, dans le cas quand la fonction $f(\Sigma_A) = \{a_1, ..., a_q\}$ prend un nombre fini de valeurs rationnellement indépendantes on peut arranger (14). Après avec petites perturbations on pourrait traiter des cas quand K est formé par des petits boules [I6]. Il semble intéressant mais difficile d'examiner les singularités de $Z(s)$ en exploitant aussi les singularités des termes $Z_{k,p,\gamma}(s),\ k+p \geq 1$ qui peuvenet être mis dans une forme pareille à celle de $\Phi(s)$.

Pour l'existence de la suite σ_j et des nombres $\alpha,\ \beta$ tels que (12) soit satisfaite l'existence des singularités analytiques de $Z(s)$ n'est pas nécessaire. Soit $\{l_j\},\ l_j \in \Xi$ une suite telle que

$$0 < l_{j+1} - l_j < d,\ q_j - 2/3 < l_j < q_j + 2/3,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Comme dans [I5] on peut réduire le problème concernant (12) avec $\sigma_j = l_j$ à l'existence des singularités de la série de Dirichlet

$$J(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|d_\gamma - l_j| \leq e^{-\beta l_j}} (-1)^{m_\gamma} T_\gamma |I - P_\gamma|^{-1/2} e^{-s d_\gamma} = \sum_k c_k e^{-s a_k},\ \ s \in \mathbf{C}$$

qui est absolument convergente pour $\Re s > \mathcal{A}$.

Introduisons la condition

(P) $T_\gamma / T_\delta \notin \mathbf{Q}$ pour tous rayons périodiques $\gamma \neq \delta$.

Notons que pour tout K la condition (P) sera satisfaite pour des obstacles ayant des frontières obtenues par des perturbations régulières génériques (cf. Chapitre 3 dans [PS2]). Si (P) est satisfaite, il est facile de voir que la série de Dirichlet $J(s)$ possède une *abscisse de convergence* finie $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ telle que la série $J(s)$ est simplement convergente pour $\Re s > \mathcal{C}$ (cf. [Be]). Dans le cas quand $\mathcal{C} < \mathcal{A}$ la fonction $J(s)$ admet un prolongement analytique dans le domaine $\{s \in \mathbf{C} : \Re s > \mathcal{C}\}$. Le même argument s'applique à la fonction $\Phi(s)$ dans le cas générique (P) et on peut expecter l'existence des cas quand $\Phi(s)$ est analytique pour $\Re s > s_0 - \epsilon,\ \epsilon > 0$.

Dans la suite on suppose (P) satisfaite et on va examiner la série $J(s)$. Alors pour tout k on obtient $c_k \neq 0$ puisque il existe un seul rayon avec période d_γ. Considérons

$$N_j = \sharp\{k : c_k c_{k+1} < 0,\ \ |a_k - l_j| \leq e^{-\beta l_j}\},$$

$$M_j = \sharp\{k : \text{il existe } a_k \in \Xi \text{ tel que } |a_k - l_j| \leq e^{-\beta l_j}\}.$$

Supposons qu'il existe β suffisament grand et une suite convenable $l_j \to \infty,\ l_j \in \Xi$ tels que

$$N_j \leq L,\ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Si (15) a lieu et $\lim_{j\to\infty} M_j = \infty$, on obtient l'estimation

$$|\langle F_D(t), \rho\Big(e^{-\beta l_j}(t - l_j)\Big)\rangle| \geq C e^{-\alpha l_j},\ \forall j \geq J_2$$

en choisissant β plus grand s'il est nécessaire. En effet, le nombre de changements des signes étant limité, si $M_j \to \infty$ les coefficients positifs ou négatifs seront dominants. De telle manière on peut supposer que (15) implique

$$M_j \leq L_1,\ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Alors la densité maximum de la suite $\{a_k\}$ sera finie et on peut appliquer les résultats de Chapitre VI dans [Be]. Plus précisement, d'après un théorème classique de V. Bernstein [Be] si l'indice de condensation de la suite $\{a_k\}$ est finie et si la densité maximum de $\{a_k\}$ est finie, la série $J(s)$ ne possède pas un prolongement comme une fonction entière dans $\mathbf{C}$. Il semble très probable que dans le cas générique (P) la condition (15) est satisfaite pour une suite $\{l_j\}$ convenable en choisissant β assez grand parce que la taille des intervalles $(l_j - e^{-\beta l_j}, l_j + e^{-\beta l_j})$ décroît extrêmement vite. En effet, si on suppose que pour toute suite $\{l_j\}$, $l_j \in \Xi$ et pout tout $\beta > a_0$ on ait $N_j \to \infty$, les périodes d_γ doivent avoir une concentration assez particulière. D'autre part, l'analyse des singularités des fonctions $\zeta_\pm(s)$ montre que les périodes primitives dans $\mathcal{P}_+$ et celles dans $\mathcal{P}_-$ sont distribuées d'une façon équivalente. Néanmoins, je n'ai pas trouvé des résultats des systèmes dynamiques qui impliquent (15), mais aussi je ne connais pas des exemples quand $N_j \to \infty$ pour chaque choix de β et de la suite $\{l_j\}$, $l_j \in \Xi$. L'analyse de la série $J(s)$ donne des avantages et il semble que l'étude des singularités de $J(s)$ est plus facile que celle concernant la fonction $Z(s)$.

References

[BGR] C.Bardos, J.C.Guillot, J.Ralston, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non-borné*, Commun. Partial Diff. Equations **7** (1982), 905-958.

[BL] M.Babillot and F.Ledrappier, *Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows*, Preprint, Ecole Polytechnique, 1996.

[Be] V. Bernstein, *Leçons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villards, 1933.

[Bu] N.Burq, *Controle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes*, Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 55, **121** (1993), .

[F1] L.Farhy, *Distribution near real axis of the scattering poles generated by a non-hyperbolic ray*, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique théorique), **60** (1994), 291-302.

[F2] L.Farhy, *Lower bounds on the number of scattering poles under lines parallel to the real axis*, Commun. Partial Diff. Equations, **20** (1995), 729-740.

[G] C.Gérard, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull. de S.M.F., Mémoire n° 31, **116** (1988).

[GM] V.Guillemin and R.Melrose, *The Poisson summation formula for manifolds with boundary*, Adv. in Math. **32** (1979), 128-148.

[H] N.T.Haydn, *Meromorphic extensions of the zeta function for Axiom A flows*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **10** (1990), 347-360.

[I1] M.Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles*, Osaka J. Math. **19** (1982), 459-509.

[I2] M.Ikawa, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J. Math. **22** (1985), 657-689.

[I3] M.Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several strictly convex bodies*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 113-146.

[I4] M.Ikawa, *On the existence of the poles of the scattering matrix for several convex obstacles*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **64** (1988), 69-102.

[I5] M.Ikawa, *On the distribution of poles of the scattering matrix for several convex bodies*, pp. 210-225 in Lecture Notes in Mathematics, vol. 1450, Springer, Berlin, 1990.

[I6] M.Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta function*, Osaka J. Math. **27** (1990), 281-300 and **29** (1992), 161-174.

[I7] M.Ikawa, *On Zeta function and scattering poles for several convex bodies*, Exposé II, Journées Equtions aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts, Juin 1994.

[LP] P.Lax and R.Phillips, *Scattering Theory,* New York, Academic Press 1967.

[M1] R.Melrose, *Polynomial bound on number of scattering poles*, J. Funct. Anal., **53** (1983), 29-40.

[M2] R.Melrose, *Polynomial bound on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean-de-Monts, 1984.

[MS] R.Melrose and J.Sjöstrand, *Singularities in boundary value problems*, I, II. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 593-617 and **35** (1982), 129-168.

[PP] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta functions and periodic orbits structure of hyperbolic dynamics*, Astérique, **187-188**, Soc. Math. de France, 1990.

[PS1] V.Petkov and L.Stoyanov, *Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectal results*, Amer. J. Math. **109** (1987), 617-668.

[PS2] V.Petkov and L.Stoyanov, *Geometry of Reflecting Rays and Inverse Spectral Problems*, Chichester, John Wiley & Sons 1992.

[PV] V.Petkov and G.Vodev, *Upper bound on the number of the scattering poles and the Lax-Phillips conjecture*, Asymptotic Analysis **7** (1993), 97-104.

[Po] M.Pollicott, *Meromorphic extensions of generalized zeta functions*, Invent. Math. **85** (1986), 147-164.

[SjZ1] J.Sjöstrand and M.Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 729-769.

[SjZ2] J.Sjöstrand and M.Zworski, *Lower bounds on the number of scattering poles*, Commun. Partial Diff. Equations **18** (1993), 847-857.

[Ste] Pl.Stefanov, *Stability of the resonances under smooth perturbations of the boundary*, Asymptotic Analysis, **9** (1994), 291-296.

[St1] L.Stoyanov, *Poisson relation for the scattering kernel and inverse scattering by obstacles*, Séminaire EDP, Exposé V, Ecole Polytechnique, 1994-1995.

[St2] L.Stoyanov, *Exponential instability for a class of dispersing billiards*, Preprint, Mathematics Department, University of Western Australia, 1995.

[St3] L.Stoyanov, *Generalized Hamiltonian flow and rigidity of the scattering length spectrum*, Preprint, Mathematics Department, University of Western Australia, 1996.

[Va] B.Vainberg, *Asymptotic Methods of Mathematical Physics*, Gordon and Breach Sci. Publ. New York, 1988.

[Vo1] G.Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205-216.

V.Petkov
Université Bordeaux I,
Département de Mathématiques,
33405 Talence Cedex
petkov@math.u-bordeaux.fr