SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

L. ROBBIANO

Contrôle exact de l'équation de la chaleur

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 7, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CONTRÔLE EXACT DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

G. LEBEAU et L. ROBBIANO

Exposé n° VII

17 janvier 1995

CONTRÔLE EXACT DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

G. Lebeau
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425,
91405 Orsay Cedex, FRANCE.

L. Robbiano *
Université de Paris-Val de Marne, UFR de Sciences
Av. du Général De Gaulle
94010 Créteil Cedex, FRANCE

1. – Introduction et résultats

Soit M une variété riemanienne C^∞, compacte, connexe à bord ∂M (avec éventuellement $\partial M = \phi$) et Δ le Laplacien sur M.

On note $\{e_k\}_k$ une base orthonormale de $L^2(M)$, orthogonale dans $H_0^1(M)$ de fonctions propres réelles de $(-\Delta; \text{Dirichlet})$

$$(1) \qquad -\Delta e_k = \omega_k^2 e_k\,, \quad e_k|_{\partial M} = 0\,, \quad 0 \leq \omega_k \leq \omega_{k+1}\,.$$

Pour $T > 0$ on pose $X_T =]0, T[\times M$. Pour $u_0 \in L^2(M)$, $g \in L^2(X_T)$ le problème d'évolution

$$(2) \qquad \begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(t,x) = g(t,x) & \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \overset{\circ}{M}) \\ u|_{t=0} = u_0\,; \quad u|_{]0,T[\times\partial M} = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times\partial M) \end{cases}$$

possède dans $C^0([0,T]; L^2(M))$ une unique solution $u(t,x)$.
Si $u_0 = \sum\limits_k u_{0,k}\, e_k$, $g(t,x) = \sum\limits_k g_k(t)\, e_k$ on a

$$(3) \qquad u(t,x) = \sum_k u_k(t)\, e_k\,; \quad u_k(t) = u_{0,k}\, e^{-t\lambda_k} + \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_k}\, g_k(s)\, ds$$

avec $\lambda_k = \omega_k^2$. On a pour $t \in [0,T]$

$$(4) \qquad ||u(t,\cdot)||_{L^2(M)} \leq ||u_0||_{L^2(M)} + \sqrt{t}\ \ ||g||_{L^2(X_t)}$$

* Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France

et si $v(t,x) = \sum_k e^{-(T-t)\lambda_k} v_{T,k}\, e_k$, $\sum_k |v_{T,k}|^2 < \infty$ (v est solution de $(\partial_t + \Delta)v = 0$ avec $v|_{t=T} = \sum v_{T,k}\, e_k$)

$$\int_M u(T,x)v(T,x) = \int_M u(0,x)v(0,x) + \int_0^T \int_M g(t,x)v(t,x). \tag{5}$$

Pour $u_0 \in L^2(M)$, $u_0 = \sum_k u_{0,k}\, e_k$, on posera

$$e^{t\Delta} u_0 = \sum_k e^{-t\lambda_k} u_{0,k}\, e_k, \quad (t \geq 0). \tag{6}$$

On note K_T l'opérateur continu de $L^2(M) \oplus L^2(X_T)$ dans $L^2(M)$ défini par

$$K_T(u_0, g) = u(T, \cdot). \tag{7}$$

Soit par ailleurs $\Omega \subset X_T$ un ouvert non vide vérifiant $\overline{\Omega} \subset]0,T[\times \overset{\circ}{M}$. Notre résultat principal de contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur est alors :

Théorème 1. *Il existe un opérateur continu S de $L^2(M)$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\forall u_0 \in L^2(M), \quad K_T(u_0, S(u_0)) = 0. \tag{8}$$

On en déduit les deux corollaires suivants.

Corollaire 1. *Pour tous $u_0, v_0 \in L^2(M)$, il existe $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que $K_T(u_0, g) = e^{T\Delta} v_0$.*

Corollaire 2. *Il existe $C_\Omega > 0$ tel que*

$$\forall w \in L^2(M), \quad ||e^{T\Delta} w||^2_{L^2(M)} \leq C_\Omega \iint_\Omega |e^{t\Delta} w|^2. \tag{9}$$

En effet, pour le corollaire 1, il suffit de poser $g = S(u_0 - v_0)$, et pour le corollaire 2, d'utiliser l'identité (5) avec $g = S(u|_{t=0})$: on obtient pour tout $v_T \in L^2(M)$, $u_0 \in L^2(M)$, $0 = \int_M u_0\, e^{T\Delta}\, v_T + \int_0^T \int_M S(u_0)\, e^{(T-t)\Delta}\, v_T$ donc

$$||e^{T\Delta}\, v_T||^2_{L^2(M)} \leq \text{cte} \iint_\Omega |e^{(T-t)\Delta}\, v_T|^2$$

d'où l'inégalité (9) avec $v_T = w$ pour l'ouvert $\Omega' = \{(t,x); (T-t,x) \in \Omega\}$.

Lorsque ∂M est non vide, on a un résultat analogue de contrôlabilité exacte frontière.

Pour $u_0 \in L^2(M)$, $h \in C_0^\infty(]0,T[\times \partial M)$ le problème d'évolution

$$(10) \qquad \begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t,x) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \overset{\circ}{M}) \\ u|_{t=0} = u_0\,; \quad u|_{]0,T[\times\partial M} = h & \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \partial M) \end{cases}$$

possède dans $C^0([0,T]; L^2(M))$ une unique solution $u(t,x)$ (si H est un relèvement de h dans $C_0^\infty(]0,T[\times \overline{M})$, on a $u = \tilde{u} + H$ où $\tilde{u}$ vérifie (2) avec données u_0 et $g = -(\partial_t - \Delta)H$). On posera

$$(11) \qquad K_T^\partial(u_0, h) = u(T, \cdot).$$

Pour tout $v_T \in L^2(M)$, on a l'identité analogue à (5), obtenue par intégration par parties

$$(12) \qquad \int_M u(T,x)\, v_T(x) = \int_M u_0 \cdot e^{T\Delta}\, v_T - \int_{]0,T[\times\partial M} h\, \partial_n \big(e^{(T-t)\,\Delta}\, v_T\big)\,.$$

Soit alors Γ un ouvert non vide de ∂X_T, vérifiant $\overline{\Gamma} \subset]0,T[\times \partial M$.

Théorème 2. *Il existe un opérateur continu S^∂ de $L^2(M)$ dans $C_0^\infty(\Gamma)$ tel que*

$$(13) \qquad \forall u_0 \in L^2(M), \quad K_T^\partial(u_0, S^\partial(u_0)) = 0\,.$$

Comme précédemment, on en déduit (en utilisant (12) pour le corollaire 4) les corollaires :

Corollaire 3. *Pour tous $u_0, v_0 \in L^2(M)$, il existe $h \in C_0^\infty(\Gamma)$ tel que $K_T^\partial(u_0,h) = e^{T\Delta}\, v_0$.*

Corollaire 4. *Il existe $C_\Gamma > 0$ tel que*

$$(14) \qquad \forall w \in L^2(M), \quad ||e^{T\Delta}\, w||^2_{L^2(M)} \leq C_\Gamma \iint_\Gamma |\partial_n\, e^{t\Delta}\, w|^2\,.$$

La question du contrôle exact de l'équation de la chaleur nous a été posée par E. ZUAZUA, à la suite de son travail sur la contrôlabilité approchée du système de la thermoélasticité ([Z]). La contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire est une conséquence des résultats d'unicité dans le cas parabolique (voir [M] et [S.S] pour l'unicité et [F.P.Z] pour le cas plus général d'équations de la chaleur semi-linéaire). Le problème du contrôle exact a été étudié par D. RUSSELL dans [Ru], où il est prouvé qu'un résultat de contrôle exact pour l'équation des ondes entraîne le contrôle exact de l'équation de la chaleur ; or le problème du contrôle exact des ondes est maintenant bien compris (voir [B.L.R]) et implique en particulier la propriété de contrôle géométrique. Le théorème 1 ci-dessus montre que dans le cas parabolique, il n'y a aucune contrainte géométrique sur la région de contrôle, ce qui est naturel.

La méthode que nous utilisons ici s'inspire directement du travail de D. Russell. Toutefois, plutôt que d'utiliser des estimations sur l'équation hyperbolique $\partial_t^2 - \Delta$, nous utilisons des estimations sur l'équation elliptique $\partial_t^2 + \Delta$, déduites des inégalités de Carleman. Ceci nous permet de prouver un résultat de contrôle approché basse fréquence pour la chaleur, dans lequel la fonction de coût est bien estimée en fonction de la fréquence de coupure et du temps de contrôle (voir la proposition 1). Le point essentiel ici est que si μ est la fréquence de coupure, la fonction de coût est au plus exponentielle en μ. Un argument simple utilisant le caractère parabolique de l'équation permet alors de conclure à la contrôlabilité exacte. Nous ne détaillons ici que la preuve du théorème 1.

2. – Preuve du théorème 1

Sur $\mathbb{R}_t \times M$, soit Q l'opérateur elliptique du second ordre à symbole principal réel $Q = \partial_t^2 + \Delta$. On fixe $T_0 > 0$, $\alpha \in \left]0, \frac{T_0}{2}\right[$ et on pose $X =]0, T_0[\times M$, $Y =]\alpha, T_0 - \alpha[\times M$.

Soit U un ouvert non vide de X tel que $\overline{U} \subset]0, T_0[\times \overset{\circ}{M}$. Les inégalités de Carleman entraînent que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0, T_0[\times \overset{\circ}{M})$, $\varphi \not\equiv 0$, il existe $C > 0$ et $\nu \in]0, 1[$ tels que pour tout $v \in H^2(X)$ vérifiant $v(t,x)|_{x\in\partial M} = 0$ on ait

$$(1) \qquad ||v||_{H^1(Y)} \leq C||v||^{\nu}_{H^1(X)} \Big[||Qv||_{L^2(X)} + ||\varphi v||_{L^2(X)}\Big]^{1-\nu}.$$

(Nous renvoyons à l'article [L.R] pour des précisions sur ce point.)

On adopte la convention suivante : si $\partial M = \phi$ le spectre est $\{0 = \omega_0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots\}$ et si $\partial M \neq \phi$ le spectre est $\{0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots\}$. Pour $\mu \geq 1$ on pose $J_\mu = \{k, \omega_k \leq \mu\}$. La formule de Weyl entraîne $\# J_\mu \leq$ cte $\mu^{\dim(M)}$. On note $\tilde{J}_\mu = \{n \in \mathbb{Z}; |n| \in J_\mu\}$ et pour $n \in \tilde{J}_\mu$ on pose $\tilde{\omega}_n = \mathrm{sign}(n)\omega_{|n|}$.

On note E_μ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\tilde{J}_\mu}$ et pour $a \in E_\mu$ on pose $||a||_\mu^2 = \sum_{n\in\tilde{J}_\mu} |a_n|^2$. Pour $a \in E_\mu$ soit

$$v_a(t,x) = \sum_{n\in\tilde{J}_\mu} a_n\, e^{t\,\tilde{\omega}_n}\, e_{|n|}(x)\,. \tag{2}$$

On a $v_a \in C^\infty(\overline{X})$, $Q v_a \equiv 0$ et $v_a(t,x)|_{x\in\partial M} = 0$. Comme

$$||v||^2_{H^1(X)} = \int_0^{T_0}\int_M |\partial_t v|^2 + |\nabla_x v|^2 + |v|^2\,,$$

on a

$$||v_a||^2_{H^1(X)} = \sum_{k\in J_\mu}\int_0^{T_0}(1+\omega_k^2)\Big|\sum_{|n|=k} a_n\, e^{t\,\tilde{\omega}_n}\Big|^2 + \Big|\sum_{|n|=k} a_n\,\tilde{\omega}_n\, e^{t\,\tilde{\omega}_n}\Big|^2\, dt\,.$$

Il existe donc $C_1 > 0$ tel que pour tout $\mu \geq 1$ et tout $a \in E_\mu$ on ait

$$||v_a||_{H^1(X)} \leq C_1\,\mu\, e^{T_0\,\mu}\,||a||_\mu\,. \tag{3}$$

On a aussi

$$||v_a||^2_{H^1(Y)} \geq ||v_a||^2_{L^2(Y)} = \sum_{k\in J_\mu}\int_\alpha^{T-\alpha}\Big|\sum_{|n|=k} a_n\, e^{t\,\tilde{\omega}_n}\Big|^2\, dt\,.$$

Si $\delta > \alpha$ est fixé, il existe donc $C_2 > 0$ tel que pour tout $\mu \geq 1$ et tout $a \in E_\mu$, on ait

$$||v_a||_{H^1(Y)} \geq C_2\, e^{-\delta\mu}\,||a||_\mu \tag{4}$$

(car on a pour $\omega \geq \omega_1$, $\int_\alpha^{T-\alpha}\left[a\,e^{-t\omega} + b\,e^{+t\omega}\right]^2 dt \geq C\,e^{-2\delta\omega}(a^2+b^2)$ et pour $k = 0$ la somme ne comporte qu'un seul terme).

Si $\varphi \in C_0^\infty(]0,T_0[\times \overset{\circ}{M})$, $\varphi \not\equiv 0$ est donné, d'après (1), (3) et (4), il existe $D > 0$ tel que pour tout $\mu \geq 1$ et tout $a \in E_\mu$ on ait

$$||a||_\mu^2 \leq D\,e^{D\mu}(\mathcal{L}_\mu a|a) \tag{5}$$

où $\mathcal{L}_\mu$ est la matrice hermitienne

$$(\mathcal{L}_\mu)_{n,m} = \int_0^{T_0}\int_M e^{t(\tilde{\omega}_n+\tilde{\omega}_m)}\,|\varphi|^2\, e_{|m|}\, e_{|n|}\,; \quad (n,m) \in \tilde{J}_\mu \times \tilde{J}_\mu\,. \tag{6}$$

(On a donc $(\mathcal{L}_\mu a, a) = ||\varphi v_a||^2$). La matrice $\mathcal{L}_\mu$ est donc inversible et $||\mathcal{L}_\mu^{-1}|| \leq D\, e^{D\mu}$.

Pour $k \in J_\mu$ (donc $k \geq 0$), soit $\varepsilon^k \in E_\mu$ défini par $\varepsilon_n^k = 1$ si $n = k$, $\varepsilon_n^k = 0$ si $n \neq k$ et $b^k = (\mathcal{L}_\mu)^{-1}\, \varepsilon^k$.

On pose

$$g_k^\mu(t,x) = |\varphi|^2(t,x) \sum_{n \in \tilde{J}_\mu} e^{t\,\tilde{\omega}_n}\, b_n^k\, e_{|n|}(x). \tag{7}$$

On a alors

$$\forall n \in \tilde{J}_\mu\,, \quad \int_0^{T_0} \int_M e_{|n|}(x)\, e^{t\,\tilde{\omega}_n}\, g_k^\mu(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases} \tag{8}$$

$$\operatorname{support}(g_k^\mu) \subset \operatorname{support}(\varphi) \tag{9}$$

$$\exists D_0\,,\ \forall s \geq 0\,,\ \exists C_s\,,\ \forall \mu \geq 1\,,\ \forall k \in J_\mu\,, \qquad ||g_k^\mu||_{H^s} \leq C_s\, \mu^s\, e^{D_0 \mu}\,. \tag{10}$$

Suivant Russell [Ru], on introduit

$$\hat{g}_k^\mu(\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\, g_k^\mu(t,x)\, dt\,. \tag{11}$$

D'après (9), (10), $\hat{g}_k^\mu(\tau,x)$ est holomorphe en $\tau \in \mathbb{C}$, C^∞ en x à support compact dans $\overset{\circ}{M}$, et vérifie des estimations

$$\begin{cases} \exists D_0\,,\ \forall s \geq 0\,,\ \exists C_s\,,\ \forall \mu \geq 1\,,\ \forall k \in J_\mu\,,\ \forall \tau \in \mathbb{C}\,, \\ \qquad ||\hat{g}_k^\mu(\tau,\cdot)||_{H^s(M)} \leq C_s\, \mu^s\, e^{D_0 \mu}\, e^{T_0 |\operatorname{Im} \tau|}\,. \end{cases} \tag{12}$$

Pour $k \in J_\mu$ on pose pour $z \in \mathbb{C}$, $x \in M$

$$\begin{cases} Q_k^\mu(-iz^2, x) = \hat{g}_k^\mu(-iz, x) + \hat{g}_k^\mu(iz, x) & \text{si} \ \ k \neq 0 \\ Q_0^\mu(-iz^2, x) = \dfrac{1}{2}\Big[\hat{g}_0^\mu(-iz, x) + \hat{g}_0^\mu(iz, x)\Big] & \text{si} \ \ k = 0\,. \end{cases} \tag{13}$$

Alors $Q_k^\mu(\tau, x)$ est holomorphe en $\tau \in \mathbb{C}$, C^∞ en x, à support compact dans $\overset{\circ}{M}$, et vérifie les estimations

$$\begin{cases} \exists D_0\,,\ \forall s \geq 0\,,\ \exists C_s\,,\ \forall \mu \geq 1\,,\ \forall k \in J_\mu\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,, \\ \qquad ||Q_k^\mu(z,\cdot)||_{H^s(M)} \leq C_s\, \mu^s\, e^{D_0 \mu}\, e^{T_0 \sqrt{|z|}}\,. \end{cases} \tag{14}$$

De plus, (8), et (13) impliquent pour tout $j, k \in J_\mu$

$$\int_M e_j(x)\, Q_k^\mu(-i\lambda_j, x) = \delta_{j,k}\,. \tag{15}$$

En reprenant la construction de RUSSELL [Ru], nous allons déduire de la construction précédente le résultat de contrôle approximatif suivant.

Proposition 1. *Soit V un ouvert non vide de $\overset{\circ}{M}$ et $\gamma > 1$. Il existe une constante $D_1 > 0$ et pour tout $s, \ell \geq 0$ des constantes $C_{s,\ell}$ tels que pour tout $\mu \geq 1$ et tout $T \in]0,1]$ il existe un opérateur linéaire S_T^μ de $L^2(M)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}_t \times \overline{M})$ vérifiant*

(16) $\forall u_0 \in L^2(M),\;$ support$(S_T^\mu(u_0)) \subset [0,T] \times V$

(17) $\forall u_0 \in L^2(M),\; \forall k \in J_\mu,\; \displaystyle\int_M K_T(u_0, S_T^\mu(u_0)) \cdot e_k = 0$

(18) $\forall u_0 \in L^2(M),\; \forall s, \ell \geq 0,\; \forall t,$

$$||\partial_t^\ell\, S_T^\mu(u_0)(t,\cdot)||_{H^s(M)} \leq$$

$$\leq C_{s,\ell}\,\mu^s\, T^{-2\gamma\ell} \exp\left\{ D_1 \left(\mu + \left(\frac{1}{T}\right)^\gamma \right) \right\} ||u_0||_{L^2(M)}\,.$$

PREUVE. Dans la construction précédente, on choisit $T_0 = 1$ et $\varphi \in C_0^\infty(]0,1[\times V)$, $\varphi \not\equiv 0$. On a donc

$$\text{support}\, Q_k^\mu(\tau, x) \subset \{x \in V\}\,. \tag{19}$$

Pour $\sigma = 2 - \frac{1}{\gamma} \in]1,2[$, choisissons une fonction $e(t)$ dans la classe de Gevrey G^σ, à support dans $t \in [0,1]$, avec $0 < e(t) \leq 1$ pour $t \in]0,1[$ vérifiant les estimations, avec $\hat{e}(z) = \int e^{-itz}\, e(t)\, dt$, $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \operatorname{Im} z \leq 0 \Longrightarrow |\hat{e}(z)| \leq c_1\, e^{-c_2 |z|^\beta} \\ \quad s \geq 0 \Longrightarrow \hat{e}(-is) \geq c_3\, e^{-c_4\, s^\beta}\,. \end{cases} \tag{20}$$

Par exemple, la fonction $e(t) = \exp\big(- t^{\frac{-1}{\sigma-1}} - (1-t)^{\frac{-1}{\sigma-1}} \big)$ convient, avec $\beta = \frac{1}{\sigma} \in \big] \frac{1}{2}, 1 \big[$ les constantes c_i étant positives. Posons

$$\hat{G}_{T,k}^\mu(z,x) = \frac{\hat{e}(Tz)}{\hat{e}(-iT\lambda_k)}\, Q_k^\mu(z,x), \tag{21}$$

$$\big(\mu \geq 1,\;\; T > 0,\;\; k \in J_\mu,\;\; z \in \mathbb{C},\;\; x \in M\big).$$

On a alors support$(\hat{G}^{\mu}_{T,k}) \subset \{x \in V\}$ et d'après (14), (20)

$$(22) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad ||\hat{G}^{\mu}_{T,k}(z,\cdot)||_{H^s(M)} \leq$$
$$\leq C_s\, \mu^s\, e^{D_0 \mu}\, e^{\sqrt{|z|}} \cdot c_3^{-1}\, e^{c_4 (T\lambda_k)^{\beta}}\, e^{T\,|\,\mathrm{Im}\, z|}$$

$$(23) \qquad \mathrm{Im}\, z \leq 0 \Longrightarrow ||\hat{G}^{\mu}_{T,k}(z,\cdot)||_{H^s(M)} \leq$$
$$\leq C_s\, \mu^s\, e^{D_0 \mu}\, e^{\sqrt{|z|}} \cdot c_3^{-1}\, e^{c_4 (T\lambda_k)^{\beta}}\, c_1\, e^{-c_2 |Tz|^{\beta}}\,.$$

D'après (22), (23) et le théorème de Paley-Wiener [H, th. 15.1.5], on a

$$(24) \qquad \hat{G}^{\mu}_{T,k}(z,x) = \int e^{-itz}\, G^{\mu}_{T,k}(t,x)\, dt$$

où $G^{\mu}_{T,k}$ est C^{∞} en (t,x), à support dans $t \in [0,T]$, $x \in V$ et vérifie

$$(25) \quad ||\partial_t^{\ell} G^{\mu}_{T,k}(t,\cdot)||_{H^s} \leq \frac{C_s\, \mu^s}{2\pi\, c_3}\, e^{D_0 \mu + c_4 (T\lambda_k)^{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{\ell}\, e^{\sqrt{|\tau|} - c_2 (T|\tau|)^{\beta}}\, d\tau\,.$$

On a

$$I_{\ell}(T) = \int_0^{\infty} \tau^{\ell}\, e^{\sqrt{\tau} - c_2 (T\tau)^{\beta}}\, d\tau = T^{-2\gamma(\ell+1)} \int_0^{\infty} x^{\ell}\, e^{(\frac{1}{T})^{\gamma}\, (\sqrt{x} - c_2\, x^{\beta})}\, dx$$

avec $\gamma = \frac{\beta}{2\beta - 1} = \frac{1}{2-\sigma} > 0$, donc par la méthode du col

$$(26) \qquad I_{\ell}(T) \simeq A_{\ell}\, T^{-2\gamma\ell}\, T^{-\frac{3\gamma}{2}}\, e^{c_5 (\frac{1}{T})^{\gamma}}\,, \quad (T \to 0;\, c_5 > 0)\,.$$

D'après (15), (21), on a aussi pour $j,k \in J_{\mu}$

$$(27) \quad \int_0^T \int_V e_j\, e^{-t\lambda_j}\, G^{\mu}_{T,k}(t,x)$$
$$= \int_M e_j\, \hat{G}^{\mu}_{T,k}(-i\lambda_j, x) = \frac{\hat{e}(-iT\lambda_j)}{\hat{e}(-iT\lambda_k)} \int_M e_j\, Q^{\mu}_k(-i\lambda_j, x) = \delta_{j,k}\,.$$

D'après le paragraphe 1 (4) et (27) si pour $u_0 = \sum u_{0,k}\, e_k \in L^2(M)$ on pose

$$(28) \qquad S^{\mu}_T(u_0)(t,x) = -\sum_{k \in J_{\mu}} G^{\mu}_{T,k}(T-t, x)\, u_{0,k}\, e^{-T\lambda_k}$$

l'identité (17) est satisfaite ; (16) résulte de support $G^{\mu}_{T,k} \subset [0,T] \times V$ et (18) est conséquence de (25), (26), puisque la formule de Weyl entraîne pour un $B > 0$

$$(29) \qquad \sum_{k \in J_\mu} |u_{0,k}| e^{-T\lambda_k + c_4 (T\lambda_k)^\beta} \leq ||u_0||_{L^2} \Big(\sum_k e^{-2T\lambda_k + 2c_4 (t\lambda_k)^\beta} \Big)^{1/2} \leq \text{cte}\, ||u_0||_{L^2} T^{-B} .$$

On remarquera que la formule (21) n'est autre que $\hat{e}(-iT\lambda_k) G^{\mu}_{T,k}(t,x) = \frac{1}{T} e\big(\frac{t}{T}\big) * \mathcal{F}^{-1}(Q^{\mu}_k)$ qui exprime $G^{\mu}_{T,k}$ comme la convolution d'une fonction Gevrey G^σ, $\sigma \in]1,2[$, à support dans $[0,T]$ avec l'ultradistribution $\mathcal{F}^{-1}(Q^{\mu}_k)$ qui d'après (14) est dans l'espace dual $(G^2)'$ et à support l'origine, donc comme un opérateur différentiel d'ordre infini appliqué à $\frac{1}{T} e\big(\frac{t}{T}\big)$. $\diamondsuit$

Fin de la preuve du théorème 1.

On peut supposer $[a,b] \times \overline{V} \subset \Omega$, avec $0 < a < b < T$, V étant un ouvert non vide de $\overset{\circ}{M}$. On fixe $\gamma > 1$ et ρ tels que

$$(30) \qquad 0 < \rho < \frac{2}{1+\gamma} < 1 .$$

Pour $\ell = 1, 2, \ldots$ on pose $\mu_\ell = 2^\ell$, $T_\ell = A 2^{-\rho \ell}$ où la constante $A > 0$ est telle que $2 \sum_{\ell=1}^{\infty} T_\ell = (b-a)$. Pour $u_0 \in L^2(M)$ on définit par récurrence les u_ℓ, v_ℓ par

$$(31) \qquad \begin{cases} u_1 = e^{a\Delta} u_0 \\ u_{\ell+1} = e^{T_\ell \Delta} v_\ell , \quad v_\ell = K_{T_\ell}(u_\ell, S^{\mu_\ell}_{T_\ell}(u_\ell)) . \end{cases}$$

Si $\varepsilon_\ell = ||u_\ell||_{L^2(M)}$, on a $\int_M v_\ell \cdot e_k = 0$ pour tout $k \in J_{\mu_\ell}$ donc $\varepsilon_{\ell+1} = ||e^{T_\ell \Delta} v_\ell||_{L^2} \leq e^{-T_\ell \mu_\ell^2} ||v_\ell||_{L^2}$ et d'après le paragraphe 1 (3) et (18)

$$||v_\ell||_{L^2} \leq ||u_\ell||_{L^2} \Big(1 + T_\ell C_{0,0} \exp\big\{ D_1 (\mu_\ell + T_\ell^{-\gamma}) \big\} \Big)$$

donc avec

$$m_\ell = e^{-T_\ell \mu_\ell^2} \Big[1 + T_\ell C_{0,0} \exp\big\{ D_1 (\mu_\ell + T_\ell^{-\gamma}) \big\} \Big] ,$$

on obtient

$$(32) \qquad \varepsilon_{\ell+1} \leq m_\ell \varepsilon_\ell .$$

D'après le choix (30) de ρ, il existe $B_1, B_2 > 0$ tels que

$$\forall \ell, \quad m_\ell \leq B_2 \exp\{-B_1 2^{(2-\rho)\ell}\} \tag{33}$$

donc $\lim_{\ell \to +\infty} \varepsilon_\ell = 0$ et plus précisément, il existe $B_3, B_4 > 0$ tels que

$$\forall \ell, \quad ||u_\ell||_{L^2} \leq B_4 \exp\{-B_3 2^{(2-\rho)\ell}\} ||u_0||_{L^2}. \tag{34}$$

Si on pose $a_0 = a$, $a_1 = a + 2T_1, \ldots, a_\ell = a_{\ell-1} + 2T_\ell, \ldots$ on a $\lim_{\ell \to \infty} a_\ell = b$ et il suffit de définir $S(u_0)$ par

$$\begin{cases} S(u_0)(t,x) = S^{\mu_\ell}_{T_\ell}(u_\ell)(t - a_{\ell-1}, x) & \text{si } a_{\ell-1} \leq t \leq a_{\ell-1} + T_\ell \\ S(u_0)(t,x) = 0 & \text{si } a_{\ell-1} + T_\ell \leq t \leq a_{\ell-1} + 2T_\ell = a_\ell. \end{cases} \tag{35}$$

En effet, d'après (18), on a pour tout $j, s \geq 0$

$$\sup_t ||\partial_t^j S(u_0)(t,\cdot)||_{H^s} \leq \tag{36}$$
$$\leq \sup_{\ell \geq 1} \left[C_{s,j} \mu_\ell^j T_\ell^{-2\gamma j} \exp\{D_1(\mu_\ell + T_\ell^{-\gamma})\} ||u_\ell||_{L^2} \right] < +\infty$$

d'après (34) et (30), donc $S(u_0) \in C_0^\infty(\Omega)$ (et $u_0 \mapsto S(u_0)$ est continu de $L^2(M)$ dans $C_0^\infty(\Omega)$) et, par construction, on a $K_b(u_0, S(u_0)) = 0$, donc a fortiori, $S(u_0)$ étant à support dans $t \leq b$, $K_T(u_0, S(u_0)) = 0$, ce qui achève la preuve du théorème 1.

Bibliographie

[B.L.R] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch : *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control Optim, Vol 30, (1992), 1024-1065.

[F.P.Z] C. Fabre, J.-P. Puel, E. Zuazua : *Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire,* CRAS Paris, t. 315, Série 1, (1992), 807-812.

[H] L. Hörmander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators,* Springer Verlag (1985).

[L.R] G. Lebeau, L. Robbiano : *Contrôle exact de l'équation de la chaleur,* à paraître dans Communication in Partial Differential Equations.

[M] S. MIZOHATA : *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques,* Memoirs of Coll. of Sciences Univ. of Kyoto **31** (1958), 219-239.

[Ro] L. ROBBIANO : *Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques,* à paraître dans Asymptotic Analysis.

[Ru] D. RUSSELL : *A unified Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations,* Studies in Applied Mathematics, Vol. 52, n° 3, (1973), 189-212.

[S.S] J.-C. SAUT, B. SCHEURER : *Unique continuation for some evolution equations,* J. of Diff. Eq. **66** (1987), 118-139.

[Z] E. ZUAZUA : *Controllability of the linear system of thermoelasticity,* à paraître au Journal de Maths Pures et Appliquées.